

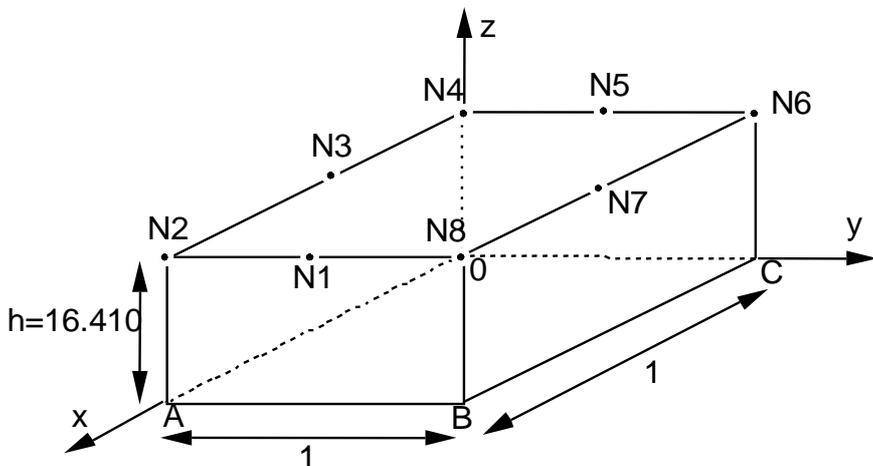
HPLV101 - Homogénéisation d'un matériau homogène

Résumé :

Ce test éprouve, dans une situation triviale où le matériau est homogène, la résolution des problèmes thermiques et mécaniques stationnaires, avec des chargements correspondant à un gradient de température et à une déformation imposée, voisins de ceux correspondant aux problèmes élémentaires de la méthode d'homogénéisation périodique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



| | x | y | z |
|----|-----|----|--------|
| N4 | 0 | 0 | 16.410 |
| N8 | 1. | 1. | 16.410 |
| N3 | 0.5 | 0 | 16.410 |

1.2 Propriétés de matériaux

Modélisation A

$$E = 1.0 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$k = 1.0 \text{ W l(m. } ^\circ\text{C)}$$

$$C_p = 0 \text{ J l(} ^\circ\text{C.m}^3\text{)}$$

Modélisation B

$$E_L = 1.0 \text{ MPa}$$

$$E_T = 0.9 \text{ MPa}$$

$$E_N = 0.8 \text{ MPa}$$

$$\nu_{LT} = 0.1$$

$$\nu_{LN} = 0.25$$

$$\nu_{TN} = 0.3333333$$

$$k = 1.0 \text{ W l(m. } ^\circ\text{C)}$$

$$C_p = 0 \text{ J l(} ^\circ\text{C.m}^3\text{)}$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Mécanique 3D :
 - Plan $z=0$: $dz=0$ pour le chargement membranaire ;
 $dx=0, dy=0$ pour le chargement de flexion
 - Plans $y=0, y=1$: $dy=0$
 - Plans $x=0, x=1$: $dx=0$
 - Nœud : O $dz=0$ (pour le seul chargement de flexion)

Chargement :

$$\begin{aligned} \text{déformation membranaire: } E &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{flexion uniforme imposée: } E &= \begin{pmatrix} \frac{z}{z_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$z_0 = 1 \text{ m}$$

- Mécanique 2D, contraintes planes :

Axe : $x=0$ $dx=0$ (ces conditions ne correspondent pas à l'application de la
Nœud : O $dy=0$ méthode d'homogénéisation).

Chargement : déformation $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ uniforme imposée

- Thermique 3D et 2D :

Plan $x=0$ $temp=0$ (cette condition ne correspond pas à l'application de la
méthode d'homogénéisation).

Chargement : gradient $G = (-1,0,0)$ uniforme imposé.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

- En thermique : on résout le problème thermique stationnaire :

$$\int_{\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta = \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta, \quad \forall \theta \in V, \quad \text{avec } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Les conditions aux limites choisies ici ne sont pas celles nécessaires à la méthode d'homogénéisation : on trouverait en effet $T = 0$ partout.

La solution est alors (vérifiant les conditions définies en [§1.3]) : $T(x, y, z) = -x$

L'énergie potentielle est alors à l'équilibre : $W^{th} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla T = -\frac{1}{2} |\Omega|$ ici

- En mécanique : on résout le problème d'élastostatique :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in W,$$

pour les cas :

| chargement 3D membranaire | chargement 3D de flexion | chargement 2D contraintes planes |
|---|---|---|
| $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ z_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

Les solutions sont :

- en 3D, chargement **membranaire** et élasticité isotrope: $\mathbf{u}(x, y, z) = \left(0, 0, -\frac{vz}{(1-v)}\right)$

l'énergie potentielle à l'équilibre est :

$$W^{pot} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = -\left(\frac{v}{1-v}\right)^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} (\lambda + 2\mu)$$

- en 3D, chargement **membranaire** et élasticité orthotrope: $\mathbf{u}(x, y, z) = (0, 0, -\beta z)$ avec $\beta = \frac{C_{13}}{C_{33}}$

soit $\beta = \frac{\frac{E_N}{E_L} (v_{LN} + v_{LT} v_{TN})}{1 - \frac{E_N}{E_T} v_{TN}^2}$ car le repère local n'est pas confondu avec le repère global (les angles nautiques valant tous 90°).

$$W^{pot} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = -\beta^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} C_{33}$$

$$\text{où } C_{33} = \frac{1 - \nu_{NT}\nu_{TN}}{E_T E_N \Delta} \text{ et } \Delta = \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL} - \nu_{LN}\nu_{NL} - \nu_{TN}\nu_{NT} - 2\nu_{LT}\nu_{TN}\nu_{NL}}{E_L E_T E_N}$$

- en 3D, chargement de **flexion** : $\mathbf{u}(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{+ \nu z^2}{2z_0(1-\nu)} \right)$;

$$W^{pot} = - \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right)^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{h^2}{3z_0^2}$$

- en 3D, chargement **de flexion** et élasticité orthotrope: $\mathbf{u}(x, y, z) = \left(0, 0, -\beta \frac{z}{L} \right)$ avec $\beta = \frac{C_{13}}{C_{33}}$

$$\text{soit } \beta = \frac{\frac{E_N}{E_L} (\nu_{LN} + \nu_{LT}\nu_{TN})}{1 - \frac{E_N}{E_T} \nu_{TN}^2} \text{ car le repère local n'est pas confondu avec le repère global (les angles nautiques valant tous } 90^\circ).$$

$$W^{pot} = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = -\beta^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} C_{33} \frac{h^2}{3z_0^2}$$

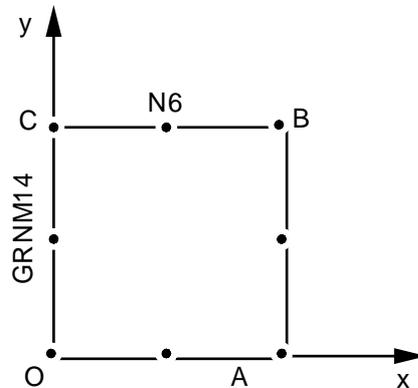
$$\text{où } C_{33} = \frac{1 - \nu_{NT}\nu_{TN}}{E_T E_N \Delta} \text{ et } \Delta = \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL} - \nu_{LN}\nu_{NL} - \nu_{TN}\nu_{NT} - 2\nu_{LT}\nu_{TN}\nu_{NL}}{E_L E_T E_N}$$

- en 2D, chargement plan : $\mathbf{u}(x, y) = (-x, 0)$;

$$W^{pot} = \frac{-|\Omega|}{2(1-\nu^2)}$$

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



Conditions aux limites et chargement :

Thermique : GROUP_NO : GRNM14 : TEMP : 0.0
 PRE_GRAD_TEMP : FLUX_X : -1.0

Mécanique : GROUP_NO : GRNM14 : DX : 0.0
(contraintes planes)
 NOEUD : O DY : 0.0
 PRE_EPSI : EPXX : -1.0

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8

3.3 Valeurs testées

| Point | Grandeur | Référence |
|------------|----------|-----------|
| <i>CMP</i> | | |
| A | TEMP | -1.0000 |
| A | DX | -1.0000 |
| N6 | DX | -0.5000 |

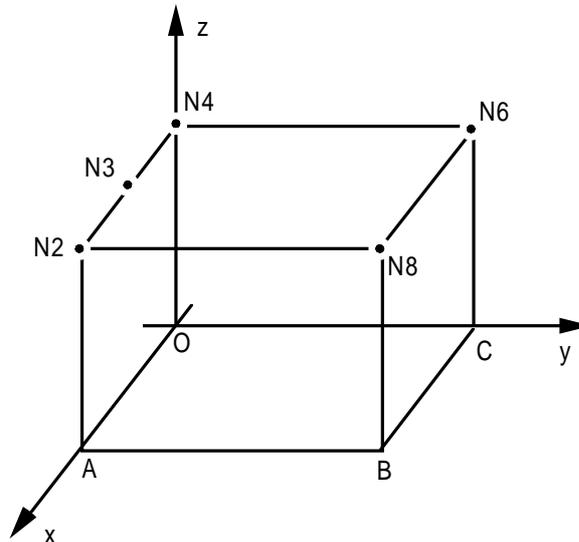
| Maille | Energie potentielle à l'équilibre | Référence |
|--------|-----------------------------------|--------------|
| MI | Thermique | -0.500000000 |
| MI | Mécanique | -0.549450550 |

3.4 Remarques

Code_Aster fournit la valeur de l'énergie de déformation, égale à l'opposé de l'énergie potentielle à l'équilibre (cas élastique).

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



| | | | | | |
|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Nom des mailles des faces : | ZEGAL0 | YEGAL0 | YEGAL1 | XEGAL0 | XEGAL1 |
| Sommets : | BCOA | OAN2N4 | BCN6N8 | CON4N6 | ABN8N2 |

Conditions aux limites :

```

ZERO : DEFI_CONSTANTE (VALE : 0.0) ;
FCT1:DEFI_FONCTION(Nom_para:'Z',VALE: (0.0 0.0 1.0 1.0));
Thermique :
GROUP_NO : XEGAL0 : TEMP : 0.0
PRE_GRAD_TEMP : FLUX_X : -1.0
Mécanique :
GROUP_NO : YEGAL0 : DY = 0.0
           XEGAL1 : DX = 0.0
           YEGAL1 : DY = 0.0
           XEGAL0 : DZ = 0.0
Cas membranaire :
GROUP_NO : ZEGAL0 : DZ = 0.0
PRE_EPSI : EPXX : -1.0
Cas flexion :
GROUP_NO : ZEGAL0 : DX = ZERO,  DY = ZERO
NOEUD : 0                      DZ = ZERO
PRE_EPSI :                      EPXX : FCT1
    
```

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20
Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

4.3 Valeurs testées

En élasticité isotrope

| Cas | Grandeur | Point | Référence |
|-----------|-------------|-------|-------------|
| Thermique | <i>temp</i> | N8 | -1.000000 |
| | <i>temp</i> | N3 | -0.500000 |
| Mécanique | <i>dz</i> | N4 | -7.03285714 |
| membrane | <i>dz</i> | N8 | -7.03285714 |
| Mécanique | <i>dz</i> | N4 | 57.70459285 |

| | | | |
|---------|-----------|-----------|-------------|
| flexion | <i>dz</i> | <i>N8</i> | 57.70459285 |
|---------|-----------|-----------|-------------|

| Maille | Energie potentielle à l'équilibre | Référence |
|-----------|-----------------------------------|----------------------------|
| <i>MI</i> | Thermique | -8.20500 |
| <i>MI</i> | Mécanique | -2.0287088 |
| | Membrane | -1.8210238 10 ² |
| | Flexion | |

En élasticité orthotrope

| Cas | Grandeur | Point | Référence |
|-----------|-------------|-----------|--------------|
| Thermique | <i>temp</i> | <i>N8</i> | -1.000000 |
| | <i>temp</i> | <i>N3</i> | -0.500000 |
| Mécanique | <i>dz</i> | <i>N4</i> | - 6.63044894 |
| membrane | <i>dz</i> | <i>N8</i> | - 6.63044894 |
| Mécanique | <i>dz</i> | <i>N4</i> | 54.40283358 |
| flexion | <i>dz</i> | <i>N8</i> | 54.40283358 |

| Maille | Energie potentielle à l'équilibre | Référence |
|-----------|-----------------------------------|-----------|
| <i>MI</i> | Thermique | -8.20500 |

5 Synthèse des résultats

Les résultats sont exacts à des erreurs d'arrondi près, puisque les solutions cherchées font partie de l'espace des éléments finis choisis pour la modélisation.