
SSNV246 - Application d'une pression répartie sur les lèvres d'une fissure XFEM avec les facettes de contact issues des sous éléments d'intégration

Résumé :

Il s'agit d'un test de validation des facettes de contact issues des sous éléments d'intégration XFEM.

Les facettes de contact utilisées par défaut ne sont pas issues des sous éléments d'intégration et ne donnent pas la possibilité d'avoir des facettes de contact quadratiques en 3D. On peut activer la récupération des facettes de contact issues des sous éléments d'intégration dans l'opérateur `MODI_MODELE_XFEM` avec le mot-clé `DECOUPE_FACETTE='SOUS_ELEMENTS'`. On dispose alors de facettes linéaires et quadratiques en 2D comme en 3D qui présentent l'avantage d'être conformes aux sous éléments d'intégration puisqu'elles sont choisies parmi les côtés des sous éléments d'intégration en 2D et les faces des sous éléments d'intégration en 3D. Ce mode de récupération présente également l'avantage suivant : les coordonnées des nœuds de ces facettes ne sont pas recalculées comme c'est le cas par défaut, car ces nœuds sont récupérés lors du découpage qui est effectué dans `TOPOSE`.

Dans le présent test, on s'assure du bon fonctionnement de la récupération de ces facettes lorsqu'une pression mécanique est appliquée sur les lèvres de la fissure. Des géométries différentes sont proposées en 2D et en 3D, les résultats obtenus sont comparés à une solution analytique. On choisit volontairement une iso-zéro « Isn courbe » représentant l'interface dans la géométrie 2D et la géométrie 3D pour apprécier le gain de performance apporté par la « facétisation » quadratique.

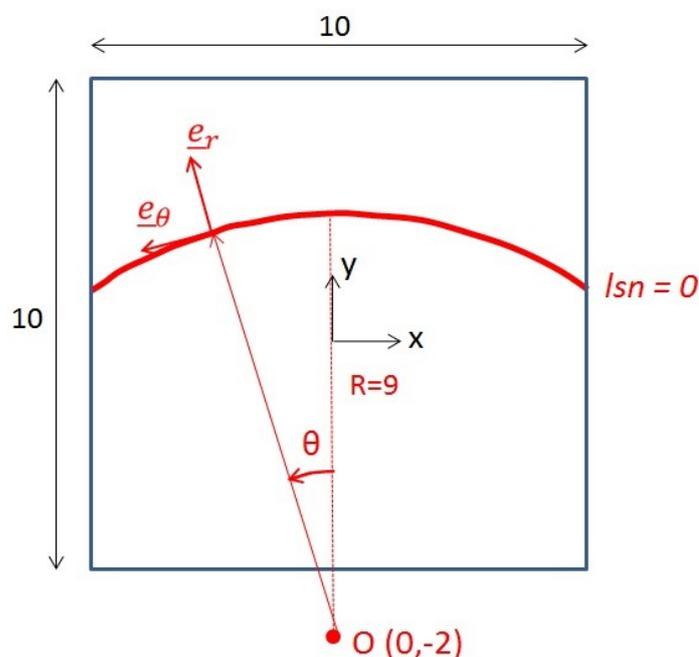
1 Problème de référence

1.1 Géométrie du problème 2D (modélisations A et B)

Il s'agit d'un carré de côté $L=10\text{ m}$. Ce barreau présente une discontinuité de type interface (interface non maillée qui est introduite dans le modèle par l'intermédiaire des level-sets grâce à l'opérateur `DEFI_FISS_XFEM`). Le carré est ainsi entièrement traversé par la discontinuité (au niveau de l'approximation du champ de déplacements, on ne prend en compte que l'enrichissement Heaviside). La discontinuité est circulaire de centre $O(0,-2)$ et de rayon $R=9\text{ m}$.

On représente sur la Figure 1.1-a la géométrie du problème.

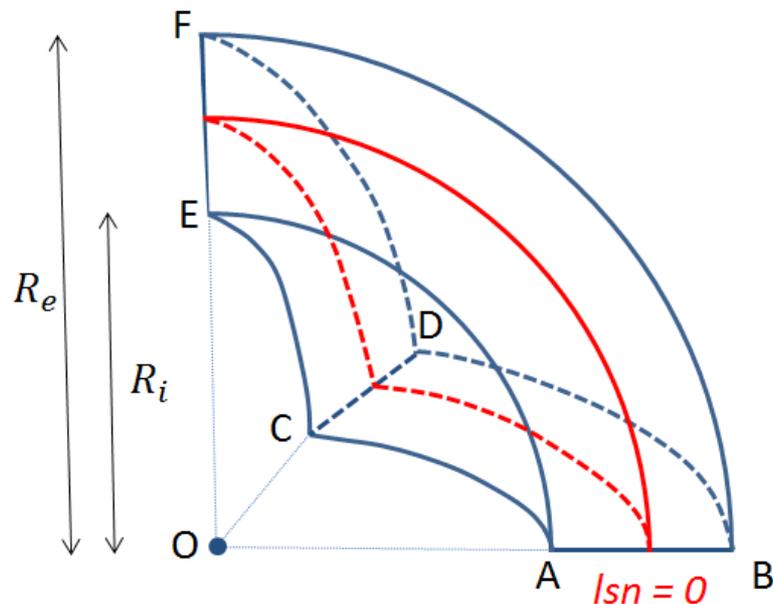
Figure 1.1-a: Géométrie du problème 2D



1.2 Géométrie du problème 3D (modélisations C et D)

Il s'agit d'un huitième de sphère de rayon intérieur $R_i=1\text{ m}$, de rayon extérieur $R_e=2\text{ m}$ et de centre $O(0,0,0)$. Cette portion de sphère est traversée par une discontinuité de type interface (interface non maillée qui est introduite dans le modèle par l'intermédiaire des level-sets grâce à l'opérateur `DEFI_FISS_XFEM`), concentrique de rayon $R=1.5\text{ m}$.

On représente sur la Figure 3.2-a la géométrie de la colonne.



1.3 Propriétés matériaux

Les paramètres donnés dans le Tableau 1.3-1, correspondent aux paramètres utilisés pour les 4 modélisations. Le comportement est élastique ('ELAS').

Paramètres élastiques	Module de Young E (en MPa)	5800
	Coefficient de Poisson ν	0
	Coefficient de dilatation thermique α (en K^{-1})	0

Tableau 1.3-1 : Propriétés du matériau

1.4 Conditions aux limites et chargement

Cas 2D

On applique les conditions de Dirichlet suivantes :

- sur le côté inférieur du carré, les déplacements sont bloqués dans toutes les directions ($u_x=0$ et $u_y=0$),
- sur le côté supérieur du carré, les déplacements suivant x sont bloqués $u_x=0$ et on impose un écrasement du carré suivant y , $u_y = u_{y, \text{impo}} = -1.E^{-6}$.

On applique dans la fissure « la pression et le cisaillement de contact ». C'est à dire qu'on applique les efforts qu'il y aurait au niveau de la fissure si le carré n'était pas fissuré où s'il y avait un contact adhérent parfait. Les conditions de Neuman sont ainsi les suivantes:

- sur chacune des lèvres de l'interface on impose une pression répartie $p(\theta) = \alpha_{yy} * \cos^2(\theta)$ par l'intermédiaire de AFPE_CHAR_MECA et du mot-clef FISSURE de PRES_REP.
- sur chacune des lèvres de l'interface on impose un cisaillement réparti $t(\theta) = -\alpha_{yy} * \cos(\theta) \sin(\theta)$ par l'intermédiaire de AFPE_CHAR_MECA et du mot-clef FISSURE de CISA_2D.

Cas 3D

On applique les conditions de Dirichlet suivantes :

- sur la face inférieure [ABDC], les déplacements suivant z sont bloqués $u_z=0$,
- sur la face [ABFE], les déplacements suivant y sont bloqués $u_y=0$,
- sur la face [CDFE], les déplacements suivant x sont bloqués $u_x=0$,
- sur la calotte extérieure BDF et la calotte intérieure ACE, les déplacements sont bloqués dans toutes les directions ($u_x=0$, $u_y=0$ et $u_z=0$).

Le chargement est le suivant :

- sur chacune des lèvres de l'interface à $r=R$ on impose une pression répartie uniforme $p=10\text{ MPa}$ par l'intermédiaire de `AFFE_CHAR_MECA` et du mot-clef `FISSURE` de `PRES_REP`.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

Dans le cas 2D et le cas 3D, il s'agit d'une solution analytique. Compte tenu des conditions aux limites, les déplacements peuvent être obtenus à partir de la résolution analytique de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Cas 2D

Le Coefficient de Poisson ν étant nul, le problème est unidimensionnel suivant y . Le tenseur des contraintes est uniforme dans tout le domaine : $\sigma = E \epsilon = E * \epsilon_{yy} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y$.

Or $\text{Div}(\sigma) = \mathbf{0}$ donc $\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} = 0$. D'après les conditions aux limites appliquées $\epsilon_{yy} = \frac{u_{y, \text{impo}}}{L}$

Finalement, $\sigma = E * \frac{u_{y, \text{impo}}}{L} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y = \sigma_{yy} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y$.

Au niveau de la fissure, $\mathbf{e}_r = -\sin(\theta) \mathbf{e}_x + \cos(\theta) \mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_\theta = -\cos(\theta) \mathbf{e}_x - \sin(\theta) \mathbf{e}_y$.

Au niveau d'un point de la fissure de coordonnées (R, θ) , s'il n'y avait pas de fissure, on aurait :

$$\sigma \cdot \mathbf{e}_r = (\mathbf{e}_r \cdot \sigma \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r + (\mathbf{e}_r \cdot \sigma \cdot \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_\theta = \sigma_{yy} * [(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_r)^2 \mathbf{e}_r + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_r) \chi (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_\theta]$$

$$\sigma \cdot \mathbf{e}_r = \sigma_{yy} * (\cos^2(\theta) \mathbf{e}_r - \sin(\theta) \cos(\theta) \mathbf{e}_\theta)$$

Finalement la solution du problème est :

$$\sigma = \sigma_{yy} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{u_{y, \text{impo}}}{L} * \left(\frac{L}{2} + y \right)$$

Cas 3D

En négligeant la pesanteur, l'équation s'écrit (en contraintes totales) :

$$\text{Div}(\sigma) = \mathbf{0}$$

Le module de Poisson ν étant nul, et étant dans le cas élastique, on a $\sigma = E \epsilon$.

Le volume étudié est à symétrie sphérique, constitué d'un matériau homogène et isotrope ; les conditions aux limites possèdent aussi la symétrie sphérique. On est donc amené à chercher une solution du problème dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) tel que les champs de déplacement, de contrainte et de déformation soient respectivement de la forme :

$$\begin{cases} u_r = h(r) \\ u_\theta = u_\varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = f_1(r) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = g_1(r) \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon_r = f_2(r) \\ \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\varphi\varphi} = g_2(r) \\ \epsilon_{r\theta} = \epsilon_{r\varphi} = \epsilon_{\theta\varphi} = 0 \end{cases}$$

L'équation d'équilibre $\text{Div}(\sigma)=0$ se réduit alors à : $\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_{\theta\theta})=0$

Les conditions aux limites statiques sont de la forme : $\sigma_r(R)=-p$

Les équations cinématiques ont la forme :
$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{du_r}{dr} \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \end{cases} \text{ soit finalement : } \begin{cases} \sigma_r = E * \frac{du_r}{dr} \\ \sigma_{\theta\theta} = E * \frac{u_r}{r} \end{cases}$$

En substituant ces deux relations dans l'équation d'équilibre on obtient :

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} * \left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_r)}{dr} \right) = 0$$

La solution de cette équation différentielle est : $u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$. La solution cherchée étant discontinue en R , on résout cette équation séparément sur les deux domaines $[R_i, R]$ et $[R, R_e]$.

$$\text{Finalement : } \begin{cases} u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} & \text{sur } [R_i, R] \\ u_r(r) = C_3 r + \frac{C_4}{r^2} & \text{sur } [R, R_e] \end{cases}$$

D'après les conditions aux limites cinématiques, $u_r(R_i) = u_r(R_e) = 0$ donc
$$\begin{cases} C_1 R_i + \frac{C_2}{R_i^2} = 0 \\ C_3 R_e + \frac{C_4}{R_e^2} = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs $\sigma_r = E * \frac{du_r}{dr} = \begin{cases} E * C_1 - 2 E * \frac{C_2}{r^3} & \text{sur } [R_i, R] \\ E * C_3 - 2 E * \frac{C_4}{r^3} & \text{sur } [R, R_e] \end{cases}$ donc d'après les conditions aux

limites statiques :
$$\begin{cases} C_1 - 2 * \frac{C_2}{R^3} = -\frac{p}{E} \\ C_3 - 2 * \frac{C_4}{R^3} = -\frac{p}{E} \end{cases}$$

La résolution du système donne

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{-p}{E * (2 * \frac{R_i^3}{R^3} + 1)} \\ C_2 = \frac{p}{E * (\frac{2}{R^3} + \frac{1}{R_i^3})} \\ C_3 = \frac{-p}{E * (2 * \frac{R_e^3}{R^3} + 1)} \\ C_4 = \frac{p}{E * (\frac{2}{R^3} + \frac{1}{R_e^3})} \end{array} \right.$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

A compléter.

2.3 Incertitudes sur la solution

Aucune, la solution est analytique.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation `D_PLAN` utilisant des éléments HM-XFEM linéaires.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le carré sur lequel on effectue la modélisation est divisé en 16 `QUAD4`. L'interface est non maillée et coupe le carré horizontalement. Le maillage est représenté Figure 3.2-a.

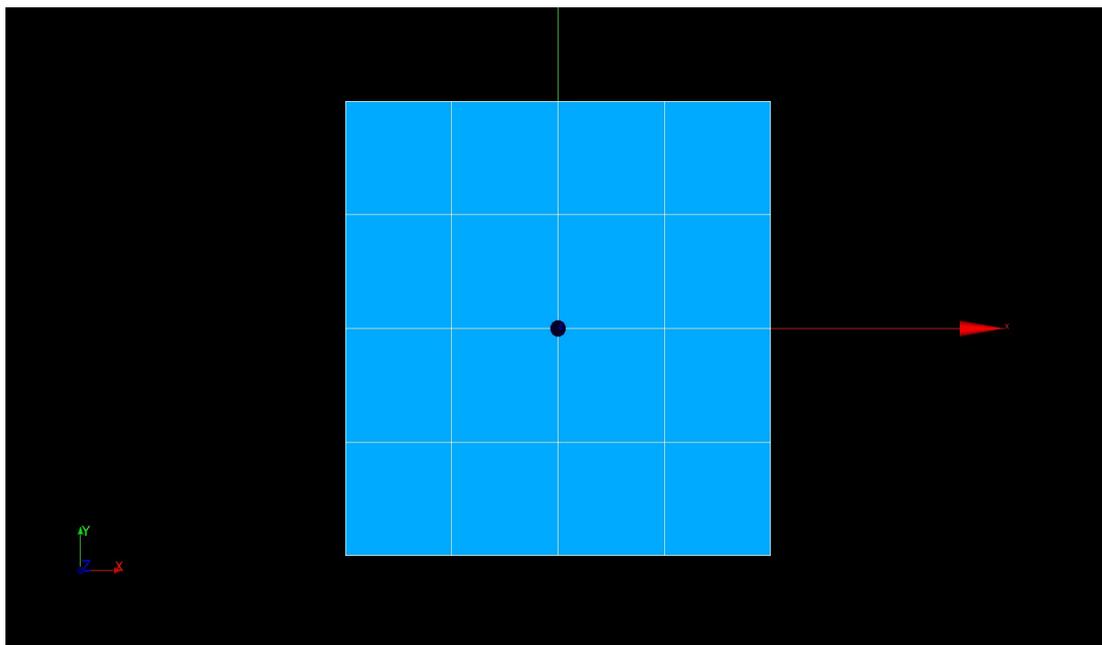


Figure 3.2-a: Maillage 2D

3.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats sont obtenus avec `Code_Aster` (résolution avec `STAT_NON_LINE`). On teste la contrainte horizontale σ_{xx} supposée uniformément nulle et la contrainte verticale σ_{yy} supposée uniforme de valeur $-E$. Pour ce faire, on teste le `MIN` et le `MAX` de ces deux grandeurs dans tout l'élément. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Grandeurs testées	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
SIGMAXX (MPa) MIN	'ANALYTIQUE'	0.0	30
SIGMAXX (MPa) MAX	'ANALYTIQUE'	0.0	45
SIGMAYY (MPa) MIN	'ANALYTIQUE'	-5800.0	8 %
SIGMAYY (MPa) MAX	'ANALYTIQUE'	-5800.0	4 %

Les déplacements suivant y et la déformée sont représentés sur la Figure 3.3-a. On observe bien une compression linéaire du carré, peu perturbée par la présence de la fissure.

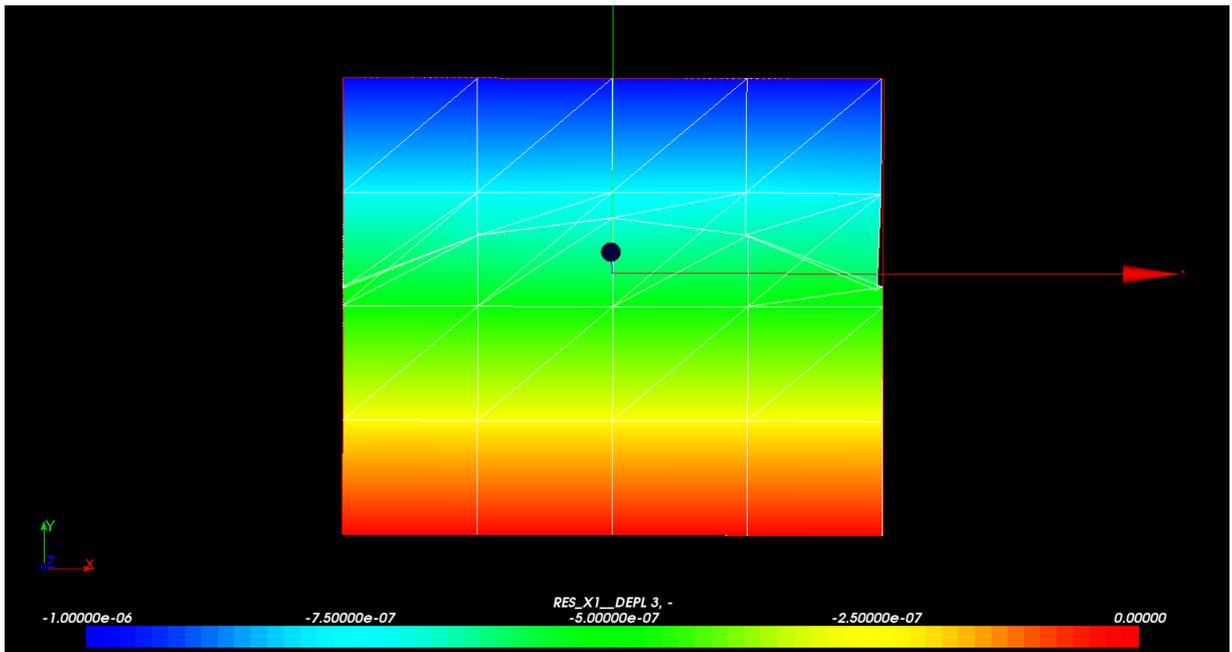


Figure 3.3-a: Champ de déplacements selon la direction (Oy)

En revanche, sur les Figures 3.3-b et 3.3-c, on observe les écarts du champ de contrainte par rapport à la solution analytique, en particulier au voisinage de la fissure et près des bords. La précision relative obtenue peut paraître médiocre mais il faut la mettre en relation avec le faible nombre d'éléments utilisés et la courbure importante de la discontinuité.

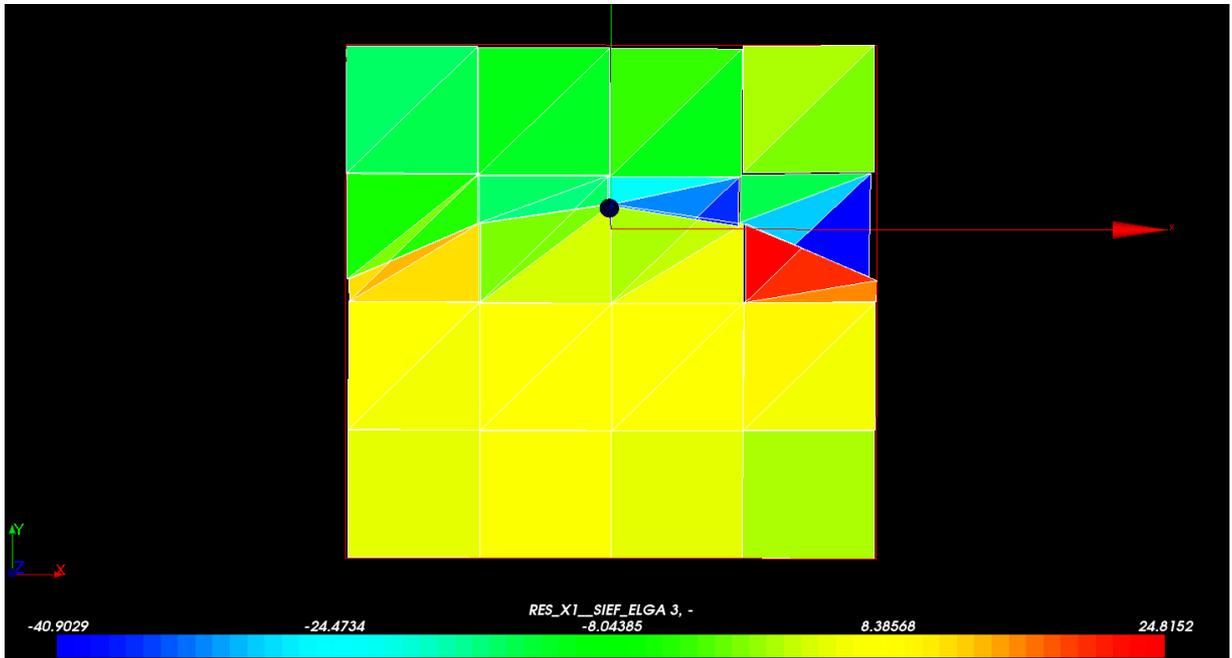


Figure 3.3-b: Champ de contraintes sxx

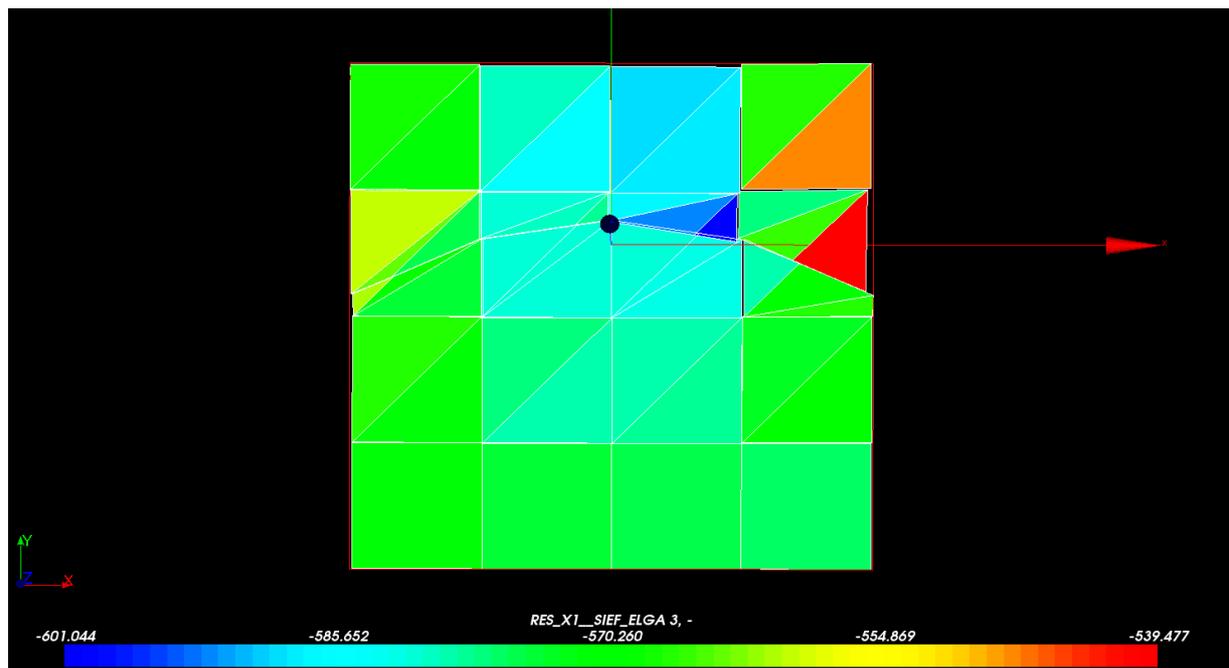


Figure 3.3-c: Champ de contraintes sy

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est strictement identique à la précédente, à l'exception des éléments utilisés qui sont quadratiques.

4.2 Caractéristiques du maillage

Le carré sur lequel on effectue la modélisation est divisé en 16 QUAD8. L'interface est non maillée et coupe le carré horizontalement.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats sont obtenus avec Code_Aster (résolution avec STAT_NON_LINE). On teste la contrainte horizontale σ_{xx} supposée uniformément nulle et la contrainte verticale σ_{yy} supposée uniforme de valeur $-E$. Pour ce faire, on teste le MIN et le MAX de ces deux grandeurs dans tout l'élément. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Grandeurs testées	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
SIGMAXX (MPa) MIN	'ANALYTIQUE'	0.0	0.01
SIGMAXX (MPa) MAX	'ANALYTIQUE'	0.0	0.02
SIGMAYY (MPa) MIN	'ANALYTIQUE'	-5800.0	0.002 %
SIGMAYY (MPa) MAX	'ANALYTIQUE'	-5800.0	0.001 %

Les déplacements suivant y et la déformée sont représentés sur la Figure 4.3-a. On observe bien une compression linéaire du carré, qui s'effectue comme si la fissure n'était pas présente.

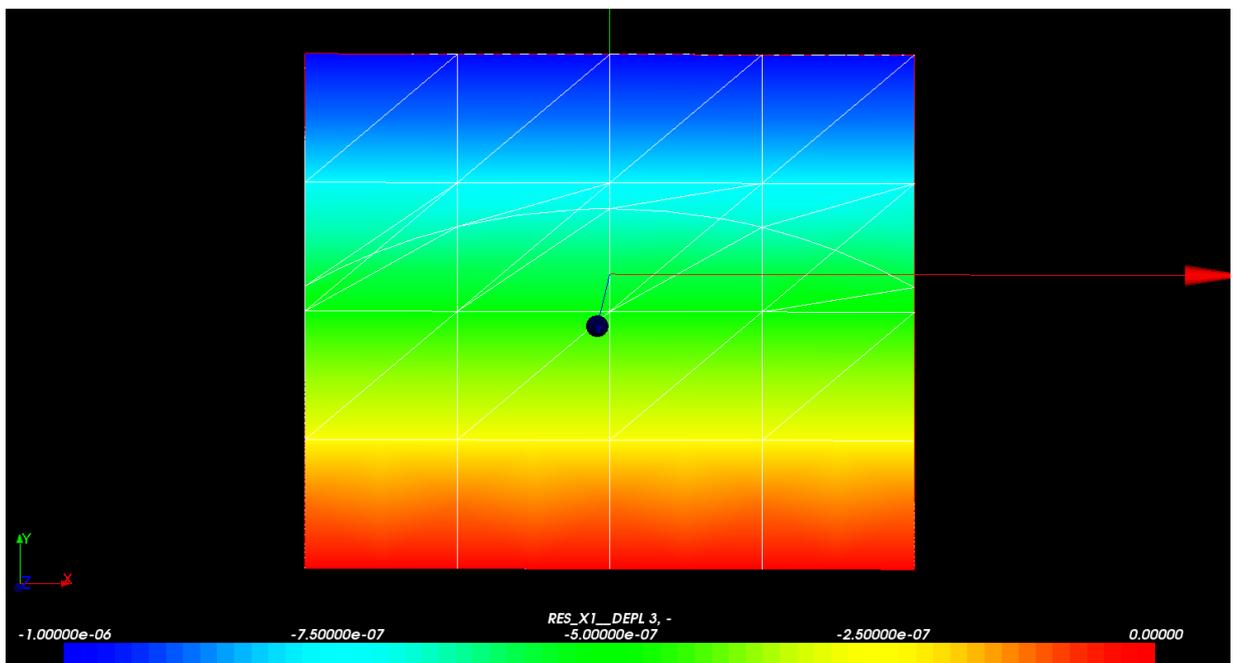


Figure 4.3-a: Champ de déplacements selon la direction (Oy)

Sur les Figures 4.3-b et 4.3-c, on confirme que les écarts en contraintes par rapport à la solution analytique sont réduits de manière conséquente par rapport à la modélisation linéaire précédente. L'erreur relative diminue d'un facteur 10. De très légers écarts sont toujours observés au voisinage de la fissure et au niveau des bords.

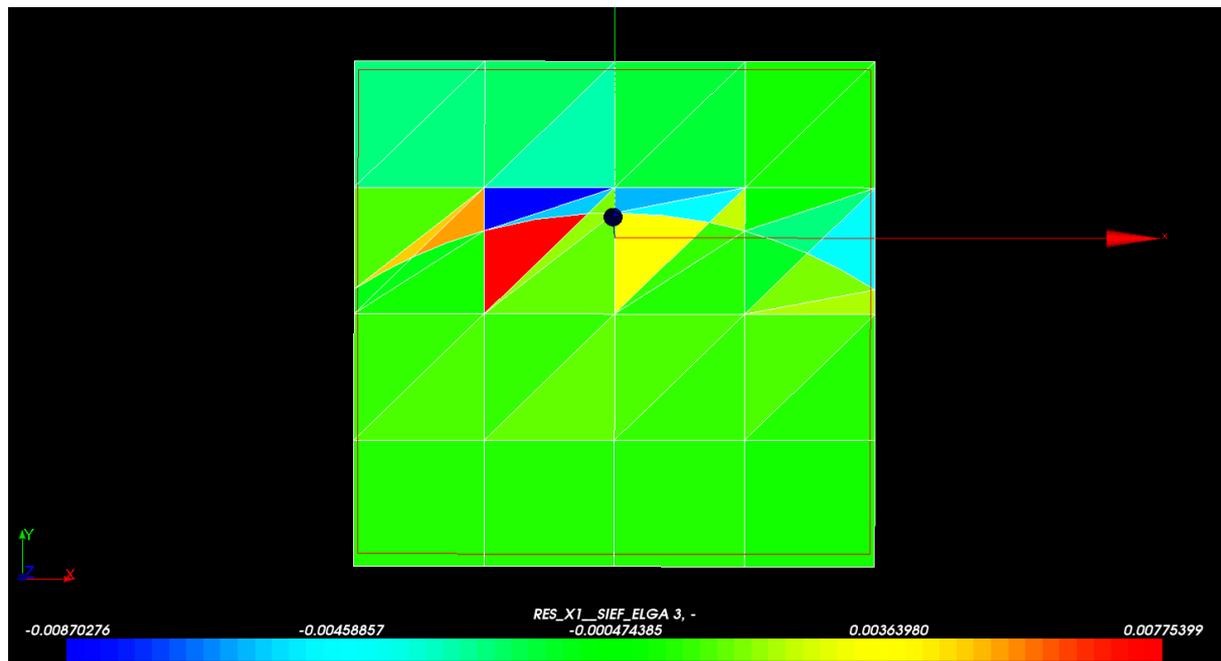


Figure 4.3-b: Champ de contraintes s_{xx}

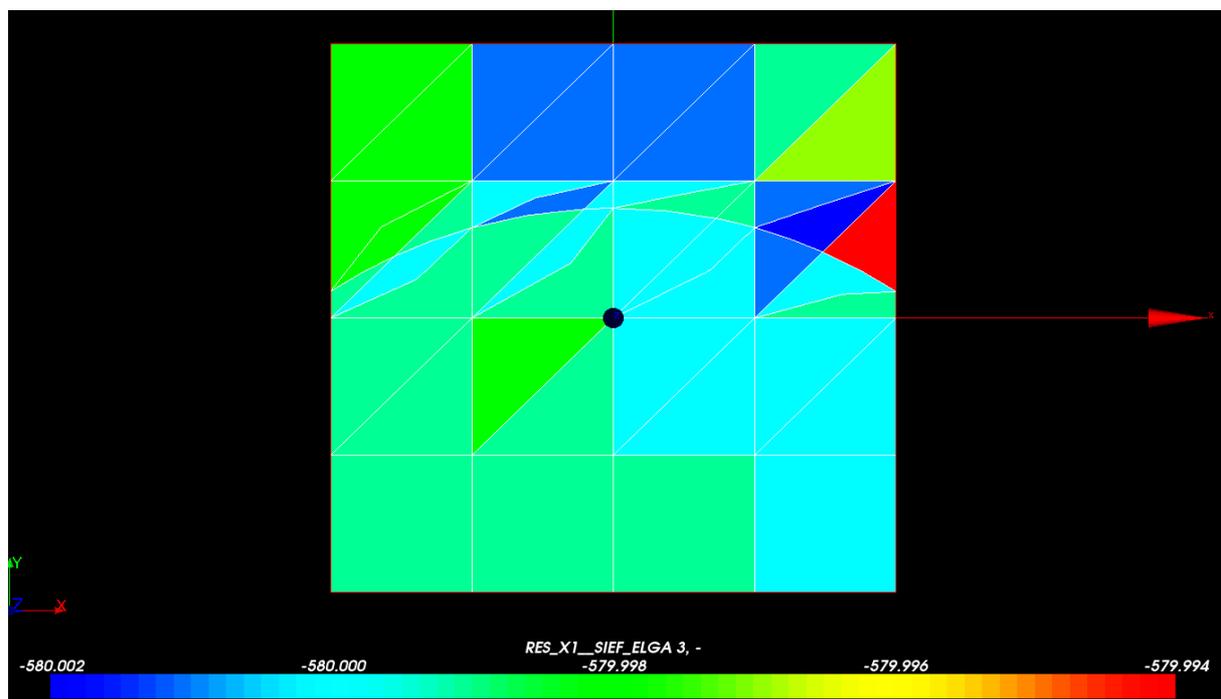


Figure 4.3-c: Champ de contrainte s_{yy}

Les deux modélisations précédentes valident l'utilisation des facettes de contact issues des sous éléments d'intégration pour l'application d'une pression mécanique et d'un cisaillement sur les lèvres de fissure pour des modélisations 2D, linéaires et quadratiques. On constate en particulier l'important gain en précision lorsque l'on utilise des éléments quadratiques. Même si la discontinuité est courbe, on obtient une excellente précision avec très peu d'éléments.

5 Modélisation C

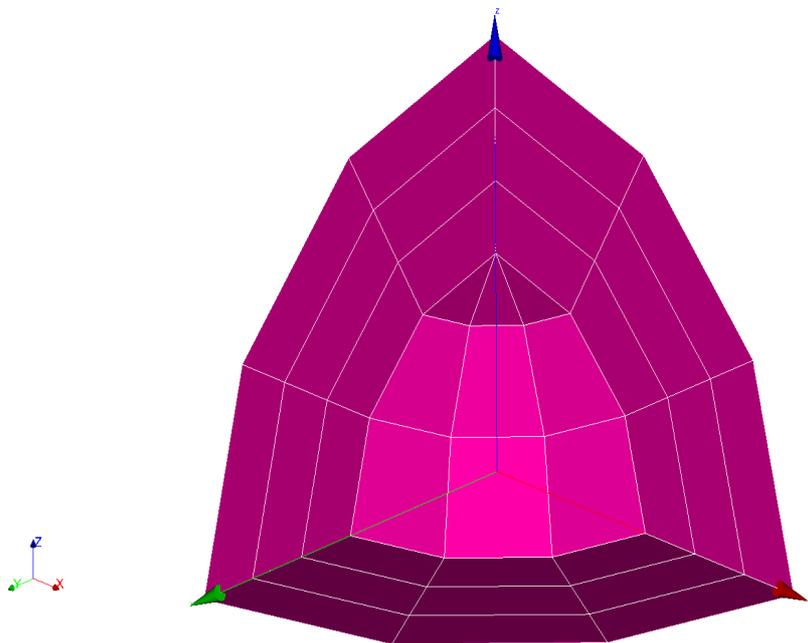
5.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation 3D utilisant des éléments XFEM linéaires.

5.2 Caractéristiques du maillage

La calotte sphérique sur laquelle on effectue la modélisation est divisé en 18 HEXA8 et 9 PENTA6. L'interface est non maillée et coupe la calotte dans son épaisseur. Le maillage est représenté Figure 5.2-a.

Figure 5.2-a: Maillage 3D linéaire



5.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats sont obtenus avec *Code_Aster* (résolution avec `STAT_NON_LINE`). On teste les déplacements radiaux u_r sur les lèvres de la fissure. Pour chaque fissure, on teste le MIN et le MAX de ces deux grandeurs pour tous les nœuds de la fissure. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Grandeurs testées		Type de référence	Valeurs analytiques	Tolérance (%)
DR (int)	MIN	'ANALYTIQUE'	-0.0001142742582	10.
DR (int)	MAX	'ANALYTIQUE'	-0.0001142742582	10.
DR (ext)	MIN	'ANALYTIQUE'	6.173526141E-05	10.
DR (ext)	MAX	'ANALYTIQUE'	6.173526141E-05	10.

Le déplacement radial u_r et la déformée sont représentés sur la Figure 5.3-a. On observe une discontinuité nette des déplacements et la symétrie sphérique des champs.

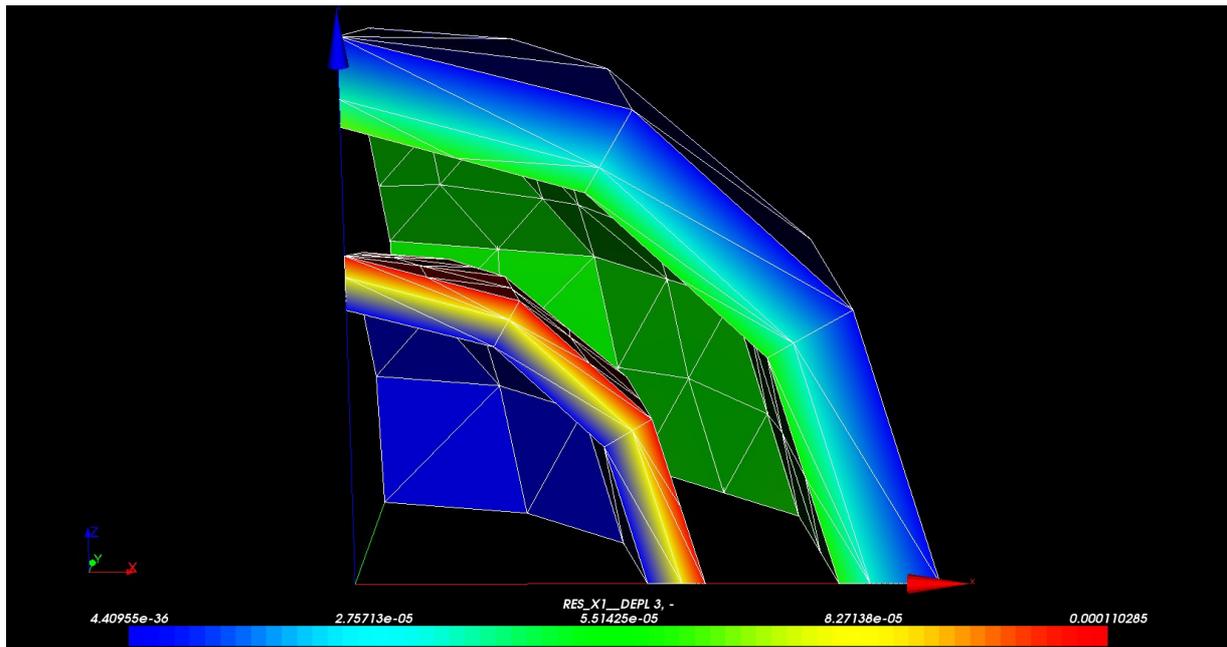


Figure 5.3-a: Champ de déplacement radial

Les écarts constatés avec la solution analytique sont à mettre en perspective avec la pauvreté du maillage utilisé. On utilise uniquement 3 mailles dans l'épaisseur de la calotte et dans les directions longitudinales et méridionales.

6 Modélisation D

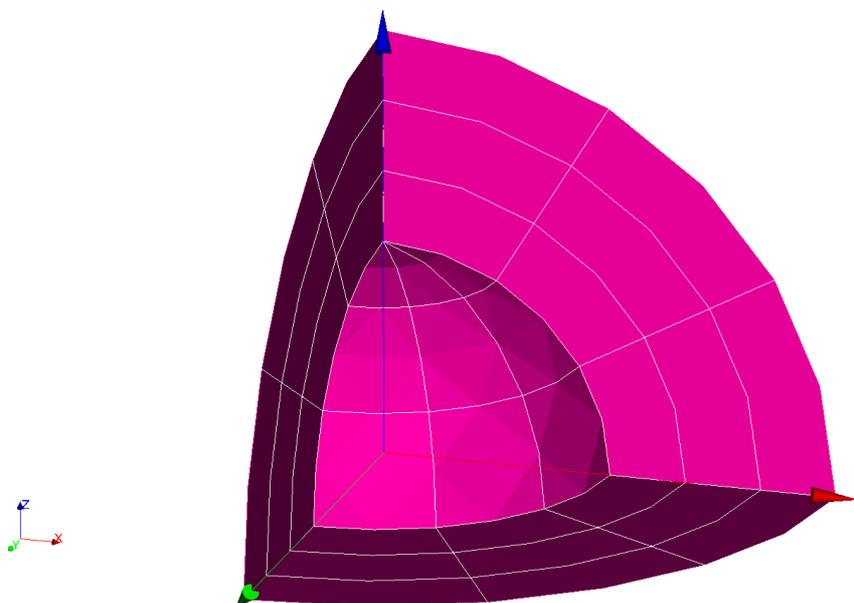
6.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est strictement identique à la précédente, à l'exception des éléments utilisés qui sont quadratiques.

6.2 Caractéristiques du maillage

La calotte sur laquelle on effectue la modélisation est divisé en 18 `HEXA20` et 9 `PENTA15`. L'interface est non maillée et coupe la calotte dans son épaisseur. Le maillage est représenté Figure 6.2-a.

Figure 6.2-a: Maillage 3D quadratique



6.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats sont obtenus avec *Code_Aster* (résolution avec `STAT_NON_LINE`). On teste les déplacements radiaux u_r sur les lèvres de la fissure. Pour chaque fissure, on teste le `MIN` et le `MAX` de ces deux grandeurs pour tous les nœuds de la fissure. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Grandeurs testées		Type de référence	Valeurs analytiques	Tolérance (%)
DR (int)	MIN	'ANALYTIQUE'	-0.0001142742582	1.
DR (int)	MAX	'ANALYTIQUE'	-0.0001142742582	1.
DR (ext)	MIN	'ANALYTIQUE'	6.173526141E-05	1.
DR (ext)	MAX	'ANALYTIQUE'	6.173526141E-05	1.

Le déplacement radial u_r et la déformée sont représentés sur la Figure 6.3-a. On observe une discontinuité nette des déplacements et la symétrie sphérique des champs.

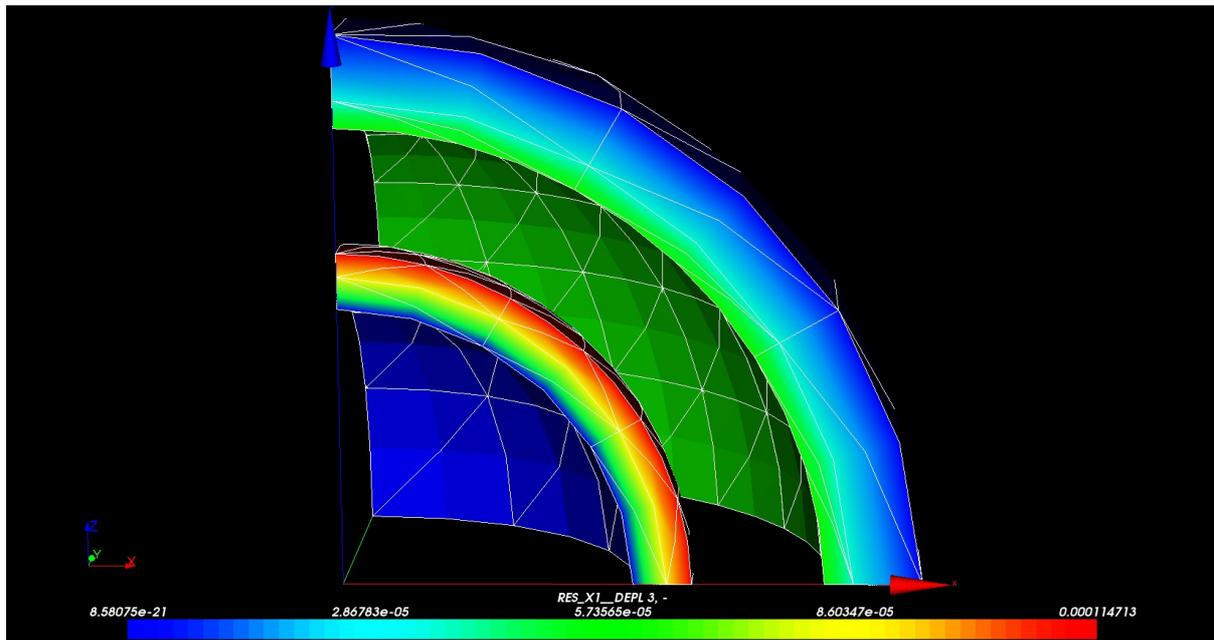


Figure 6.3-a : Champ de déplacement radial

Avec le même nombre de mailles que dans la modélisation précédente, on obtient des résultats nettement plus précis (on gagne un facteur 10 en précision sur les déplacements). Ces deux modélisations illustrent encore une fois l'apport considérable des éléments quadratiques par rapport aux éléments linéaires. Les résultats obtenus dans cette dernière modélisation sont tout à fait satisfaisants, surtout au regard du faible nombre de mailles utilisées et de la courbure de la Isn.

7 Conclusion

Les 4 modélisations valident l'utilisation des facettes de contact issues des sous éléments d'intégration XFEM pour l'application d'efforts mécaniques de pression (pression normale et cisaillement en 2D et pression normale en 3D) sur les lèvres d'une fissure non maillée. Elles illustrent également le gain de précision obtenu avec des éléments quadratiques par rapport à des éléments linéaires.