

## SSNV138 - Plaque Cantilever en grandes rotations soumise à un moment

---

### Résumé :

Calcul quasi-statique d'une plaque élastique encastree sur un côté et soumise à un moment de flexion à l'autre côté, conduisant à de grandes rotations de la plaque.

### Intérêt :

Tester les éléments finis non linéaires géométriques `COQUE_3D` (modélisations A et C), `DKT` (modélisations E et F), `DKTG` (modélisations G et H) et `POU_D_T_GD` (modélisation B) utilisant l'algorithme de mise à jour des grandes rotations `3D GROT_GDEP` dans `STAT_NON_LINE`.

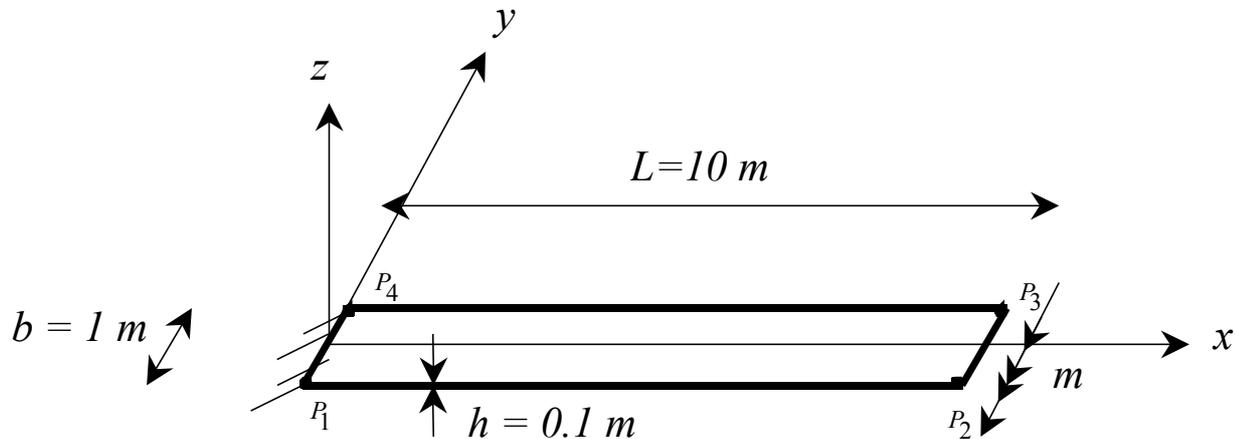
Comparer aussi les résultats à l'élément fini de poutre multi-fibres `POU_D_TGM` qui permet de traiter les grandes rotations sous l'hypothèse de petits incréments de chargement.

### Remarque :

*Ce test est la version plaque du cas test de poutre `SSNL103`. Les caractéristiques mécaniques ont été modifiées de façon à supporter une modélisation surfacique.*

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Plaque rectangulaire encastée en  $P_1P_4$  et  $P_1P_4$  soumise en  $P_2P_3$  à un couple linéique :

$$m = -me_y ; m > 0$$

### 1.2 Propriétés de matériaux et caractéristiques de section

Comportement élastique :

$$E = 12 \times 10^6 \text{ Pa} ; \nu = 0$$

Le fait que le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) soit nul rend la solution de plaque identique à celle de poutre.

$I_y$  est l'inertie de la section avec un modèle de poutre :

$$I_y = \frac{b h^3}{12} = \frac{1}{12} \times 10^{-3}$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargement

Encastrement en  $P_1P_4$ . On cherche les états successifs d'équilibre sous le chargement constitué du couple linéique en  $P_2P_3$  :

$$m(t) = 100 t ; t \text{ pseudo-temps.}$$

On s'intéresse particulièrement aux déplacements horizontal et vertical et à la rotation de la ligne  $P_2P_3$ .

## 2 Solution de référence

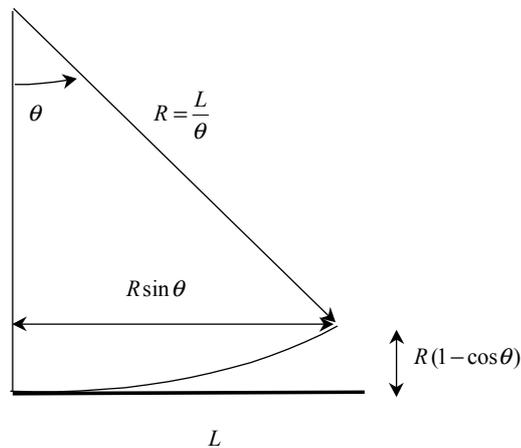
### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Avec une cinématique de poutre et un modèle en efforts résultants, la courbure (en grandes rotations) du cantilever soumis au moment de flexion  $M = mb$  est, avec les données numériques précédentes :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{mb}{EI_y} = \frac{t}{L}$$

C'est la solution d'Euler.

### 2.2 Résultats de référence



Suivant la solution d'Euler, la déformée est un arc de cercle. A la section  $P_2 P_3$  ( $x=L$ ), la rotation vaut :

$$\theta(x=L) = t.$$

En l'absence d'effort normal, la surface moyenne reste inextensible et le rayon de courbure est donné par :

$$R = \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^{-1} = \frac{L}{t}$$

Le déplacement horizontal est alors

$$u = R \sin \theta - L = L \left( \frac{\sin t}{t} - 1 \right)$$

et le déplacement vertical est

$$v = R(1 - \cos \theta) = \frac{L}{t}(1 - \cos t)$$

## 2.3 Références bibliographiques

- [1] M. AL MIKDAD : Statique et Dynamique des Poutres en Grandes Rotations et Résolution des Problèmes d'Instabilité Non Linéaire. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne (1998).
- [2] J.C. SIMO and L. VU QUOC : A Three-dimensional Finite Strain Rod Model. Part II : Computational Aspects. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 58, 79-116 (1986).
- [3] J.C. SIMO, D.D. FOX and M.S. RIFAI : On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part III : Computational Aspects of the Nonlinear Theory. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 79, 21-70 (1990).

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation COQUE\_3D

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 54  
Nombre de mailles et type : 10 QUAD9 et 1 SEG3

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

L'analyse incrémentale est réalisée dans l'intervalle de pseudo-temps [0 : 2.4] en quatorze pas de charge.

#### 3.3.1 Histoire de la rotation horizontale DRY aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Référence DRY (radians)	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.6000E+00	1.
1.2	120	'ANALYTIQUE'	-1.2000E+00	0.1
1.8	180	'ANALYTIQUE'	-1.8000E+00	1.
2.4	240	'ANALYTIQUE'	-2.4000E+00	0.1

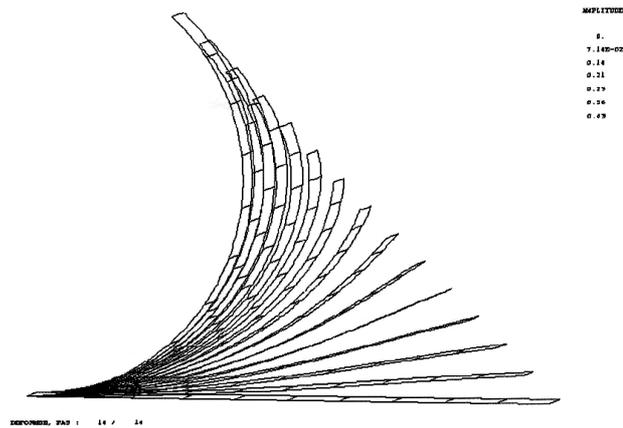
#### 3.3.2 Histoire du déplacement horizontal DX aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-5.8929E-01	0.1
1.2	120	'ANALYTIQUE'	-2.23300E+00	0.1
1.8	180	'ANALYTIQUE'	-4.58973E+00	0.1
2.4	240	'ANALYTIQUE'	-7.18557E+00	0.1

#### 3.3.3 Histoire du déplacement vertical DZ aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	2.91107E+00	0.1
1.2	120	'ANALYTIQUE'	5.31368E+00	0.1
1.8	180	'ANALYTIQUE'	6.81778E+00	0.1
2.4	240	'ANALYTIQUE'	7.23914E+00	0.1

Nous présentons ci-après une visualisation de la déformée au cours des 14 pas de charge :



### 3.3.4 Remarques

On utilise  $\text{COEF\_RIGI\_DRZ} = 0.001$ . La valeur de l'angle de rotation atteinte est de 135 degrés.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

POU\_D\_T\_GD (poutre 3D en grandes rotations).

modélisation POU\_D\_T\_GD.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11

Nombre de mailles et type : 10 SEG2

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

L'analyse incrémentale est réalisée dans l'intervalle de pseudo-temps [0 : 6] en 60 pas de charge.

#### 4.3.1 Histoire de la rotation horizontale DRY (radians) aux nœuds chargés

Instant	Moment $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.3	30.	'ANALYTIQUE'	-0.3000E+00	0.1
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.6000E+00	0.1
1.0	100.	'ANALYTIQUE'	-1.0000E+00	0.1
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	-3.0000E+00	0.1
6	600	'ANALYTIQUE'	-6.0000E+00	0.1

#### 4.3.2 Histoire du déplacement horizontal DX(m) aux nœuds chargés

Instant	Moment $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.3	30.	'ANALYTIQUE'	-1.4932E-01	0.3
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-5.8934E+01	0.3
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	-9.5296	0.3
6	600	'ANALYTIQUE'	-10.4657	0.3

#### 4.3.3 Histoire du déplacement vertical DZ(m) aux nœuds chargés

Instant	Moment $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.3	30.	'ANALYTIQUE'	1.4887E+00	0.1
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	2.9110E+00	0.1
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	6.6333	0.5
6	600	'ANALYTIQUE'	6.638286E-02	2.0

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation COQUE\_3D

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 64

Nombre de mailles et type : 20 TRIA7 et 1 SEG3

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

L'analyse incrémentale est réalisée dans l'intervalle de pseudo-temps [0 : 2.2] en huit pas de charge.

#### 5.3.1 Histoire de la rotation horizontale DRY aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.6	60	'ANALYTIQUE'	-0.6000E+00	1.0
1.2	120	'ANALYTIQUE'	-1.2000E+00	1.0
1.8	180	'ANALYTIQUE'	-1.8000E+00	1.0
2.2	220	'ANALYTIQUE'	-2.1728E+00	2.0

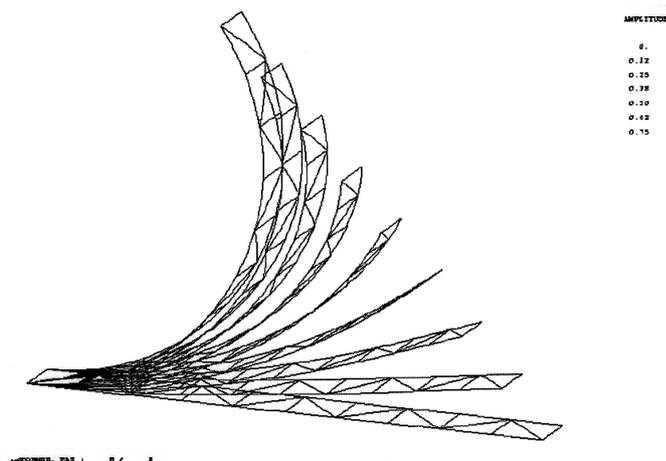
#### 5.3.2 Histoire du déplacement horizontal DX aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.6	60	'ANALYTIQUE'	-5.8929E-01	0.5
1.2	120	'ANALYTIQUE'	-2.23300E+00	1.0
1.8	180	'ANALYTIQUE'	-4.58973E+00	2.0
2.2	220	'ANALYTIQUE'	-6,3250163463	2.0

#### 5.3.3 Histoire du déplacement vertical DZ aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.6	60	'ANALYTIQUE'	2.91107E+00	0.1
1.2	120	'ANALYTIQUE'	5.31368E+00	0.5
1.8	180	'ANALYTIQUE'	6.81778E+00	0.5
2.2	220	'ANALYTIQUE'	7,22046E+00	1.0

Nous présentons ci-après une visualisation de la déformée au cours des 8 pas de charge :



## 5.3.4 Remarques

On utilise  $\text{COEF\_RIGI\_DRZ} = 0.001$ . La valeur de l'angle de rotation atteinte est de 125 degrés.

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

POU\_D\_TGM (poutre 3D multi-fibres pour l'analyse non linéaire géométrique et matériau).

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11  
Nombre de mailles et type : 10 SEG2

### 6.3 Caractéristiques du maillage de la section transverse

Nombre de fibres : 160 (40 dans l'épaisseur et 4 dans la largeur)  
Nombre de mailles et type : 160 QUAD4

### 6.4 Grandeurs testées et résultats

L'analyse incrémentale est réalisée dans l'intervalle de pseudo-temps [0 : 6] en 1200 pas de charge.

#### 6.4.1 Histoire de la rotation horizontale DRY (radians) aux nœuds chargés

Instant	Moment $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.3	30.	'ANALYTIQUE'	-0.3000E+00	0.1
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.6000E+00	0.1
1.0	100.	'ANALYTIQUE'	-1.0000E+00	0.1
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	-3.0000E+00	0.1
6	600	'ANALYTIQUE'	-6.0000E+00	0.1

#### 6.4.2 Histoire du déplacement horizontal DX(m) aux nœuds chargés

Instant	Moment $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.3	30.	'ANALYTIQUE'	-1.4932E-01	2.0
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-5.8934E-01	1.0
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	-9.5296	0.3
6	600	'ANALYTIQUE'	-10.4657	0.3

#### 6.4.3 Histoire du déplacement vertical DZ(m) aux nœuds chargés

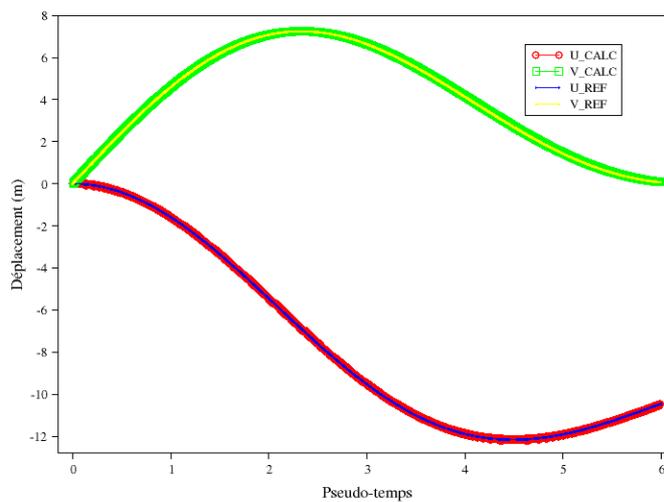
Instant	Moment $m$	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
0.3	30.	'ANALYTIQUE'	1.4887E+00	0.1
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	2.9110E+00	0.1
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	6.6333	0.5
6	600	'ANALYTIQUE'	6.638286E-02	0.07

Au dernier pas de temps, le déplacements vertical est très faible par rapport au maximal atteint lors du trajet de chargement ( DZ maximum autour de 7 m ). Une comparaison à la solution de référence en relatif n'est pas très pertinent (on aurait alors presque 30% d'erreur relative). On préfèrerait un test en

relatif par rapport au déplacement maximal :  $\frac{\text{valeur calculée} - \text{valeur de référence}}{DZ_{max}} < tol^{relative}$ .

Pour ce faire, on teste en absolu, avec une tolérance en absolu valant  $DZ_{max} \cdot tol^{relative}$ .

Déplacements U et V en fonction du pseudo-temps



## 7 Modélisation E

---

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est identique à la modélisation D. La seule différence se situe au niveau de la gestion du pas de temps.

Gestion du sous-découpage du pas de temps par event-driven : Si à convergence, l'incrément de déplacement est tel que  $\max(DX, DY) > 5.e-2$  sur un nœud du maillage, alors on re-découpe le pas de temps.

### 7.2 Grandeurs testées et résultats

On teste les mêmes valeurs que celles de la modélisation D, avec les mêmes tolérances.

## 8 Modélisation F

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DKT

### 8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22

Nombre de mailles et type : 10 QUAD4 et 22 SEG2

### 8.3 Grandeurs testées et résultats

L'analyse incrémentale est réalisée dans l'intervalle de pseudo-temps [0 :5.3] en [37] pas de charge.

#### 8.3.1 Histoire de la rotation horizontale DRY aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Valeur de référence (Radian)	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.6	0.01
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	-1.2	0.01
1.8	180.	'ANALYTIQUE'	-1.8	0.01
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	-3.0	0.01
4.0	400.	'ANALYTIQUE'	-4.0	0.01
5.3	530.	'ANALYTIQUE'	-5.3	0.01

#### 8.3.2 Histoire du déplacement horizontal DX aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Valeur de référence $m$	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.14932644	2.0
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	-2.23300762	2.0
1.8	180.	'ANALYTIQUE'	-4.58973538	1.0
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	-9.52959997	0.5
4.0	400.	'ANALYTIQUE'	-11.89200624	0.1
5.3	530.	'ANALYTIQUE'	-11.57031593	0.5

#### 8.3.3 Histoire du déplacement vertical DZ aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Valeur de référence $m$	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	2.91107308	1,
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	5.31368538	0.8
1.8	180.	'ANALYTIQUE'	6.81778941	0.5
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	6.63330832	0.2
4.0	400.	'ANALYTIQUE'	4.13410905	1.0
5.3	530.	'ANALYTIQUE'	0.84080314	1.5

## 8.3.4 Remarques

On utilise `COEF_RIGI_DRZ = 0.001`. La valeur de l'angle de rotation atteinte est de 304. degrés.

## 9 Modélisation G

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DKT

### 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22  
Nombre de mailles et type : 20 TRIA3 et 22 SEG2

### 9.3 Grandeurs testées et résultats

L'analyse incrémentale est réalisée dans l'intervalle de pseudo-temps [0 : 5.0] en [80] pas de charge.

#### 9.3.1 Histoire de la rotation horizontale DRY aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Valeur de référence (radians)	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.6	0.01
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	-1.2	0.01
1.8	180.	'ANALYTIQUE'	-1.8	0.01
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	-3.0	0.01
4.0	400.	'ANALYTIQUE'	-4.0	0.01
5.0	500.	'ANALYTIQUE'	-5.0	0.01

#### 9.3.2 Histoire du déplacement horizontal DX aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Valeur de référence $m$	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.14932644	0.25
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	-2.23300762	0.25
1.8	180.	'ANALYTIQUE'	-4.58973538	0.5
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	-9.52959997	0.1
4.0	400.	'ANALYTIQUE'	-11.89200624	0.15
5.0	500.	'ANALYTIQUE'	-11.91784855	0.1

#### 9.3.3 Histoire du déplacement vertical DZ aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Valeur de référence $m$	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	2.91107308	0.25
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	5.31368538	0.25
1.8	180.	'ANALYTIQUE'	6.81778941	0.25
3.0	300.	'ANALYTIQUE'	6.63330832	0.25
4.0	400.	'ANALYTIQUE'	4.13410905	0.5
5.0	500.	'ANALYTIQUE'	1.43267563	0.8

## 9.3.4 Remarques

On utilise `COEF_RIGI_DRZ = 0.001`. La valeur de l'angle de rotation atteinte est de 286. degrés.

## 10 Modélisation H

### 10.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DKTG

### 10.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22

Nombre de mailles et type : 10 QUAD4 et 22 SEG2

### 10.3 Grandeurs testées et résultats

L'analyse incrémentale est réalisée dans l'intervalle de pseudo-temps [0 : 1.4] en [6] pas de charge.

#### 10.3.1 Histoire de la rotation horizontale DRY aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Valeur de référence (radians)	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.6	0.01
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	-1.2	0.01
1.4	140.	'ANALYTIQUE'	-1.5	0.01

#### 10.3.2 Histoire du déplacement horizontal DX aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Valeur de référence $m$	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.14932644	2.0
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	-2.23300762	1.5
1.4	140.	'ANALYTIQUE'	-2.96107336	1.0

##### 10.3.2.1 Histoire du déplacement vertical DZ aux nœuds chargés

Instant	Couple $m$	Type de Référence	Valeur de référence $m$	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	2.91107308	1.0
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	5.31368538	1.0
1.4	140.	'ANALYTIQUE'	5.92880612	1.0

#### 10.3.3 Remarques

On utilise COEF\_RIGI\_DRZ = 0.001. La valeur de l'angle de rotation atteinte est de 80. degrés.

## 11 Modélisation I

### 11.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DKTG

### 11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 222

Nombre de mailles et type : 20 TRIA3 et 22 SEG2

### 11.3 Grandeurs testées et résultats

L'analyse incrémentale est réalisée dans l'intervalle de pseudo-temps [0 : 1.5] en [10] pas de charge.

#### 11.3.1.1 Histoire de la rotation horizontale DRY aux nœuds chargés

Instant	Couple <i>m</i>	Type de Référence	Valeur de référence (radians)	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.6	0.01
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	-1.2	0.01
1.4	140.	'ANALYTIQUE'	-1.5	0.01

#### 11.3.1.2 Histoire du déplacement horizontal DX aux nœuds chargés

Instant	Couple <i>m</i>	Type de Référence	Valeur de référence <i>m</i>	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	-0.14932644	0.5
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	-2.23300762	0.25
1.4	140.	'ANALYTIQUE'	-2.96107336	0.25

#### 11.3.1.3 Histoire du déplacement vertical DZ aux nœuds chargés

Instant	Couple <i>m</i>	Type de Référence	Valeur de référence <i>m</i>	Tolérance (%)
0.6	60.	'ANALYTIQUE'	2.91107308	0.5
1.2	120.	'ANALYTIQUE'	5.31368538	0.5
1.4	140.	'ANALYTIQUE'	5.92880612	0.5

### 11.3.2 Remarques

On utilise COEF\_RIGI\_DRZ = 0.001. La valeur de l'angle de rotation atteinte est de 86. degrés.

## 12 Synthèse des résultats

---

- **Modélisations COQUE\_3D, POU\_D\_T\_GD et POU\_D\_TGM**

On remarque des difficultés de convergence qui disparaissent en multipliant l'épaisseur par 3 ou 4.

Il est nécessaire d'augmenter la valeur du `COEF_RIGI_DRZ` qui attribue une rigidité autour de la normale des éléments de coque qui vaut par défaut  $10^{-5}$  (la plus petite rigidité de flexion autour des directions dans le plan de la coque) de façon à pouvoir augmenter la valeur de l'angle de rotation que l'on peut atteindre. Des valeurs de ce coefficient jusqu'à  $10^{-3}$  restent licites.

Durant les itérations de Newton, des déformations de membrane apparaissent et s'annulent à convergence.

Les vitesses de convergence des algorithmes de NEWTON sont comparables pour les modélisations `POU_D_T_GD` et `COQUE_3D`.

La vitesse de convergence de l'algorithme de NEWTON dans le cas de la modélisation `POU_D_TGM` est beaucoup plus faible que les deux autres car cette modélisation nécessite dans ce cas de faire de très petits incréments de chargement pour bien décrire la transformation géométrique et rester dans l'hypothèse des petites déformations. Le coût en temps CPU s'en ressent puisque le calcul est près de 10 fois plus long que celui de la modélisation `POU_D_T_GD`. Bien entendu l'élément multi-fibres présente l'avantage de pouvoir traiter plusieurs types de comportement et pas seulement un comportement élastique comme l'élément `POU_D_T_GD`. Si la précision nécessaire n'est pas de l'ordre de 1%, on peut se permettre d'utiliser moins de pas de temps.

Par ailleurs il est important pour un problème comme celui-ci, où l'inertie de la section joue un rôle prépondérant, de veiller à discrétiser la section avec suffisamment de fibres lorsque l'on utilise `POU_D_TGM`, pour obtenir l'inertie la plus proche possible de la valeur théorique (c'est pourquoi on a maillé avec près de 40 fibres dans l'épaisseur).

- **Modélisations DKT et DKTG**

La modélisation `DKT` permet d'atteindre un grand angle de rotation  $300^\circ$ , plus important que celui obtenu avec la modélisation `DKTG`  $86^\circ$ .

Par rapport à la solution analytique, l'écart maximum en déplacement est de 2% pour la modélisations `DKT` et `DKTG`