

SSNP109 - Câble de précontrainte excentré dans une poutre droite en béton

Résumé

On considère une poutre droite en béton, de section rectangulaire, traversée sur sa longueur par un câble de précontrainte en acier. Le câble est droit, parallèle à la fibre moyenne de la poutre, et passe à mi-hauteur de la section de la poutre, en étant excentré par rapport au plan moyen. La section gauche de la poutre et l'extrémité gauche du câble sont fixes. Le câble est mis en traction à son extrémité droite, afin de précontraindre la poutre en flexion-compression. Les pertes de tension le long du câble sont négligées.

Le but de ce cas-test est de valider la méthode de calcul de l'état d'équilibre d'une structure de béton précontrainte par comparaison à une solution de référence analytique.

1 Problème de référence

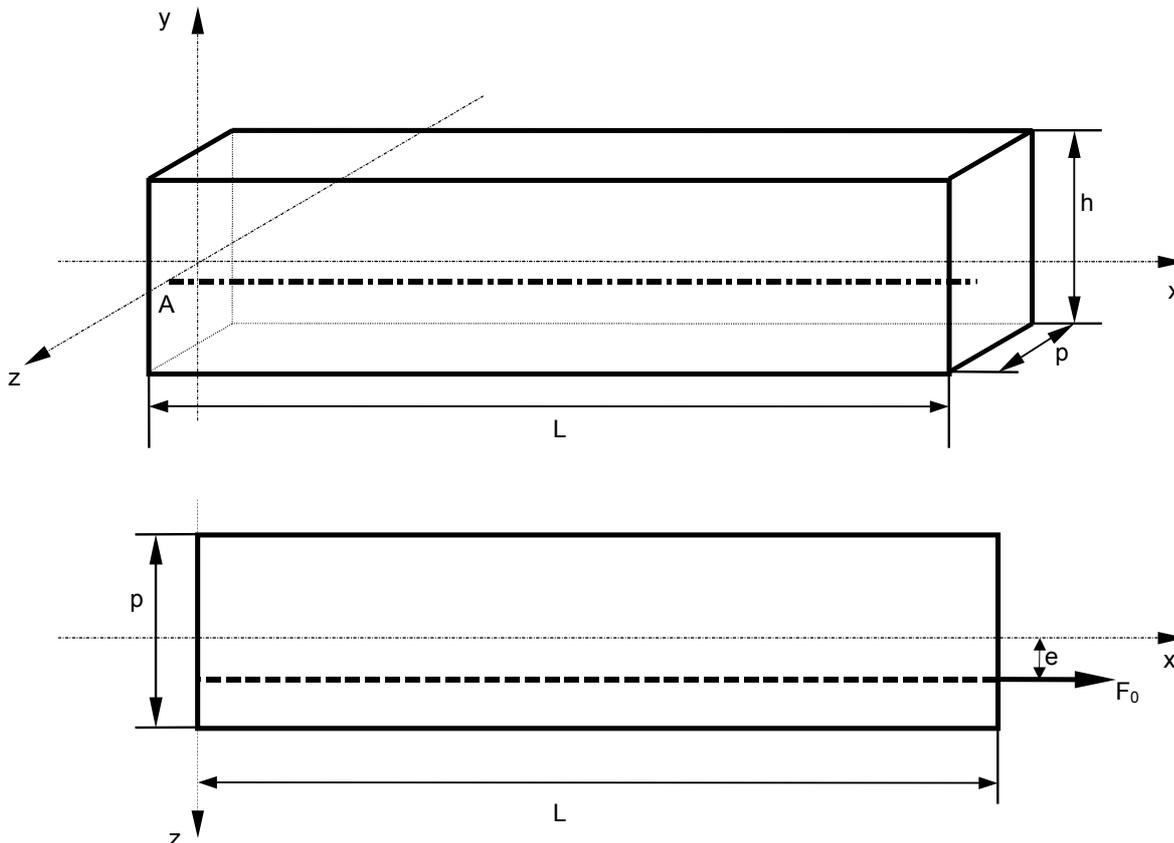
1.1 Géométrie

La poutre en béton est droite, de section rectangulaire.

Ses dimensions sont : $L \times h \times p = 10\text{ m} \times 0,4\text{ m} \times 0,2\text{ m}$ ($y = h/2$).

Le câble traverse la poutre parallèle à la fibre moyenne de la poutre, à mi-hauteur. Son excentricité par rapport au plan moyen est $e = 0,05\text{ m}$ ($z = e$).

L'aire de la section droite du câble vaut $S_a = 1,5 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2$.



1.2 Propriétés des matériaux

Matériau béton constituant la poutre : Module d'Young $E_b = 3 \cdot 10^{10}\text{ Pa}$

Matériau acier constituant le câble : Module d'Young $E_a = 2,1 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$

Le coefficient de Poisson est pris égal à 0 pour les deux matériaux. On annule donc les effets de Poisson dans les directions y et z . Les déplacements n'ont de composantes que dans le plan (x, z) .

Les pertes de tension dans le câble étant négligées, les divers paramètres servant à leur estimation sont fixés à 0.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le point A situé en bas du bord gauche de la poutre, de coordonnées $(0 ; -h/2 ; 0)$, est bloqué en translation suivant les trois directions et en rotation autour de l'axe y .

Le blocage du degré de liberté de rotation *DRY* implique une pente nulle de la déformée de la fibre moyenne en $x=0$.

L'extrémité gauche du câble, de coordonnées $(0 ; 0 ; e)$, est bloquée en translation suivant les trois directions.

On applique à l'extrémité droite du câble, de coordonnées $(L ; 0 ; e)$, un effort normal de traction $(F_0 ; 0 ; 0)$ où $F_0 = 2.10^5 N$.

2 Solution de référence

La solution analytique de référence est déterminée par la théorie des poutres.

On considère une poutre encastree-libre. Les caractéristiques géométriques sont celles définies en paragraphe [§2.1]. Le câble précontraint applique à l'extrémité libre un effort normal de compression $(-F ; 0 ; 0)$ et un moment fléchissant $(0 ; -eF ; 0)$.

La solution de ce problème est la suivante :

$$\text{Tenseur des contraintes : } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \sigma_{xx} = -\frac{F}{hp} \left(1 + \frac{12ez}{p^2} \right)$$

$$\text{Déplacements : } \begin{cases} u(x, y, z) = -\frac{F}{E_b hp} \left(1 + \frac{12ez}{p^2} \right) x \\ v(x, y, z) = \frac{v_b F}{E_b hp} \left(1 + \frac{12ez}{p^2} \right) \left(y + \frac{h}{2} \right) \\ w(x, y, z) = \frac{F}{E_b hp} \left(v_b z + \frac{6e}{p^2} \left(x^2 - v_b \left(\left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) - z^2 \right) \right) \right) \end{cases}$$

$$\text{avec les conditions aux limites : } \begin{cases} u = v = w = 0 \\ \theta_y = 0 \end{cases} \text{ en } x = 0, y = -\frac{h}{2}, z = 0$$

Lorsque les effets de Poisson sont négligés ($v_b = 0$), la solution en déplacements se simplifie comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -\frac{F}{E_b hp} \left(1 + \frac{12ez}{p^2} \right) x \\ v(x, y, z) = 0 \\ w(x, y, z) = \frac{F}{E_b hp} \times \frac{6ex^2}{p^2} \end{cases}$$

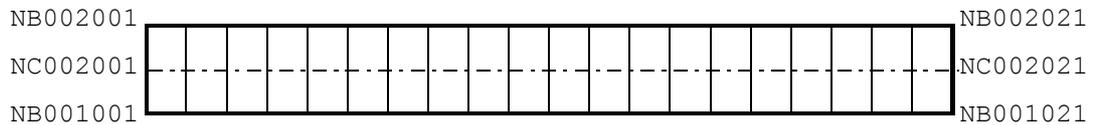
Les valeurs numériques de référence sont calculées à l'aide des expressions analytiques ci-dessus, en utilisant pour F la valeur à l'équilibre d'ensemble de l'effort normal dans le câble :

$$F = -F_0 \frac{E_b hp}{E_b hp + E_a S_a \left[1 + \frac{12e^2}{p^2} \right]}$$

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La figure ci-dessous donne une représentation simplifiée du maillage de la poutre.



La poutre en béton est représentée par 20 éléments de type `DKT`, supportés par autant de mailles quadrangles à 4 nœuds.

Une épaisseur $p=0,2m$ leur est affectée, ainsi qu'un matériau béton pour lequel sont définis les comportements `ELAS` (module d'Young $E_b=3.10^{10}Pa$) et `BPEL_BETON`: les paramètres caractéristiques de cette relation sont fixés à 0 car on néglige les pertes de tension le long du câble de précontrainte.

Les degrés de liberté DX , DY , DZ et DRY du nœud `NB001001` sont bloqués.

Le câble est représenté par 20 éléments `MECA_BARRE`, supportés par autant de mailles segments à 2 nœuds. Les extrémités gauche et droite sont respectivement les nœuds `NC001001` et `NC001021`.

Une aire de section droite $S_a=1,5.10^{-4}m^2$ est affectée aux éléments, ainsi qu'un matériau acier pour lequel sont définis les comportements `ELAS` (module d'Young $E_a=2,1.10^{11}Pa$) et `BPEL_ACIER`: les paramètres caractéristiques de cette relation sont fixés à 0 (pertes de tension négligées), à l'exception de la contrainte limite élastique pour laquelle la valeur de $f_{prg}=1,77.10^9Pa$ est choisie.

Les degrés de liberté DX , DY , et DZ du nœud `NC001001` sont bloqués.

La tension $F_0=2.10^5N$ est appliquée au nœud `NC001021`. Cette valeur de tension est cohérente avec les valeurs de section et de limite élastique, pour un câble de précontrainte de type toron.

Le calcul de l'état d'équilibre de l'ensemble poutre et câble est effectué en un seul pas, le comportement étant élastique. On réalise ensuite deux calculs complémentaires permettant de déterminer les contraintes en peaux inférieure et supérieure ($z=\pm p/2$) de la poutre.

3.2 Etapes de calcul et fonctionnalités testées

Les principales étapes de calcul correspondent aux fonctionnalités que l'on souhaite valider :

- opérateur `DEFI_MATERIAU`: définition des relations de comportement `BPEL_BETON` et `BPEL_ACIER`, dans le cas particulier où les pertes de tension le long du câble de précontrainte sont négligées (valeurs par défaut des paramètres) ;
- opérateur `DEFI_CABLE_BP`: détermination d'un profil de tension constant le long du câble de précontrainte, les pertes étant négligées; calcul des coefficients des relations cinématiques entre les degrés de liberté des nœuds du câble et les degrés de liberté des nœuds «voisins» de la poutre en béton, dans le cas d'un câble excentré ;
- opérateur `AFFE_CHAR_MECA`: définition d'un chargement de type `RELA_CINE_BP` ;
- opérateur `STAT_NON_LINE`, option `COMPORTEMENT`: calcul de l'état d'équilibre en tenant compte du chargement de type `RELA_CINE_BP`.

On utilise enfin l'opérateur `CALC_CHAMP` option `SIGM_ELNO` afin de calculer les contraintes en peau inférieure puis en peau supérieure de la poutre.

3.3 Grandeurs testées et résultats

La valeur à l'équilibre de l'effort normal dans le câble est $F = 1,95509 \cdot 10^5 \text{ N}$. Cette valeur est utilisée pour calculer les résultats numériques de référence à l'aide des expressions analytiques explicitées en paragraphe [§3].

3.3.1 Déplacements des nœuds de la pièce de béton

On compare les valeurs extraites du champ DEPL issu de STAT_NON_LINE aux valeurs théoriques de référence correspondant au plan $Z=0$.

La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 0,1 %.

Nœud	Composante	Valeur de référence	Valeur calculée	Ecart relatif
NB001006	DX	$-2,036552 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$-2,0365561834835 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB002006	DX	$-2,036552 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$-2,0365561835042 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB001011	DX	$-4,073104 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$-4,0731123669671 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB002011	DX	$-4,073104 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$-4,0731123670073 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB001016	DX	$-6,109656 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$-6,1096685504506 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB002016	DX	$-6,109656 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$-6,1096685505104 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB001021	DX	$-8,146208 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$-8,1462247339343 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB002021	DX	$-8,146208 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$-8,1462247340137 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
<hr/>				
NB001006	DZ	$3,818535 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$3,8185428440476 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB002006	DZ	$3,818535 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$3,8185428440475 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB001011	DZ	$1,527414 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$1,5274171376197 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB002011	DZ	$1,527414 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$1,5274171376197 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB001016	DZ	$3,436682 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$3,4366885596448 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$1,91 \cdot 10^{-6} \%$
NB002016	DZ	$3,436682 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$3,4366885596448 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$1,91 \cdot 10^{-6} \%$
NB001021	DZ	$6,109656 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$6,1096695504804 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$
NB002021	DZ	$6,109656 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$6,1096695504804 \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$2,05 \cdot 10^{-6} \%$

3.3.2 Densité linéique d'effort normal sur le plan moyen de la pièce de béton (analyse avec le modèle de plaque)

On compare les valeurs extraites du champ SIEF_ELNO issu de STAT_NON_LINE aux valeurs théoriques de référence.

La composante sur laquelle portent les tests est N_{XX} ($N_{XX} = s_{xx} P$).

La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 0,1 %.

Nœud	Maille	Valeur de référence	Valeur calculée	Ecart relatif
NB001001	QD001001	$-4,887725 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$-4,8877348399136 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$2,01 \cdot 10^{-6} \%$
NB002001	QD001001	$-4,887725 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$-4,8877348399728 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$2,01 \cdot 10^{-6} \%$
NB001011	QD001011	$-4,887725 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$-4,8877348402090 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$2,01 \cdot 10^{-6} \%$
NB002011	QD001011	$-4,887725 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$-4,8877348402511 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$2,01 \cdot 10^{-6} \%$
NB001021	QD001020	$-4,887725 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$-4,8877348403607 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$2,01 \cdot 10^{-6} \%$
NB002021	QD001020	$-4,887725 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$-4,8877348404039 \cdot 10^5 \text{ N/m}$	$2,01 \cdot 10^{-6} \%$

3.3.3 Contrainte normale sur la peau inférieure (z = -0.1 m) de la pièce de béton

On compare les valeurs extraites du champ SIGM_ELNO issu de CALC_CHAMP aux valeurs théoriques de référence.

La composante sur laquelle portent les tests est SIXX.

La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 0,1 %.

Nœud	Maille	Valeur de référence	Valeur calculée	Ecart relatif
NB001001	QD001001	1,221931.10 ⁶ Pa	1,2219337100849.10 ⁶ Pa	2,22.10 ⁻⁶ %
NB002001	QD001001	1,221931.10 ⁶ Pa	1,2219337101082.10 ⁶ Pa	2,22.10 ⁻⁶ %
NB001011	QD001011	1,221931.10 ⁶ Pa	1,2219337101212.10 ⁶ Pa	2,22.10 ⁻⁶ %
NB002011	QD001011	1,221931.10 ⁶ Pa	1,2219337100924.10 ⁶ Pa	2,22.10 ⁻⁶ %
NB001021	QD001020	1,221931.10 ⁶ Pa	1,2219337100302.10 ⁶ Pa	2,22.10 ⁻⁶ %
NB002021	QD001020	1,221931.10 ⁶ Pa	1,2219337101559.10 ⁶ Pa	2,22.10 ⁻⁶ %

3.3.4 Contrainte normale sur la peau supérieure (z= 0.1 m) de la pièce de béton

On compare les valeurs extraites du champ SIGM_ELNO issu de CALC_CHAMP aux valeurs théoriques de référence.

La composante sur laquelle portent les tests est SIXX.

La tolérance d'écart relatif par rapport à la référence vaut 0,1 %.

Nœud	Maille	Valeur de référence	Valeur calculée	Ecart relatif
NB001001	QD001001	-6,109656.10 ⁶ Pa	-6,1096685504454.10 ⁶ Pa	2,05.10 ⁻⁶ %
NB002001	QD001001	-6,109656.10 ⁶ Pa	-6,1096685505156.10 ⁶ Pa	2,05.10 ⁻⁶ %
NB001011	QD001011	-6,109656.10 ⁶ Pa	-6,1096685504816.10 ⁶ Pa	2,05.10 ⁻⁶ %
NB002011	QD001011	-6,109656.10 ⁶ Pa	-6,1096685504999.10 ⁶ Pa	2,05.10 ⁻⁶ %
NB001021	QD001020	-6,109656.10 ⁶ Pa	-6,1096685503914.10 ⁶ Pa	2,05.10 ⁻⁶ %
NB002021	QD001020	-6,109656.10 ⁶ Pa	-6,1096685505642.10 ⁶ Pa	2,05.10 ⁻⁶ %

3.4 Remarques

Les valeurs calculées correspondent effectivement à celles théoriquement attendues. On obtient bien un état de flexion-compression pour la poutre en béton.

4 Synthèse

Les résultats obtenus sont validés par comparaison à une solution analytique de référence avec une très bonne précision.

Les fonctionnalités particulières testées sont les suivantes :

- opérateur `DEFI_MATERIAU` : définition des paramètres caractéristiques des matériaux acier et béton permettant le calcul de la tension le long du câble de précontrainte, suivant les règles du BPEL ;
- opérateur `DEFI_CABLE_BP` : calcul de la tension le long du câble et des coefficients des relations cinématiques entre les degrés de liberté des nœuds du câble et les degrés de liberté des nœuds «voisins» de la poutre en béton ;
- opérateur `AFFE_CHAR_MECA` : définition d'un chargement de type `RELA_CINE_BP` ;
- opérateur `STAT_NON_LINE`, option `COMPORTEMENT` : calcul de l'état d'équilibre en tenant compte du chargement de type `RELA_CINE_BP`.