

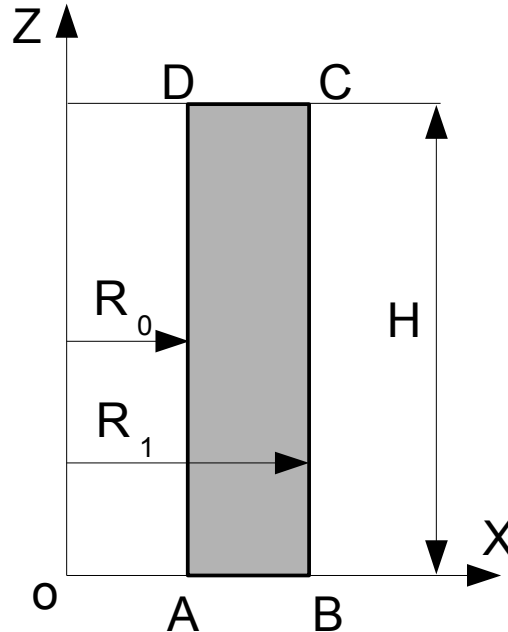
SSNA107 – Cylindre creux en viscoélasticité non linéaire

Résumé :

Ce cas-test permet de valider la loi de LEMAITRE implantée dans Code_Aster dans le cas de comportement viscoélastique non linéaire. Les résultats trouvés sont comparés à une solution analytique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Géométrie du cylindre (m) :

$$\begin{aligned} R_0 &= 1 \\ R_1 &= 1.02 \\ H &= 1 \end{aligned}$$

1.2 Propriétés du matériau

Elastique

- Module d'Young : $E = 1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$
- Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$

LEMAITRE

$$g(\sigma, \lambda, T) = \left(\frac{1}{K} \frac{\sigma}{\left(\frac{1}{\lambda^m} \right)} \right)^n \quad \text{avec } n=2 ; \frac{1}{K}=1 ; \frac{1}{m}=0$$

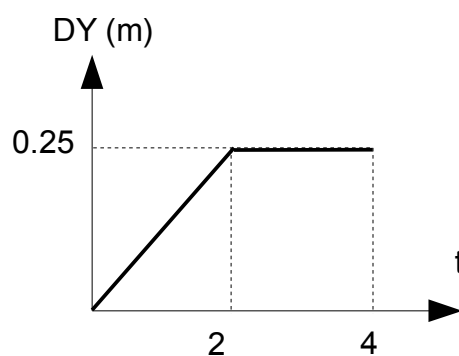
CIN1_CHAB

$$\begin{aligned} R_0 &= 0. \\ R_I &= 0. \\ B &= 0. \\ C_I &= 0. \\ K &= 0. \\ W &= 0. \\ G_0 &= 0. \\ A_I &= 0. \end{aligned}$$

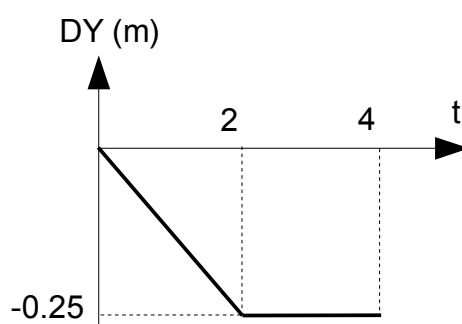
1.3 Conditions aux limites et chargements

Déplacement imposé (m) :

Coté CD



Coté AB



2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de références

L'ensemble de cette démonstration peut être lue avec plus de détails dans le document [1]

Le tenseur de contraintes s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Du fait du chargement, on a :

$$\begin{cases} \varepsilon_z - \varepsilon_{vz} = \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_{v\theta} = -\frac{\nu}{E} \sigma_z \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_v = \frac{3}{2} g(\sigma^*) \frac{\sigma^D}{\sigma^*} \\ \varepsilon_r - \varepsilon_{vr} = -\frac{\nu}{E} \sigma_z \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{vz} = g(\sigma_z) \\ \dot{\varepsilon}_{v\theta} = -\frac{1}{2} g(\sigma_z) \\ \dot{\varepsilon}_{vr} = -\frac{1}{2} g(\sigma_z) \end{cases}$$

Si $t \leq t_0$, on a $\varepsilon_z = \frac{\varepsilon_0}{t_0} t$,

$$\text{Soit } a = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{t_0}}$$

On obtient $\varepsilon_z = a^2 t$

En remplaçant, on trouve :

$$\dot{\varepsilon}_{vz} = g((a^2 t - \varepsilon_{vz}) E)$$

On pose $E=1$ et $z = a^2 t - \varepsilon_{vz}$, on obtient : $\dot{z} = a^2 - z^2$

En intégrant avec $z(0)=0$ on obtient :

$$z = a \tanh(at)$$

Pour $t \leq t_0$

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_\theta = 0 \\ \sigma_z = a \tanh(at) \\ \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = a \left[\left(\frac{1}{2} - \nu \right) \tanh(at) - \frac{1}{2} at \right] \\ \varepsilon_z = a^2 t \\ w = ar \left[\left(\frac{1}{2} - \nu \right) \tanh(at) - \frac{1}{2} at \right] \end{cases}$$

Si $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= a^2 t_0 \\ \dot{\varepsilon}_{vz} &= g(a^2 t_0 - \varepsilon_{vz}) = (a^2 t_0 - \varepsilon_{vz})^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne en intégrant :

$$\varepsilon_{vz} = a^2 t_0 - \frac{1}{\frac{1}{a \tanh(at_0)} + t - t_0}$$

On a donc au final

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_\theta = 0 \\ \sigma_z = \frac{1}{\frac{1}{a \tanh(at_0)} + t - t_0} \\ \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \frac{1}{\frac{1}{a \tanh(at_0)} + t - t_0} - \frac{1}{2} a^2 t_0 \\ \varepsilon_z = a^2 t_0 \\ w = r \left[\left(\frac{1}{2} - \nu \right) \frac{1}{\frac{1}{a \tanh(at_0)} + t - t_0} - \frac{1}{2} a^2 t_0 \right] \end{cases}$$

2.2 Grandeurs de référence

- Déplacement DX au nœud B
- Contraintes $SIXX$, $SIYY$ et $SIZZ$ au nœud B

2.3 Résultats de référence

Grandeur	Point	Instant	Référence
DX	B	4	-0.2109
$SIXX$	B	4	0.
$SIYY$	B	4	0.2616
$SIZZ$	B	4	0.

2.4 Incertitude sur la solution

Solution analytique

2.5 Références bibliographiques

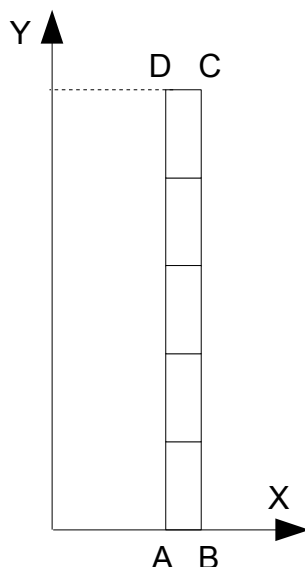
- [1] Ph. De BONNIERES, M. ZIDI : Introduction de la viscoplasticité dans le module de thermomécanique de Cyrano3 : Principe, description et validation, Note HI-71/8334.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation **AXIS**

Relation de comportement viscoélastique de **LEMAITRE**



3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds 12

Nombre de mailles 17 Soit :

SEG2 12

QUAD4 5

Groupes de nœuds :

A, B, C, D

Groupes de mailles :

MAIL : surface *ABCD*

DAB : segment *AB*

DBC : segment *BC*

DCD : segment *CD*

DDA : segment *DA*

3.3 Grandeurs testées et résultats

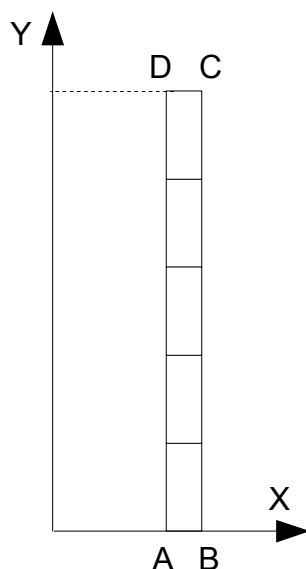
Grandeur	Point	Instants	Référence	Aster	Écart %
<i>DX</i>	<i>B</i>	4	-0.2109	-0.2109	0,001%
<i>SIXX</i>	<i>B</i>	4	0.	4,82E-9	-
<i>SIYY</i>	<i>B</i>	4	0.2616	0.2616	0,002%
<i>SIZZ</i>	<i>B</i>	4	0.	4,82E-9	-

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation B

Modélisation `AXIS`

Relation de comportement viscoélastique de `VISC_CIN1_CHAB`



4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds 12

Nombre de mailles 17 Soit :

SEG2 12

QUAD4 5

Groupes de nœuds :

A, B, C, D

Groupes de mailles :

MAIL : surface *ABCD*

DAB : segment *AB*

DBC : segment *BC*

DCD : segment *CD*

DDA : segment *DA*

4.3 Grandeurs testées et résultats

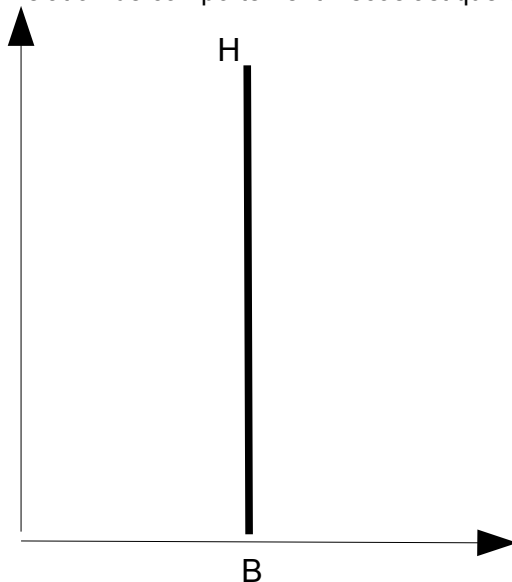
Grandeur	Point	Instants	Référence	Aster	Écart %
<i>DX</i>	<i>B</i>	4	-0.2109	-0.2109	0,026%
<i>SIXX</i>	<i>B</i>	4	0.	1,55E-10	-
<i>SIYY</i>	<i>B</i>	4	0.2616	0.2616	0,130%
<i>SIZZ</i>	<i>B</i>	4	0.	1,55E-10	-

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation COQUE_AXIS

Relation de comportement viscoélastique de LEMAITRE



5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds 5
Nombre de mailles 2 SEG3

Groupes de nœuds :
 B, H

5.3 Grandeurs testées et résultats

Grandeur	Point	Instants	Référence	Aster	Écart %
DX	B	4	-0.2109	-0.20877887227	0,0001%
$SIYY$	B	4	0.	2.1120599907551 E-10	4.61E-09
$SIXX$	B	4	0.2616	0.216441173872	0,13%
$SIZZ$	B	4	0.	4,82E-9	-

6 Synthèse des résultats

Les résultats calculés par Code_Aster sont en excellent accord avec les solutions analytiques.