

## SDNS01 - Modèle probabiliste non paramétrique - paramétrique d'une plaque en flexion avec non linéarités localisées de choc

---

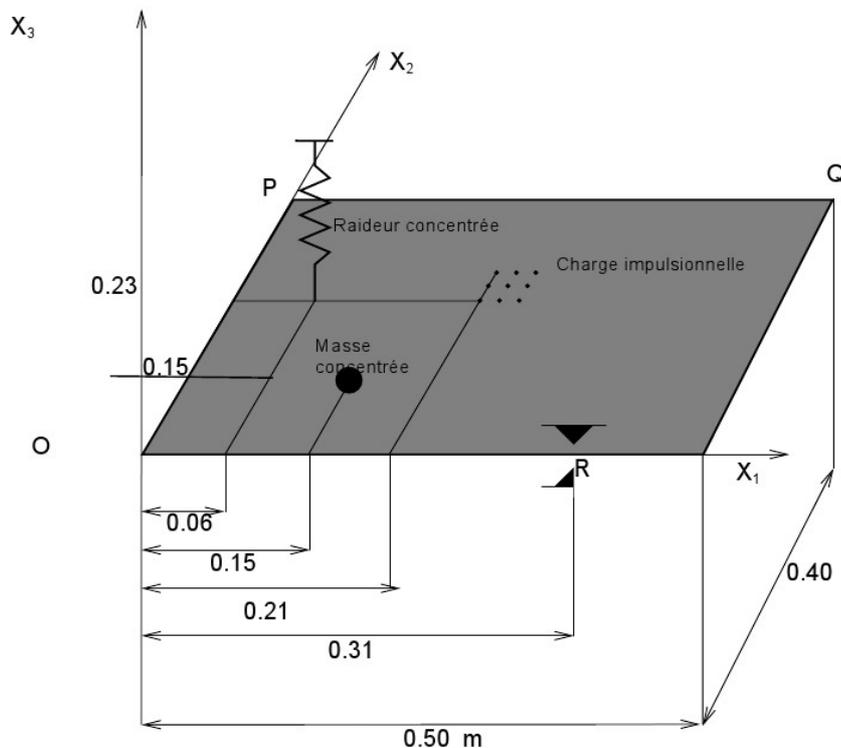
### Résumé :

Ce cas-test concerne les modèles probabilistes non paramétriques et paramétriques des incertitudes en dynamique linéaire avec éventuellement des non linéarités localisées. Le modèle mécanique utilisée est une plaque rectangulaire avec une butée élastique de choc. Les générateurs de matrices aléatoires et de variables aléatoires (opérateurs `GENE_MATR_ALEA` et `GENE_VARI_ALEA`) sont testés et validés dans ce cas test. Les post-traitements statistiques (`CALC_FONCTION`) sont également testés.

Ce cas-test possède deux modélisations. La première utilise un amortissement proportionnel. La deuxième utilise un amortissement réduit défini par le mot-clé `CALC_AMOR_GENE` de `COMB_MATR_ASSE` testant ainsi cette fonctionnalité.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Epaisseur de la plaque :  $e = 0.0004 \text{ m}$  .  
Jeu entre les butées :  $jeu = \pm 0.002 \text{ m}$  .

### 1.2 Propriétés de matériaux

Plaque :

Coefficient de Poisson : 0.3  
Module d'Young :  $2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$   
Masse volumique :  $7800 \text{ kg/m}^3$   
Raideur concentrée :  $2.388 \cdot 10^7 \text{ N/m}$   
Masse concentrée : 4 kg  
Raideur de choc :  $25000 \text{ N/m}$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

La plaque en flexion est en appui simple sur 3 bords et libre sur son quatrième bord OR . Les degrés de libertés bloqués sont donc:

- sur  $OP$  et  $QR$ , les déplacements selon  $X_1, X_2, X_3$  et les rotations selon  $X_1, X_3$  .
- sur  $PQ$  , les déplacements selon  $X_1, X_2, X_3$  et les rotations selon  $X_2, X_3$  .
- sur  $OR$  , les déplacements selon  $X_1, X_2$  .

La plaque est soumise à une charge impulsionnelle verticale  $e(t)$  sur 9 nœuds de la plaque selon la direction  $X_3$ . Le chargement  $e(t)$  est tel que, pour  $t < 0$  et  $t > 2t_1$ ,  $e(t) = 0$  et pour  $0 \leq t \leq 2t_1$  :

$$e(t) = (\Delta\omega(t-t_1))^{-1} (\sin((\Omega_c + \Delta\omega/2)(t-t_1)) - \sin((\Omega_c - \Delta\omega/2)(t-t_1))) .$$

avec  $t_1 = 2\pi/\Delta\omega$ ,  $\Delta\omega = 2\pi \times 40 \text{ rad/s}$ ,  $\Omega_c = 2\pi \times 20 \text{ rad/s}$ .

L'énergie de la fonction  $e(t)$  est principalement répartie dans la bande fréquentielle  $[0,60] \text{ Hz}$ , laquelle contient 8 modes élastiques du système dynamique linéarisé.

## 1.4 Conditions initiales

Le système dynamique est initialement au repos.

## 2 Solution de référence

---

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Nous étudions la réponse transitoire d'un système dynamique non linéaire soumis à une charge impulsionnelle déterministe due à un choc sur la structure. La non linéarité du système est due à une butée élastique de haute rigidité comportant un certain jeu. Les spectres de réponse en fréquence normalisés sont utilisés afin d'étudier la réponse transitoire de ce système. Les équations de la dynamique sont discrétisées par la méthode aux éléments finis. Le maillage de la structure est supposé suffisamment fin pour capter tous les phénomènes dynamiques de ce système mécanique en terme de champ de déplacement pour le chargement impulsionnel considéré. Les incertitudes aléatoires du système dynamique sont modélisées en utilisant le modèle probabiliste non paramétrique des incertitudes. Par conséquent, la réponse transitoire est un processus stochastique non stationnaire dont des estimations statistiques sont évaluées.

Les résultats de référence sont donnés sous forme de graphes dans l'article référencé ci-dessous, consultable sur <http://www.resonance-pub.com>.

### 2.2 Référence bibliographique

1.C. SOIZE : Non linear dynamical Systems with Nonparametric Model of Random Uncertainties",  
Uncertainties in Engineering Mechanics(2001)1(1), 1-38,  
<http://www.resonance-pub.com>

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

**Modélisation** : DKT

Le modèle moyen aux éléments finis de la plaque est constitué d'un maillage rectangulaire régulier dont le pas est constant et vaut 0.01m dans les directions  $X_1$  et  $X_2$ . Il y a donc 41 noeuds dans la largeur et 51 noeuds dans la longueur. Par conséquent, tous les éléments finis sont identiques et chacun est un élément plaque à 4 noeuds. Ce modèle éléments finis moyen comporte 2000 éléments finis et  $m=6009$  degrés de liberté, en ne comptant que les translations en  $z$  et les rotations suivant  $X_1$  et  $X_2$ ).

Les fréquences propres du système dynamique linéarisé (la plaque sans les butées de choc mais avec les masses et raideurs concentrées) sont :

$$f_1=1.94, f_2=10.28, f_3=15.47, \dots, f_8=53.5, f_9=66.1, f_{10}=68.9, \dots, f_{30}=198.3, \\ f_{31}=206.0, f_{32}=208.9, \dots, f_{50}=330.9, f_{51}=336.3, \dots, f_{100}=670.8, f_{120}=817.6\text{Hz}.$$

**Modélisation** : DIS\_T

Les masses concentrées et la raideur concentrée sont modélisées par des éléments DIST\_T.

**Amortissement**

La matrice d'amortissement  $[D]$  du modèle moyen élément finis est définie comme étant une combinaison linéaire des matrices éléments finis moyennes de masse  $[M]$  et de raideur  $[K]$ . On a donc  $[D]=a[M]+b[K]$  avec

$$a = \frac{2\xi\Omega_{max}\Omega_{min}}{\Omega_{max} + \Omega_{min}} \text{ et } b = \frac{2\xi}{\Omega_{max} + \Omega_{min}}$$

où  $\xi=0.04$ ,  $\Omega_{min}=4\pi\text{rad/s}$  et  $\Omega_{max}=200\pi\text{rad/s}$ .

**Modèle réduit et degré de liberté observé**

Pour ce cas test, le modèle éléments finis est projeté sur les 5 premiers modes élastiques de la structure linéarisé, ce qui constitue la donnée du modèle réduit moyen. Il est à noter que les 5 premiers modes ne suffisent pas pour obtenir la convergence par rapport au nombre de modes (cf. paragraphe Commentaires des résultats des modélisations).

Le degré de liberté observé est le degré de liberté  $j_{stop}$  correspondant au déplacement en translation suivant  $z$  du nœud où se trouvent les butées élastiques. C'est le nœud de coordonnées  $(0.31, 0, 0)$ . Le spectre de réponse normalisé pour ce degré de liberté est construit pour une bande d'analyse fréquentielle  $J=2\pi[1, 100]\text{rad/s}$  et dont la résolution fréquentielle est de 0.5Hz.

**Réalisations des matrices aléatoires du modèle probabiliste non paramétrique – paramétrique**

Les matrices de masses, de raideurs et de dissipation du modèle réduit moyens sont remplacées par des réalisations des matrices aléatoires de masse, de raideurs et de dissipation suivant le modèle probabiliste non paramétrique. Pour cela, nous utilisons le générateur de matrices aléatoires GENE\_MATR\_ALEA. Lors du premier appel à ce générateur, le mot clé INIT doit prendre la valeur 'OUI' afin d'initialiser le générateur de variable aléatoire de loi uniforme de Python. Par la suite, INIT pourra prendre sa valeur par défaut (INIT='NON'). L'initialisation du générateur de variable

aléatoire de Python n'est à faire qu'une et une seule fois par étude, en principe, sauf si l'utilisateur souhaite explicitement réutiliser une même séquence pseudo aléatoire.

Le niveau de dispersion des matrices aléatoires du modèle probabiliste non paramétrique est contrôlé par un paramètre de dispersion  $\delta$  fixé à 20% ( $\delta = 0.2$ ). Le mot clé DELTA prend donc la valeur 0.2.

Enfin, pour chaque tirage des matrices aléatoires de masse, de raideur et de dissipation, il faut renseigner la matrice moyenne correspondante du modèle réduit moyen par l'intermédiaire du mot clé MATR\_MOYEN.

La raideur de choc est elle aussi rendu aléatoire due à des incertitudes. Pour construire une réalisation de la raideur de choc suivant une loi gamma, nous utilisons le générateur aléatoire GENE\_VARI\_ALEA avec le mot clé TYPE='GAMMA'. Nous supposons que l'ensemble des valeurs possible pour les réalisations de la raideur de choc aléatoire est l'intervalle  $[0, +\infty[$ , que la valeur moyenne de l'ensemble des réalisations des raideurs de choc correspond à la raideur de choc du modèle éléments finis moyen. Le niveau de dispersion des réalisations de la raideur de choc est contrôlé par un paramètre  $\delta$  fixé à 1% ( $\delta = 0.01$ ). Le mot clé DELTA prend donc la valeur 0.01.

## Résolution du système dynamique non linéaire probabiliste.

L'opérateur DYNA\_VIBRA est utilisé pour construire la réponse transitoire du système dynamique non linéaire pour chaque réalisation de la raideur de choc aléatoire et des matrices aléatoire de masse, de raideur et de dissipation. Il est à noter que nous effectuons pour ce cas test seulement  $n_s = 5$  réalisations de chaque variable aléatoire (raideur de choc + matrices) ce qui correspond à 5 itération de la méthode de simulation numérique de Monte Carlo (cf. paragraphe Commentaires des Résultats des modélisations).

L'intervalle temporel de l'étude est  $T = [0, 4]_s$ , avec un pas de  $5 \cdot 10^{-5}_s$ . Le schéma d'intégration temporelle choisi est EULER.

## Construction des estimations statistiques.

Après chaque appel à DYNA\_VIBRA, nous disposons d'une réalisation du processus stochastique des déplacements généralisés. Il est donc possible de construire l'accélération au noeud de choc suivant le degré de liberté  $j_{stop}$  par l'opérateur RECU\_FONCTION. Le spectre de réponse normalisé est ensuite construit par l'opérateur CALC\_FONCTION.

Ces deux opérations sont classiquement effectuées lors d'études déterministes et nous donnent ici une réalisation du processus stochastique du spectre de réponse normalisé. Il s'agit ensuite de construire des estimations statistiques des  $n_s$  réalisations de ce dernier. Les estimations envisagées dans ce cas test sont les enveloppes min et max ainsi que la moyenne et le moment d'ordre deux des spectres de réponse normalisés. A chaque tirage (itération de Monte Carlo) nous construisons ces estimations à l'aide uniquement de l'opérateur CALC\_FONCTION et des mots clé ENVELOPPE, PUISSANCE et COMB. A la fin des  $n_s$  itérations de Monte Carlo, nous disposons des estimations statistiques recherchées relatif au processus stochastique du spectre de réponses normalisé. Enfin la norme  $L2$  de la moyenne est calculée par le mot clé NORME de l'opérateur CALC\_FONCTION. L'intérêt d'évaluer une telle norme est de permettre des études de convergence suivant le nombre de modes du modèle réduit moyen aléatoire et suivant le nombre d'itération de la méthode numérique de Monte Carlo. Cette norme est ici calculée pour vérifier que la fonctionnalité marche, mais la convergence n'est pas atteinte pour économiser le temps CPU.

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de degrés de liberté : 6009  
Nombre d'éléments finis : 2000 QUA4 et 2 DIS\_T

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

La validité initiale du cas test a été établie par comparaison à la référence bibliographique donnée en [§3.2].

On teste les valeurs suivantes en non régression (cf. commentaires) :

---

**Statistiques sur les valeurs du spectre de réponse à 50Hz au degré de liberté observé  
(cf. modélisation)**

---

Identification	Références
Estimation de l'enveloppe max	4.4433958494950E+02
Estimation de l'enveloppe min	1.2534278720661E+02
Estimation de la moyenne	3.2330416710925E+02
Estimation du moment d'ordre 2	1.2260792008492E+02
Estimation de la Norme $L2$ de la moyenne	2.0657959602609E+03

## 3.4 Commentaires

Les différentes estimations statistiques ne sont ici pas convergées. Seules 5 simulations de Monte-Carlo ont été faites. Il en aurait fallu au minimum 700. De plus, il faut augmenter le nombre de modes à 50 pour obtenir la convergence du modèle projeté dans la bande de fréquences considérée. Les calculs étant alors trop longs pour un cas test, nous avons préféré dégénérer volontairement les deux convergences après validation de celles-ci sur une étude complète. Après convergence, les estimations statistiques calculées à partir d'Aster correspondent très exactement aux résultats donnés par l'article en référence.

## 4 Modélisation B

---

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Seule la modélisation de l'amortissement change par rapport à la modélisation A.

#### Amortissement

La matrice d'amortissement  $[D]$  du modèle moyen élément finis est définie comme correspondant à un amortissement réduit modal constant de 4%.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de degrés de liberté : 6009  
Nombre d'éléments finis : 2000 QUA4 et 2 DIS\_T

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs suivantes en non régression, à 50Hz :

---

**Statistiques sur les valeurs du spectre de réponse à 50Hz au degré de liberté observé (cf. modélisation)**

---

Identification	Références
Estimation de l'enveloppe max	2.7570639015302E+02
Estimation de l'enveloppe min	9.3629561795277E+01
Estimation de la moyenne	1.9641139264813E+02
Estimation du moment d'ordre 2	4.3869049613023E+04
Estimation de la Norme $L2$ de la moyenne	1.2384277999571E+03

### 4.4 Commentaires

Mêmes commentaires que pour la modélisation A.

## 5 Synthèse des résultats

---

Les résultats obtenus sont tout à fait conformes à ceux de la référence bibliographique [§2.2] obtenus entièrement dans Matlab.