

---

## SSLV154 – Fissure circulaire en mode mixte

---

### Résumé :

Ce test a pour but de valider le calcul des facteurs d'intensité de contrainte (SIFs) le long du fond d'une fissure 3D en mode mixte, dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Ce test met en jeu un cube avec une fissure circulaire centrale plane, soumise à une force inclinée par rapport au plan de la fissure.

Ce test contient 2 modélisations :

- Modélisation A : la fissure est maillée (FEM) ;
- Modélisation B : la fissure n'est pas maillée, elle est représentée par des level-sets (X-FEM)
- Modélisation C : la fissure est maillée (FEM) pour les éléments incompressibles (`_INCO_UPG`, `_INCO_UP`);

Pour chaque modélisation, les SIFs sont évalués par les commandes `POST_K1_K2_K3` et `CALC_G`.  
Les valeurs numériques sont comparées aux valeurs analytiques.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

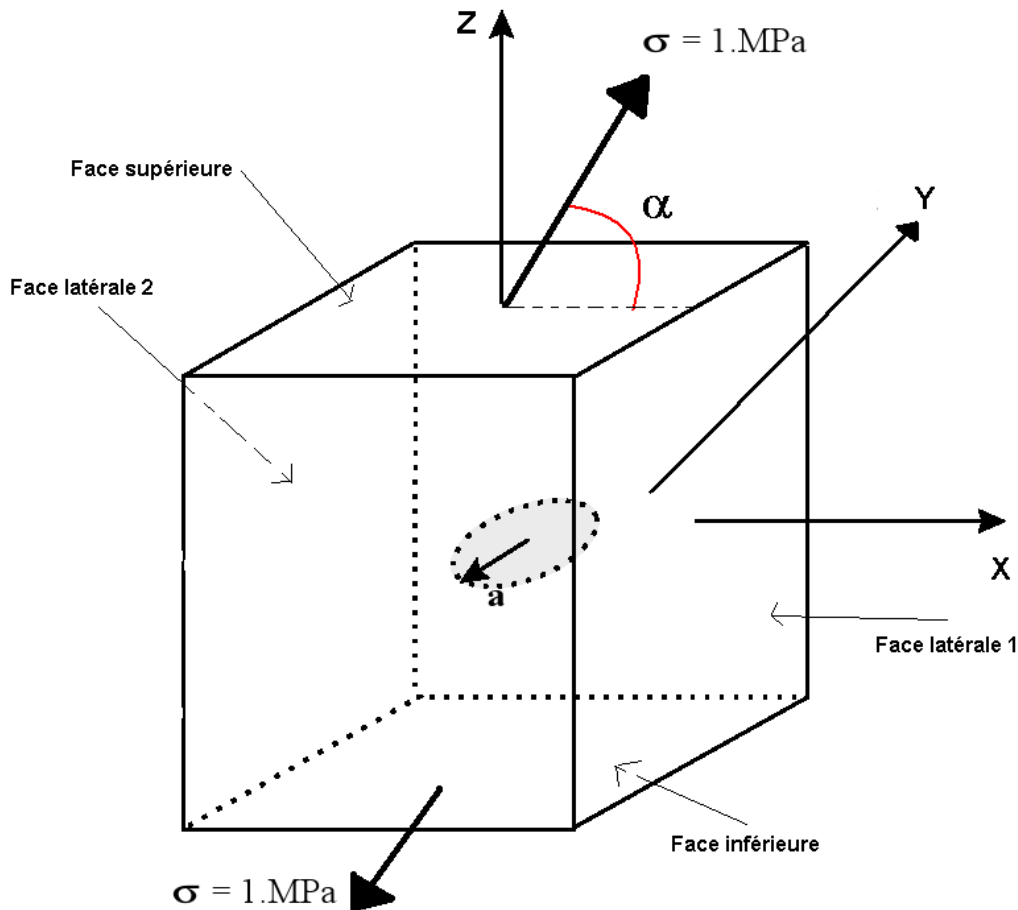


Figure 1.1-1: géométrie du cube fissuré

La fissure est circulaire (penny shaped crack) de rayon  $a=2\text{m}$  dans le plan  $OXY$ . Le coté du cube est de longueur  $L=10a$ . Ainsi, on considère que la fissure se trouve dans un milieu infini.

### 1.2 Propriétés de matériaux

Le matériau est élastique isotrope dont les propriétés sont :

$$E=200000\text{ MPa}$$

$$\nu=0,3$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Compte tenu des symétries de la structure, de la fissure et des chargements, seule la moitié de la structure est modélisée : demi-espace tel que  $Y>0$ . Des conditions de symétrie sont donc appliquées sur la face en  $Y=0$  : sur cette face, le déplacement suivant  $Y$  est bloqué.

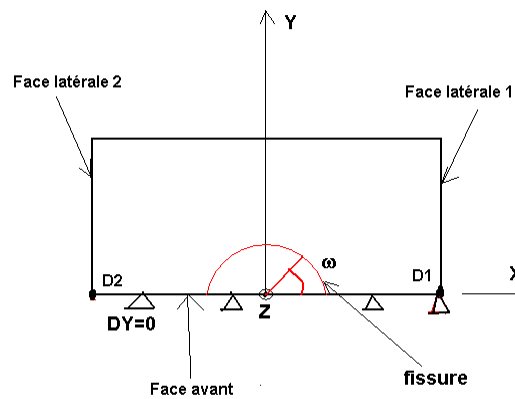


Figure 1.3-1: Condition de symétrie

La structure est soumise à une contrainte  $\sigma_{xx}=1 \text{ MPa}$ . Le repère local  $(x, y, z)$  est obtenu par rotation d'un angle  $\alpha=\pi/4$  autour de l'axe  $OY$ .

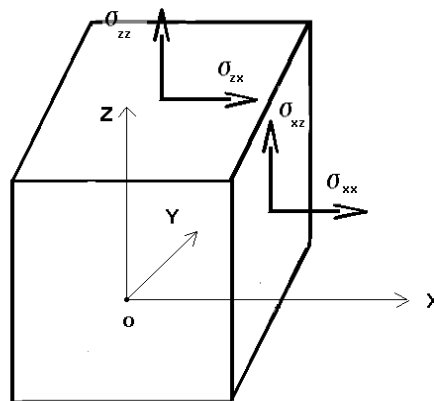


Figure 1.3-2: Contraintes dans le repère global

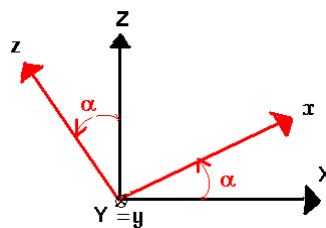


Figure 1.3-3: Repère local

Ainsi, nous avons :

sur la face supérieure :

- $\sigma_{zz} = \sigma \sin^2(\alpha)$
- $\sigma_{zx} = \sigma \cos(\alpha) \sin(\alpha)$

sur la face inférieure :

- $\sigma_{ZZ} = -\sigma \sin^2(\alpha)$
- $\sigma_{ZX} = -\sigma \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

sur la face latérale de droite :

- $\sigma_{XX} = \sigma \cos^2(\alpha)$
- $\sigma_{XZ} = \sigma \cos(\alpha) \sin(\alpha)$

sur la face latérale de gauche :

- $\sigma_{XX} = -\sigma \cos^2(\alpha)$
- $\sigma_{XZ} = \sigma \cos(\alpha) \sin(\alpha)$

Afin de bloquer les modes de corps rigides, le point  $D1$  ( $L/2, 0, 0$ ) est bloqué suivant  $X$  et  $Z$  et le point  $D2$  ( $-L/2, 0, 0$ ) est bloqué suivant  $Z$ .

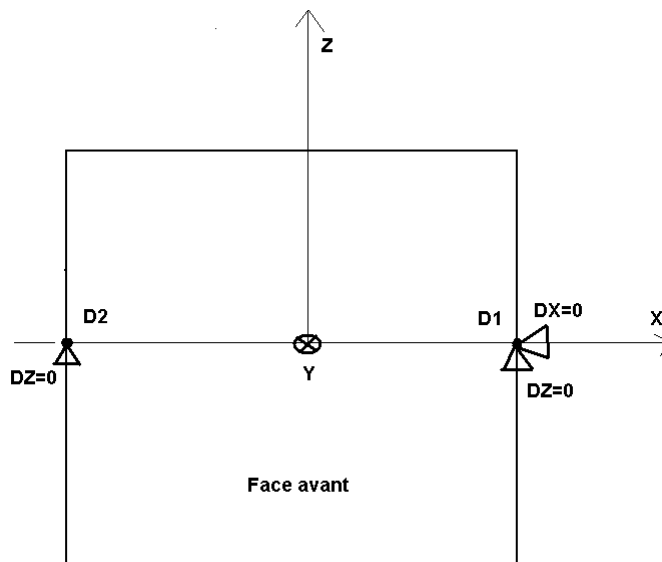


Figure 1.3-4: Blocage des modes rigides

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est une solution analytique issue de 6 , pour une fissure circulaire de rayon  $a$  dans un milieu infini, soumise à une force de surface uniforme  $\sigma$  incliné d'un angle  $\alpha$  au plan de la fissure, les facteurs d'intensité de contrainte pour un point  $A$  placé sur le front de fissure valent :

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma (\sin^2 \alpha) \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II} = \frac{4}{\pi(2-\nu)} \sigma (\sin \alpha \cos \alpha) \cos \omega \sqrt{\pi a}$$

$$K_{III} = \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} \sigma (\sin \alpha \cos \alpha) \sin \omega \sqrt{\pi a}$$

$\omega$  étant l'angle caractérisant la position du point  $A$  sur le fond circulaire (voir Figure 1.3-1).

### 2.2 Résultats de référence

Pour le chargement considéré et  $a=2m$ , le Tableau 2.2-1 donne les valeurs analytiques des SIFs le long de la moitié du fond de fissure, pour  $\omega$  compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ . Ces valeurs sont aussi présentées sur la Figure 2.2-1.

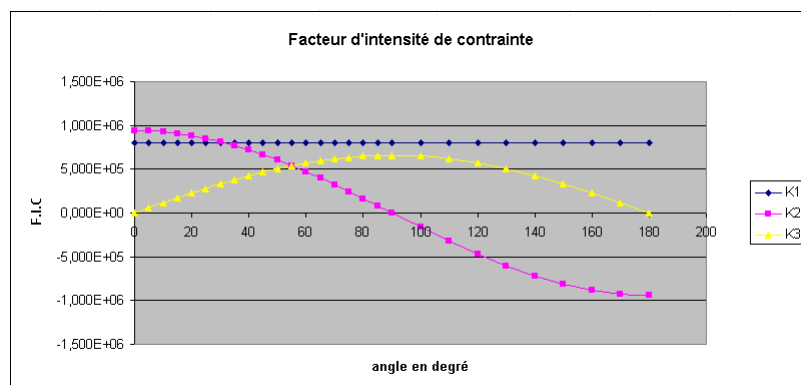


Figure 2.2-1: Valeurs de référence des SIFs

| Angle $\omega$ (°) | $K_I$ (Pa. $\sqrt{M}$ ) | $K_{II}$ (Pa. $\sqrt{M}$ ) | $K_{III}$ (Pa. $\sqrt{M}$ ) |
|--------------------|-------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 0                  | 7,978E+05               | 9,387E+05                  | 0,0E+05                     |
| 5                  | 7,978E+05               | 9,351E+05                  | 5,727E+04                   |
| 10                 | 7,978E+05               | 9,244E+05                  | 1,141E+05                   |
| 15                 | 7,978E+05               | 9,067E+05                  | 1,701E+05                   |
| 20                 | 7,978E+05               | 8,821E+05                  | 2,247E+05                   |
| 25                 | 7,978E+05               | 8,507E+05                  | 2,777E+05                   |
| 30                 | 7,978E+05               | 8,129E+05                  | 3,285E+05                   |
| 35                 | 7,978E+05               | 7,689E+05                  | 3,769E+05                   |
| 40                 | 7,978E+05               | 7,191E+05                  | 4,224E+05                   |
| 45                 | 7,978E+05               | 6,638E+05                  | 4,646E+05                   |
| 50                 | 7,978E+05               | 6,034E+05                  | 5,034E+05                   |
| 55                 | 7,978E+05               | 5,384E+05                  | 5,382E+05                   |
| 60                 | 7,978E+05               | 4,693E+05                  | 5,690E+05                   |
| 65                 | 7,978E+05               | 3,967E+05                  | 5,955E+05                   |
| 70                 | 7,978E+05               | 3,211E+05                  | 6,175E+05                   |
| 75                 | 7,978E+05               | 2,430E+05                  | 6,347E+05                   |
| 80                 | 7,978E+05               | 1,630E+05                  | 6,471E+05                   |
| 85                 | 7,978E+05               | 8,181E+04                  | 6,546E+05                   |
| 90                 | 7,978E+05               | 5,750E-11                  | 6,571E+05                   |
| 100                | 7,978E+05               | -1,630E+05                 | 6,471E+05                   |
| 110                | 7,978E+05               | -3,211E+05                 | 6,175E+05                   |
| 120                | 7,978E+05               | -4,693E+05                 | 5,690E+05                   |
| 130                | 7,978E+05               | -6,034E+05                 | 5,034E+05                   |
| 140                | 7,978E+05               | -7,191E+05                 | 4,224E+05                   |
| 150                | 7,978E+05               | -8,129E+05                 | 3,285E+05                   |
| 160                | 7,978E+05               | -8,821E+05                 | 2,247E+05                   |
| 170                | 7,978E+05               | -9,244E+05                 | 1,141E+05                   |
| 180                | 7,978E+05               | -9,387E+05                 | 8,050E-11                   |

Tableau 2.2-1: Valeurs de référence

## 2.3 Références bibliographiques

- (1) TADA H., PARIS P., IRWIND G. : The stress analysis of cracks handbook, 3ème éd., 2000

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la fissure est maillée (cas FEM). Le maillage comporte un tore entourant le fond de fissure.

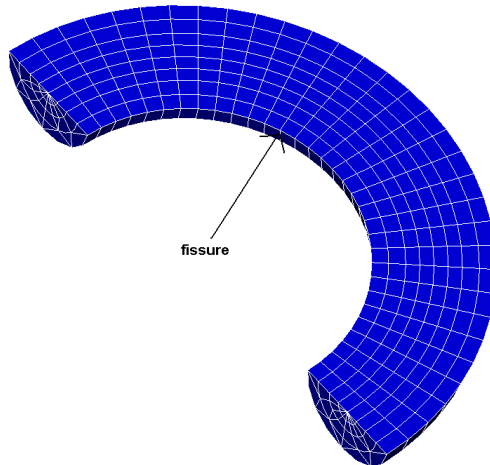


Figure 3.1-1: maillage rayonnant

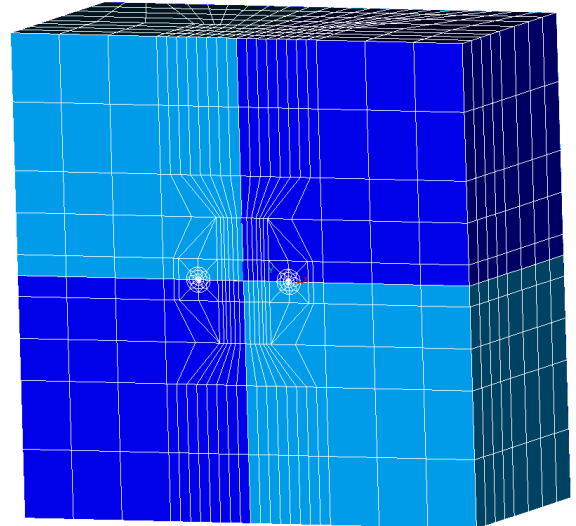


Figure 3.1-2: maillage de la structure

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 9967

Nombre de mailles et type : 864 PENTA15 et 1568 HEXA20

La longueur caractéristique d'un élément près du fond de fissure est de  $0,12\text{ m}$ .

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes.

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Les couronnes d'intégration du champ  $\theta$  pour la commande CALC\_G sont :

RINF= $0,1\text{ m}$  et RSUP= $0,5\text{ m}$ .

On choisit un lissage de type LEGENDRE.

Le paramètre ABS\_CURV\_MAXI de l'opérateur POST\_K1\_K2\_K3 est choisi de manière à retenir 5 nœuds sur le segment d'extrapolation.

Pour tester la valeur de  $K_I$  pour tous les points du fond de fissure, on teste le *min* et le *max* des valeurs le long du fond.

Le  $K_{II}$  est testé uniquement au point tel que  $\omega=0^\circ$  (où  $K_{II}$  est normalement maximal).

Le  $K_{III}$  est testé uniquement au point tel que  $\omega=90^\circ$  (où  $K_{III}$  est normalement maximal).

Théoriquement, il faudrait tester la valeur absolue de  $K_{II}$  et  $K_{III}$  car le signe est arbitraire.

#### 3.3.1 Valeurs issues de CALC\_G

Les valeurs sont en  $\text{Pa} \cdot \sqrt{\text{M}}$ .

| Identification                 | Type de référence | Valeur de référence | % Tolérance |
|--------------------------------|-------------------|---------------------|-------------|
| $\max(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE'      | $7,978 \cdot 10^5$  | 5,5%        |
| $\min(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE'      | $7,978 \cdot 10^5$  | 4%          |
| $K_{II}$ en $\omega=0^\circ$   | 'ANALYTIQUE'      | $9,386 \cdot 10^5$  | 9%          |
| $K_{III}$ en $\omega=90^\circ$ | 'ANALYTIQUE'      | $6,570 \cdot 10^5$  | 3%          |

### 3.3.2 Valeurs issues de POST\_K1\_K2\_K3

Les valeurs sont en  $Pa \cdot \sqrt{M}$ .

| Identification                 | Type de référence | Valeur de référence | % Tolérance |
|--------------------------------|-------------------|---------------------|-------------|
| $\max(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE'      | $7,978 \cdot 10^5$  | 3%          |
| $\min(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE'      | $7,978 \cdot 10^5$  | 2%          |
| $K_{II}$ en $\omega=0^\circ$   | 'ANALYTIQUE'      | $9,386 \cdot 10^5$  | 2%          |
| $K_{III}$ en $\omega=90^\circ$ | 'ANALYTIQUE'      | $6,570 \cdot 10^5$  | 2%          |

## 3.4 Remarques

Les Figure 3.4-1, Figure 3.4-2, Figure 3.4-3 et Figure 3.4-4 montrent l'évolution de  $G$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  le long du fond de fissure. On constate que le K3 n'est pas correct. Cela est dû à des incorrections de la base locale aux extrémités, qui sont propagées sur tout le front à cause des polynômes de LEGENDRE.

### Taux de restitution d energie

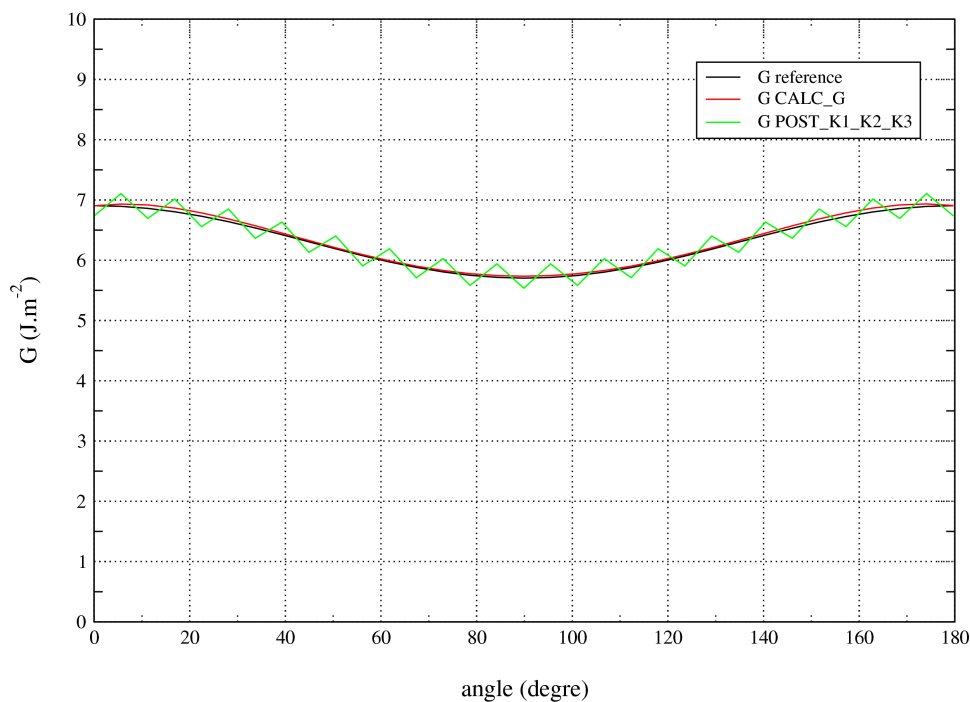


Figure 3.4-1: G le long du fond de fissure

## K1

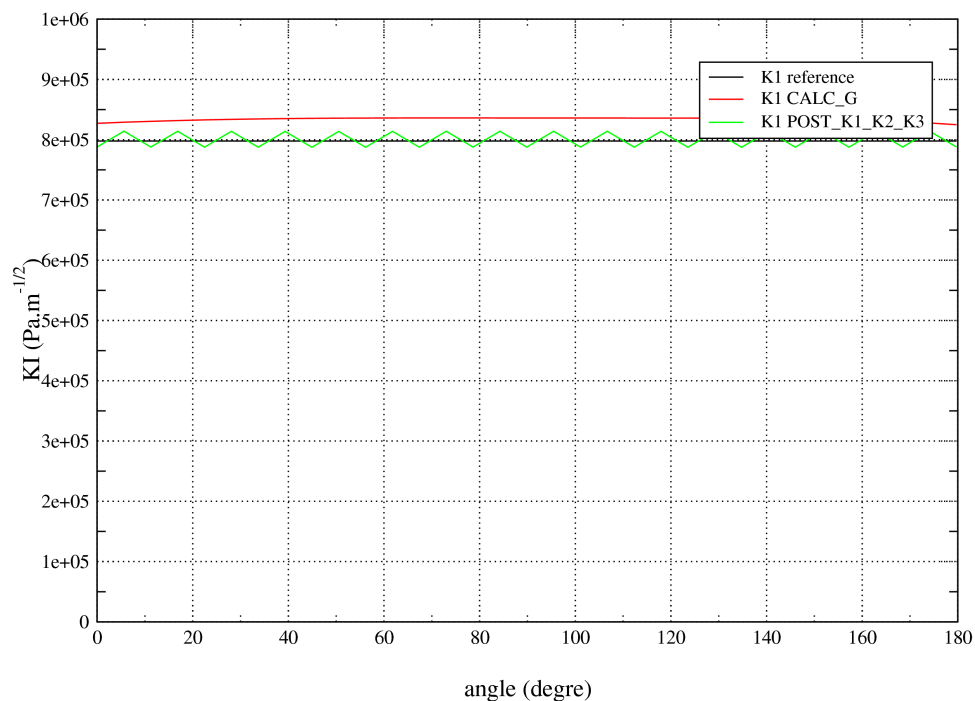


Figure 3.4-2: K1 le long du fond de fissure

## K2

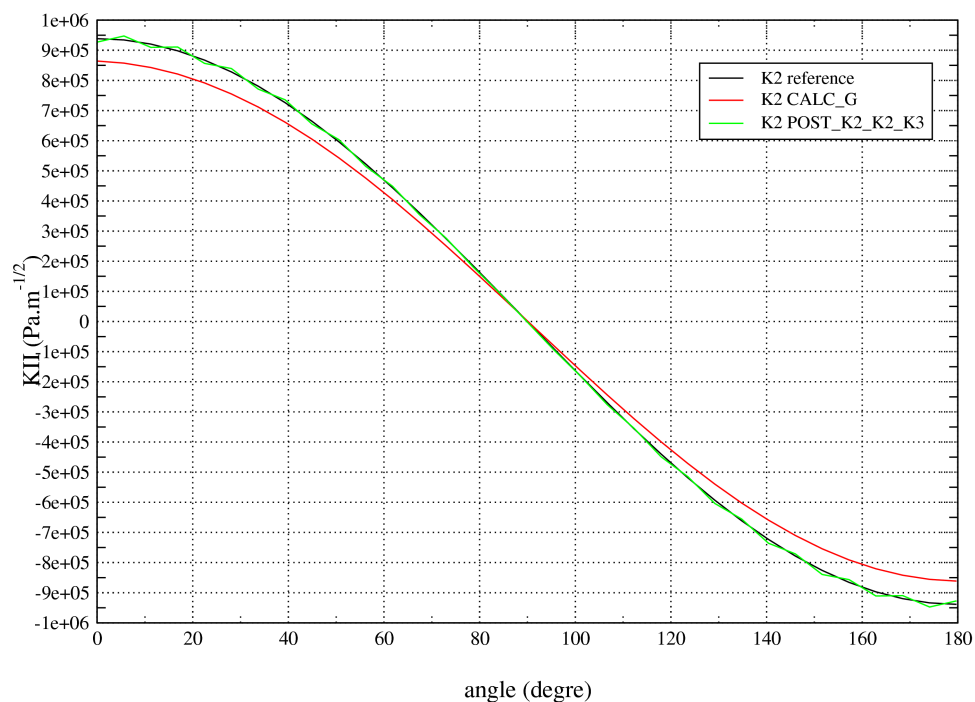
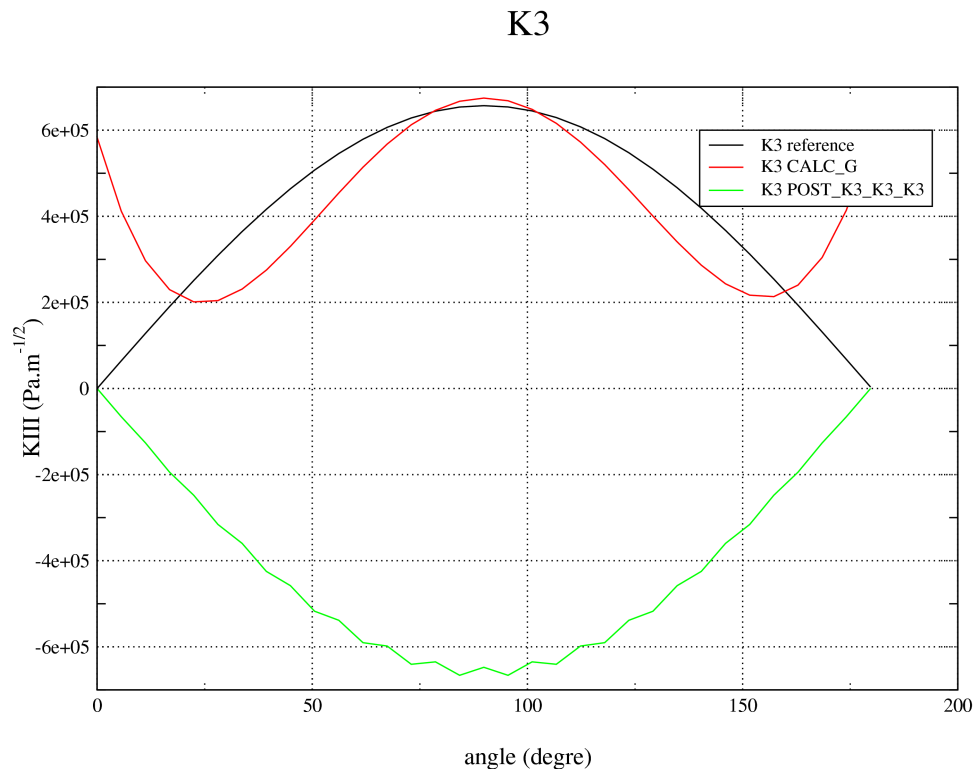


Figure 3.4-3: K2 le long du fond de fissure



**Figure 3.4-4: K3 le long du fond de fissure**

Pour information, la Figure 3.4-5 présente une comparaison des SIFs le long du fond de fissure avec un lissage de LAGRANGE. On constate qu'il y a une erreur plus importante sur les points aux extrémités du fond pour  $K_{II}$  et  $K_{III}$  issus de CALC\_G. Cela est dû à un traitement particulier des points aux extrémités, qui ne fonctionne bien que si la solution est constante le long du fond. Cela explique pourquoi les valeurs de  $K_I$  sont meilleures. Ce traitement particulier n'est réalisé que pour les résultats ( $G$ ,  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ ) issus de l'option CALC\_K\_G, lissage LAGRANGE.

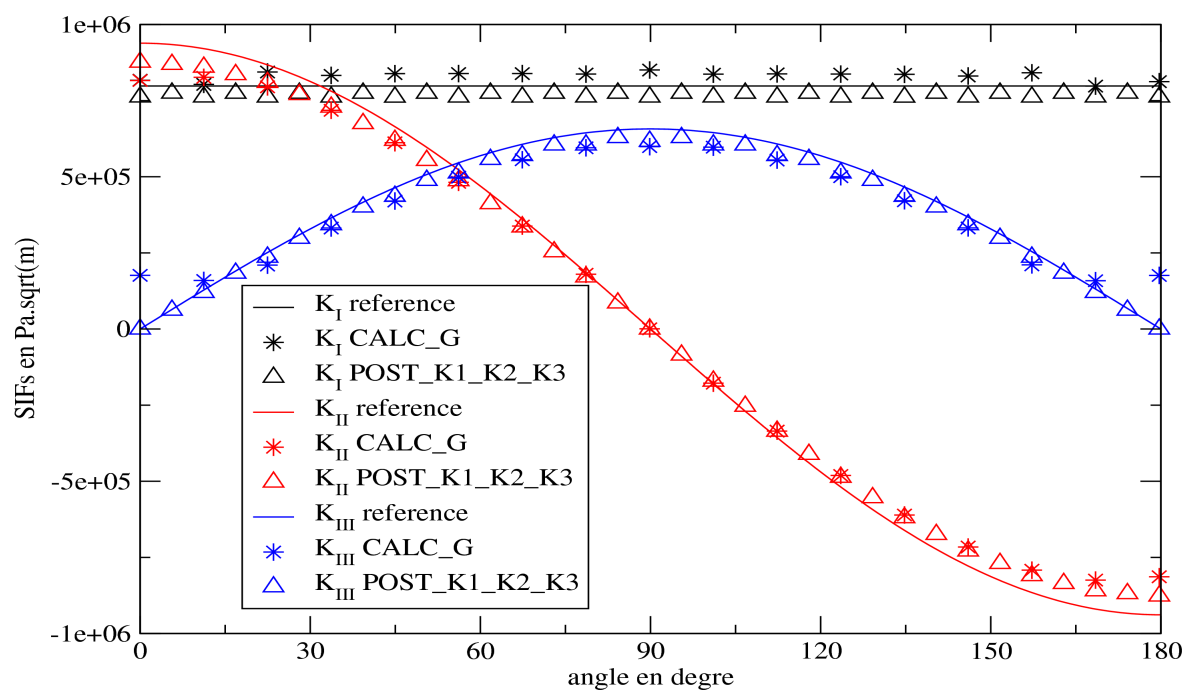


Figure 3.4-5: SIFs le long du fond de fissure (FEM)

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la fissure n'est pas maillée (cas X-FEM).

Afin d'obtenir une meilleure précision sur les résultats, le maillage initial libre a été raffiné au niveau du fond de fissure à l'aide de la commande `MACR_ADAP_MAIL`.

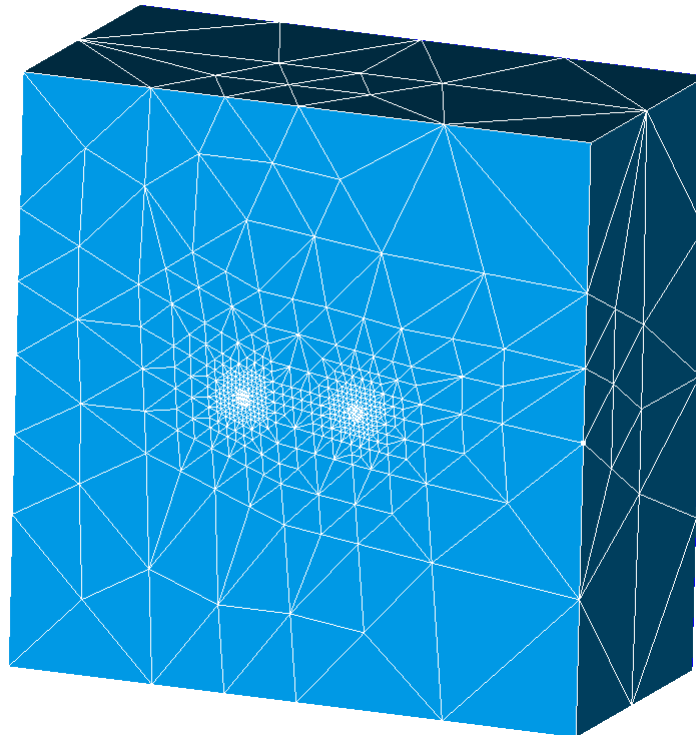


Figure 4.1-1: maillage de la structure raffiné

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1146

Nombre de mailles et type : 64573 TETRA4

La longueur caractéristique d'un élément près du fond de fissure est de  $0,07\text{ m}$ .

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Le choix des paramètres numériques pour le post-traitement des SIFs est identique à celui fait pour la modélisation A.

De plus, afin de lisser les résultats de `CALC_G` (inévitables sur un maillage libre), il est nécessaire de ne post-traiter les SIFs qu'en un nombre limité de points, répartis uniformément le long du fond de fissure. On choisit ici 21 points de post-traitement (initialement, il y a 289 points le long du fond de fissure). Cela permet aussi de réduire le temps CPU du post-traitement.

On choisit de la même manière 21 points de post-traitement pour `POST_K1_K2_K3`.

#### 4.3.1 Valeurs issues de `CALC_G`

Les valeurs sont en  $\text{Pa} \cdot \sqrt{\text{M}}$ .

| Identification                 | Type de référence | Valeur de référence | % Tolérance |
|--------------------------------|-------------------|---------------------|-------------|
| $\max(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE '     | $7,978 \cdot 10^5$  | 6%          |
| $\min(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE '     | $7,978 \cdot 10^5$  | 1%          |
| $K_{II}$ en $\omega=0^\circ$   | 'ANALYTIQUE '     | $9,386 \cdot 10^5$  | 14%         |
| $K_{III}$ en $\omega=90^\circ$ | 'ANALYTIQUE '     | $6,570 \cdot 10^5$  | 10%         |

## 4.3.2 Valeurs issues de POST\_K1\_K2\_K3

Les valeurs sont en  $Pa \cdot \sqrt{M}$ .

| Identification                 | Type de référence | Valeur de référence | % Tolérance |
|--------------------------------|-------------------|---------------------|-------------|
| $\max(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE '     | $7,978 \cdot 10^5$  | 2%          |
| $\min(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE '     | $7,978 \cdot 10^5$  | 11%         |
| $K_{II}$ en $\omega=0^\circ$   | 'ANALYTIQUE '     | $9,386 \cdot 10^5$  | 7%          |
| $K_{III}$ en $\omega=90^\circ$ | 'ANALYTIQUE '     | $6,570 \cdot 10^5$  | 2%          |

## 4.4 Remarques

Pour information, la Figure 4.4-1 présente une comparaison des SIFs le long du fond de fissure. On constate le même type d'erreur que celle soulignée au paragraphe §3.4.

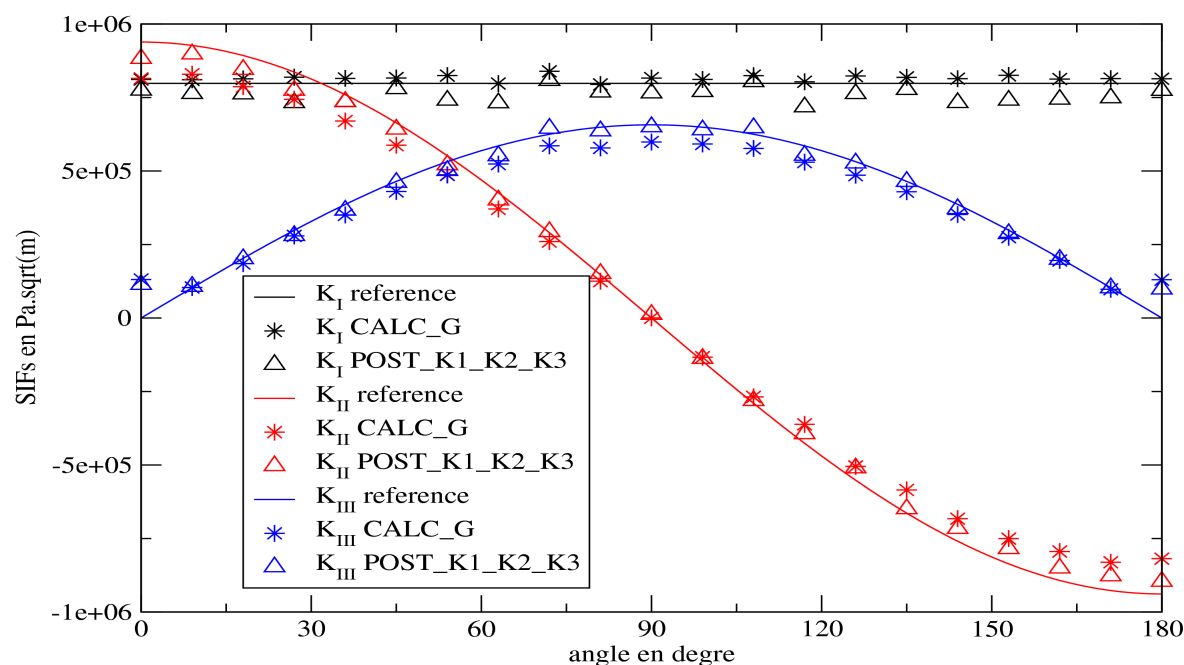


Figure 4.4-1: SIFs le long du fond de fissure (FEM)

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Identiques à la modélisation A sauf pour les éléments 3D\_INCO\_UPG et 3D\_INCO\_UP

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 9967

Nombre de mailles et type : 864 PENTA15 et 1568 HEXA20

La longueur caractéristique d'un élément près du fond de fissure est de 0,06 m .

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes.

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Les couronnes d'intégration du champ  $\theta$  pour la commande CALC\_G sont :

RINF=0,1 m et RSUP=0,5 m .

On choisit un lissage de type LAGRANGE.

Le paramètre ABS\_CURV\_MAXI de l'opérateur POST\_K1\_K2\_K3 est choisi de manière à retenir 5 nœuds sur le segment d'extrapolation.

Pour tester la valeur de  $K_I$  pour tous les points du fond de fissure, on teste le *min* et le *max* des valeurs le long du fond.

Le  $K_{II}$  est testé uniquement au point tel que  $\omega=0^\circ$  (où  $K_{II}$  est normalement maximal).

Le  $K_{III}$  est testé uniquement au point tel que  $\omega=90^\circ$  (où  $K_{III}$  est normalement maximal).

Théoriquement, il faudrait tester la valeur absolue de  $K_{II}$  et  $K_{III}$  car le signe est arbitraire.

#### 5.3.1 Valeurs issues de CALC\_G

Les valeurs sont en  $Pa \cdot \sqrt{M}$  obtenues à partir du cas test SSLV154A.

| Identification                 | Type de référence | Valeur de référence   | % Tolérance |
|--------------------------------|-------------------|-----------------------|-------------|
| $\max(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE'      | 8,361 10 <sup>5</sup> | 3%          |
| $\min(K_I)$                    | 'ANALYTIQUE'      | 8,361 10 <sup>5</sup> | 1%          |
| $K_{II}$ en $\omega=0^\circ$   | 'ANALYTIQUE'      | 8,644 10 <sup>5</sup> | 2%          |
| $K_{III}$ en $\omega=90^\circ$ | 'ANALYTIQUE'      | 6,747 10 <sup>5</sup> | 3%          |

---

## 6 Synthèse des résultats

---

Ce cas-test valide la calcul des facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure 3D en mode mixte. On constate pour la commande `CALC_G` (option `CALC_K_G`) des erreurs importantes aux points extrémités si le  $K$  n'est pas constant le long du fond de fissure.

Ce problème n'apparait pas pour la commande `POST_K1_K2_K3`.