

## SSLV134 - Fissure circulaire en milieu infini

---

### Résumé

Ce test permet, après obtention du champ de déplacement par `MECA_STATIQUE`, le calcul du taux de restitution de l'énergie local pour une fissure circulaire plongée dans un milieu supposé infini.

Pour la première modélisation, seul un demi-espace défini par le plan de la fissure est représenté. Le fond de fissure est alors une courbe fermée (un cercle) et est défini en tant que tel dans `DEFI_FOND_FISS`. Le taux de restitution local et global est comparé à la solution analytique de référence.

Les sept modélisations suivantes permettent de calculer les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_3$ , en 3D et axisymétrique, calculés par `POST_K1_K2_K3` et/ou `CALC_G`.

- La modélisation A teste  $G$  pour un maillage 3D avec la fissure fermée,
- La modélisation B teste  $K_I$  pour un maillage 3D,
- La modélisation C teste  $K_I$  pour un maillage axi-symétrique,
- La modélisation D teste la combinaison de  $K_I$  et  $K_3$  pour un maillage 3D.
- La modélisation G teste  $K_I$  pour un maillage 3D avec un fond de fissure défini par deux groupes de nœuds coïncidents.
- La modélisation H teste  $K_I$  pour une fissure non maillée (méthode X-FEM)
- La modélisation I teste  $K_I$  pour une fissure axi-symétrique non maillée (méthode X-FEM)
- La modélisation J teste  $G$  pour un maillage 3D avec la fissure fermée pour les éléments incompressibles,
- La modélisation K teste  $K_I$  pour un maillage axi-symétrique pour les éléments incompressibles,
- La modélisation L teste  $G$  pour un maillage 3D avec la fissure fermée (méthode X-FEM).

Les modélisations E et F permettent de valider le calcul de la forme bilinéaire de  $G$  sur le même problème. Enfin, la modélisation F permet de valider les options `G_MAX` et `CALC_K_MAX`.

## 1 Problème de référence

---

### 1.1 Géométrie

La fissure est circulaire (penny shaped crack) de rayon  $a$ , dans le plan  $Oxy$ . Pour que le milieu soit considéré comme infini, les grandeurs caractéristiques du massif sont de l'ordre de 5 fois supérieures au rayon  $a$ .

### 1.2 Propriétés de matériaux

Module d'Young :  $E = 2.10^5 MPa$

Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$

Masse volumique:  $\rho = 7850 kg/m^3$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Face inférieure : contrainte uniforme de traction  $\sigma_z = 1. MPa$

Face supérieure : contrainte uniforme de traction  $\sigma_z = 1. MPa$

Suivant la modélisation, on a également des conditions aux limites de symétrie et de blocage des mouvements de corps rigide.

Dans la modélisation D où on ne représente que le quart du parallélépipède, on utilise des conditions aux limites d'antisymétrie pour le chargement de torsion : elles reviennent à imposer nuls les déplacements tangentiels à une face. Le chargement de torsion est introduit sous forme d'une force surfacique tangentielle (cisaillement réparti) appliquée sur les lèvres de la fissure.

- Lèvre supérieure :  $F_x = -\tau \frac{Y}{a}$  et  $F_y = +\tau \frac{X}{a}$
- Lèvre inférieure :  $F_x = +\tau \frac{Y}{a}$  et  $F_y = -\tau \frac{X}{a}$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour une fissure circulaire de rayon  $a$  dans un milieu infini, soumise à une traction uniforme  $\sigma$  suivant la normale au plan des lèvres, le taux de restitution d'énergie local  $G(s)$  est indépendant de l'abscisse curviligne  $s$  et vaut [bib1] :

$$G(s) = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} 4\sigma^2 a$$

alors le coefficient d'intensité de contrainte  $K_I$  est donné par la formule d'Irwin :

$$G(s) = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2 \text{ soit } K_I = \frac{2\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}}$$

Si cette fissure est soumise à un cisaillement réparti sur les lèvres :  $\sigma_{\theta z} = \tau \frac{r}{a}$

(ce qui équivaut à une torsion à l'infini), alors on est en mode 3 pur et le facteur d'intensité de contraintes correspondant vaut :

$$K_3 = \frac{4\tau\sqrt{a}}{3\sqrt{\pi}} \text{ donc par la formule d'Irwin } G(s) = \frac{(1+\nu)}{E} K_3^2$$

En présence des deux modes combinés, on aura :

$$G(s) = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2 + \frac{(1+\nu)}{E} K_3^2$$

La théta-méthode relie les taux de restitution d'énergie global et local par l'équation variationnelle suivante :

$$G_{réf}(\theta) = \int_{\Gamma} G(s) \theta \cdot m(s) ds$$

où  $m(s)$  est la normale au fond de fissure  $\Gamma$  et  $\theta$  est le champ de vitesse d'une propagation virtuelle de la fissure.

Si on choisit pour  $\theta$  le champ unitaire normal au fond de fissure, on obtient, puisque  $G(s)$  est constant sur tout le fond de fissure :

$$G_{réf}(\theta) = G(s) \cdot 2\pi a$$

### 2.2 Résultats de référence

Application Numérique (cas avec chargement de traction uniquement) :

Pour le chargement considéré et  $a = 2m$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} G(s) &= 11.586 J/m^2 \\ G_{réf} &= 145.60 J/m \\ K_I &= 1.5958E6 J/m^2 \end{aligned}$$

Pour la modélisation  $G$  (3 fonds de fissure différents) avec le même chargement, on obtient :

pour  $a = 2 m$

$$G(s) = 10.586 J/m^2$$
$$KI = 1.5958E6 J/m^2$$

pour  $a = 1.88 m$

$$G(s) = 10.891 J/m^2$$
$$KI = 1.5472E6 J/m^2$$

pour  $a = 1.76 m$

$$G(s) = 10.196 J/m^2$$
$$KI = 1.4969E6 J/m^2$$

Application Numérique (cas avec chargement de torsion uniquement) :

$$G(s) = 7.3565 J/m^2$$
$$G_{réf} = 92.44 J/m$$
$$KI = 1.0638E6 J/m^2$$

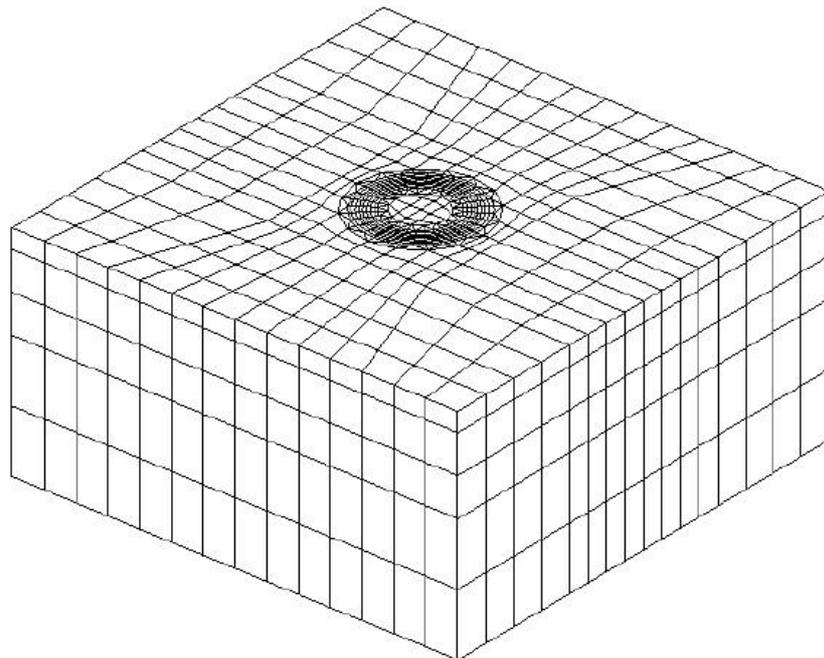
## 2.3 Références bibliographiques

- 1) Solution de Sneddon (1946) dans G.C. SIH : Handbook of stress-intensity factors Institute of Fracture and Solid Mechanics - Lehigh University Bethlehem, Pennsylvannie

## 3 Modélisation A

Le fond de fissure est fermé. On calcule  $G$ .

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation



L'intérêt de cette modélisation est de représenter l'intégralité du fond de fissure qui est une courbe fermée, sans tirer parti des symétries du problème.

Seul le chargement de traction est pris en compte.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11114  
Nombre de mailles et type : 2432 PENTA15

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes.

### 3.3 Remarque

On utilise le mot clé `SYME` dans l'opérateur `CALC_G` pour multiplier automatiquement par deux le taux de restitution d'énergie calculé sur une seule lèvres de la fissure, lorsque l'opérande `FOND_FISS` est absent. Quand `FOND_FISS` est présent, l'information sur la symétrie est récupérée directement dans le concept `fond_fiss` créé via `DEFI_FOND_FISS`.

Le principe est le même pour `POST_K1_K2_K3`. L'indication de la symétrie induit le calcul des facteurs d'intensité des contraintes et du taux de restitution de l'énergie `G_IRWIN` par interpolation des déplacements d'une lèvres unique de la fissure. Le déplacement des nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure au quart de ces arêtes permettrait d'améliorer la précision du calcul.

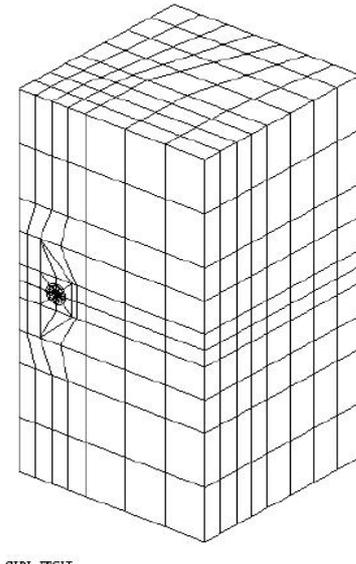
## 3.4 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Type de référence	% tolérance
G global	145.6	ANALYTIQUE	1,2
G local Nœud <i>N403</i> - G Lagrange	11.586	ANALYTIQUE	3.0
G local Nœud <i>N2862</i> - G Lagrange	11.586	ANALYTIQUE	2.0
G local Nœud <i>N375</i> - G Lagrange	11.586	ANALYTIQUE	3.0
G local Nœud <i>N292</i> - G Lagrange	11.586	ANALYTIQUE	2,4
$\max(G\ local)$ - G Lagrange	11.59	ANALYTIQUE	2,5
$\min(G\ local)$ - G Lagrange	11.59	ANALYTIQUE	2.0
G local Nœud <i>N403</i> - G Lagrange_no_no	11.586	ANALYTIQUE	2.0
G local Nœud <i>N2862</i> - G Lagrange_no_no	11.586	ANALYTIQUE	2.0
G local Nœud <i>N375</i> - G Lagrange_no_no	11.586	ANALYTIQUE	2.0
G local Nœud <i>N292</i> - G Lagrange_no_no	11.586	ANALYTIQUE	2.0
G local Nœud <i>N403</i> - G Lagrange_regu	11.586	ANALYTIQUE	1,3
G local Nœud <i>N2862</i> - G Lagrange_regu	11,726	NON_REGRESSION	0.1
G local Nœud <i>N375</i> - G Lagrange_regu	11,738	NON_REGRESSION	0.1
G local Nœud <i>N292</i> - G Lagrange_regu	11,702	NON_REGRESSION	0.1
G (POST_K1_K2_K3) - Nœud <i>N403</i>	11.586	ANALYTIQUE	5.0
G (POST_K1_K2_K3) - Nœud <i>N2862</i>	11.586	ANALYTIQUE	10.0
G (POST_K1_K2_K3) - Nœud <i>N375</i>	11.586	ANALYTIQUE	5.0
G (POST_K1_K2_K3) - Nœud <i>N292</i>	11.586	ANALYTIQUE	5.0

## 4 Modélisation B

Calcul avec POST\_K1\_K2\_K3 en 3D

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation



Cette modélisation permet de tester le calcul de  $K_I$  à l'aide de POST\_K1\_K2\_K3 (méthode d'extrapolation des déplacements sur les lèvres de la fissure). Le paramètre ABSC\_CURV\_MAXI de l'opérateur est calculé dans POST\_K1\_K2\_K3 de manière à retenir 5 nœuds sur le segment d'extrapolation ( $d_{max} = 0,35$ ).

Seul le chargement de traction est pris en compte.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 6536

Nombre de mailles et type : 432 PENTA15 et 987 HEXA20

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes, pour obtenir une meilleure précision.

### 4.3 Remarque

On ne représente que le quart du bloc tridimensionnel complet et donc le quart de la fissure. Ainsi, il faut diviser la valeur théorique de référence du taux de restitution global par 4 :

$$G_{glob} = 145.60 / 4 = 36.40 \text{ J/m}$$

### 4.4 Grandeurs testées et résultats

#### 4.4.1 Résultats de CALC\_G

Identification

Référence (analytique)

% tolérance

<i>G</i> local Nœud 49	11.59	3,0
<i>G</i> local Nœud 1710	11.59	2,0
<i>G</i> local Nœud 77	11.59	3,0
<i>G</i> global	36.4	1,2

## 4.4.2 Résultats de POST\_K1\_K2\_K3

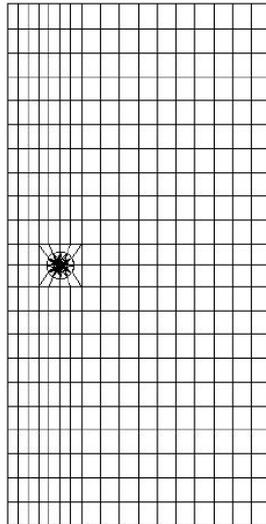
Identification	Référence (analytique)	% tolérance
<i>G</i> Nœud 49	11.586	2
<i>G</i> Nœud 77	11.586	2
<i>G</i> Nœud 1710	11.586	2
<i>KI</i> Nœud 49	1.60E+006	1
<i>KI</i> Nœud 77	1.60E+006	1
<i>KI</i> Nœud 1710	1.60E+006	1

D'autres tests purement informatiques de la commande POST\_K1\_K2\_K3 sont également effectués.

## 5 Modélisation C

Calcul avec POST\_K1\_K2\_K3 en axisymétrique.

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation



Cette modélisation permet de tester le calcul de  $KI$  à l'aide de POST\_K1\_K2\_K3 (méthode d'extrapolation des déplacements sur les lèvres de la fissure) en axisymétrique.

Seul le chargement de traction est retenu dans cette modélisation.

Puisqu'on est en modélisation axisymétrique, la relation entre les taux de restitution d'énergie global et local est [R7.02.01] :

$$G_{réf}(\theta) = G(s) \cdot a \text{ soit ici } G_{réf} = 23.17 J/m$$

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1477

Nombre de mailles et type : 402 QUAD8 et 60 TRIA6

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes, pour obtenir une meilleure précision.

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Méthode	Référence	Type de référence	% tolérance
$G$	CALC_G	23.2	ANALYTIQUE	1.8
$KI$	POST_K1_K2_K3	1.60E+006	ANALYTIQUE	3
$G$	POST_K1_K2_K3	11.6	ANALYTIQUE	1.8

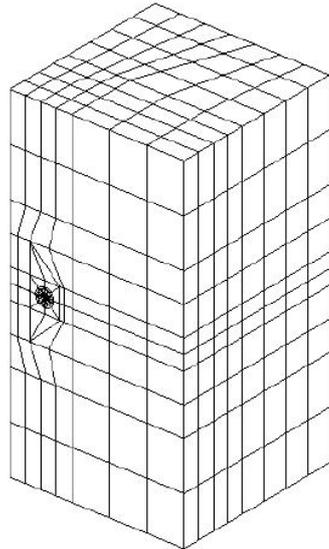
## 5.4 Remarque

Une commande de `STAT_NON_LINE` est ajoutée pour valider les modifications apportée sur `xpesro.f`. Les résultats obtenus de ce cas test seront comparés avec ceux obtenus de cas test `sslv134i` pour X-FEM en axi-symétrique. En addition de la traction simple appliquée sur les bords haut et bas de la plaque, une rotation de  $150 \text{ trs/min}$  autour de l'axe symétrique est appliquée. Avec l'option `CALC_G`,  $G=21,4$  et  $K_1=219\text{E}+05$ .

## 6 Modélisation D

Calcul avec POST\_K1\_K2\_K3 en 3D pour les modes 1 et 3.

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation



Les conditions aux limites suivantes sont successivement appliquées :

- traction : comme pour la modélisation B ;
- torsion.

Cette modélisation permet de tester le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  combinés à l'aide de POST\_K1\_K2\_K3 (méthode d'extrapolation des déplacements sur les lèvres de la fissure).

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes, pour obtenir une meilleure précision.

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 6536

Nombre de mailles et type : 432 PENTA15 et 987 HEXA20

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes, pour obtenir une meilleure précision.

### 6.3 Remarque

Les deux cas de charge (traction et torsion) sont pris en compte. Il faut donc cumuler les valeurs de  $G$  pour les deux chargements. De plus, on ne représente que le quart du bloc tridimensionnel complet et donc le quart de la fissure, il faut donc diviser la valeur théorique de référence du taux de restitution global par 4.

Ainsi

$$G(s) = (11.586 + 7.356) = 18.943 \text{ J/m}^2$$

$$G = (145.60 + 92.44) / 4 = 59,511 \text{ J/m}$$

Seule la traction contribue à  $K1$  , seule la torsion contribue à  $K3$  .

## 6.4 Grandeurs testées et résultats

Identification	Méthode	Localisation	Référence	Type de référence	% tolérance
G	CALC_G Legendre	Nœud 49	18.94	ANALYTIQUE	3.0
G	CALC_G Legendre	Nœud 1710	18.94	ANALYTIQUE	2.0
G	CALC_G Legendre	Nœud 77	18.94	ANALYTIQUE	3.0
G	CALC_G option CALC_G_GLOB	-	59.51	ANALYTIQUE	1.2
K1	POST K1 K1 K3	Nœud 49	1,596 10 <sup>6</sup>	ANALYTIQUE	1.0
K1	POST K1 K1 K3	Nœud 1710	1,596 10 <sup>6</sup>	ANALYTIQUE	1.0
K1	POST K1 K1 K3	Nœud 77	1,596 10 <sup>6</sup>	ANALYTIQUE	2.0
K3	POST K1 K1 K3	Nœud 49	1,064 10 <sup>6</sup>	ANALYTIQUE	2.0
K3	POST K1 K1 K3	Nœud 1710	1,064 10 <sup>6</sup>	ANALYTIQUE	2.0
K3	POST K1 K1 K3	Nœud 77	1,064 10 <sup>6</sup>	ANALYTIQUE	1.0
G	POST K1 K1 K3	Nœud 49	18.94	ANALYTIQUE	2.0
G	POST K1 K1 K3	Nœud 1710	18.94	ANALYTIQUE	2.0
G	POST K1 K1 K3	Nœud 77	18.94	ANALYTIQUE	2.0

## 7 Modélisation E

Calcul de la forme bilinéaire de  $G$ .

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Le maillage est identique à celui des calculs précédents, mais seul le huitième du bloc est retenu (quadrant  $Oxyz$ )

- Chargement 1 : Idem modélisation B.  
 Chargement 2 :  $Face\ x=10.$  : contrainte uniforme de traction  $\sigma_z=1$  ,  
 $Face\ z=10.$  : contrainte uniforme de traction  $\sigma_x=1$  (cisaillement).  
 Chargement 3 : Chargement 1 + Chargement 2.  
 Chargement 4 : Chargement 2 – Chargement 1.

Quatre calculs sont statiques sont réalisés produisant respectivement les déplacements  $u, v, u+v$ , et  $v - u$ .

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2774  
 Nombre de mailles et type : 392 HEXA20 et 216 PENTA15

### 7.3 Remarque

Le maillage ne représente que le huitième du bloc tridimensionnel complet. Par contre, on utilise l'opérande SYME dans DEFI\_FOND\_FISS, ce qui revient à représenter un quart de la fissure. Ainsi, il faut diviser la valeur théorique de référence du taux de restitution global par 4.

La forme bilinéaire  $g(u, v)$  vérifie les propriétés suivantes :

$$g(u, u) = G(u)$$

$$g(u, v) = \frac{G(u+v) - G(u-v)}{4}$$

d'où

$$g(u-v, u+v) = \frac{G(2u) - G(-2v)}{4} = G(u) - G(v)$$

### 7.4 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Type de référence	% différence
$G$ global : $G(u)$	36,4	AUTRE_ASTER	0.41%
$G$ bilinéaire : $g(u, u)$	36,4	AUTRE_ASTER	0.41%
$G$ global : $G(v)$	13.72	AUTRE_ASTER	0.10%
$G$ bilinéaire : $g(v, v) - form.1$	13.72	AUTRE_ASTER	0.10%
$G$ global : $G(u+v)$	95.04	AUTRE_ASTER	0.10%
$G$ bilinéaire : $g(u+v, u+v) - form.1$	95.04	AUTRE_ASTER	0.10%
$G$ global : $G(u-v)$	5.48	AUTRE_ASTER	0.10%

$G$ bilinéaire : $g(u-v, u-v)$ - form.1	5.48	AUTRE_ASTER	0.10%
$G$ bilinéaire : $g(v, u)$ - form.2	22.4	AUTRE_ASTER	0.10%
$G$ bilinéaire : $g(u-v, u+v)$ - form.3	22.82	AUTRE_ASTER	0.10%

On désigne par  $u$  le déplacement correspondant au chargement 1, et  $v$  le déplacement correspondant au chargement 2. Les chargements 3 et 4 correspondant aux déplacements  $(u+v)$  et  $(v-u)$ .

## 8 Modélisation F

Calcul de la forme bilinéaire de  $G$  local.

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation

Le maillage est identique à celui de la modélisation E.

Chargement 1 : Idem modélisation B.  
Chargement 2 :  $Face\ x=10.$  : contrainte uniforme de traction  $\sigma_z=1$  ,  
 $Face\ z=10.$  : contrainte uniforme de traction  $\sigma_x=1$  (cisaillement).  
Chargement 3 : Chargement 1 + Chargement 2.  
Chargement 4 : Chargement 2 – Chargement 1.

Quatre calculs statiques sont réalisés produisant respectivement les déplacements  $u, v, u+v$ , et  $v-u$ .

### 8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2774  
Nombre de mailles et 392 HEXA20 et 216 PENTA15  
type :

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes.

### 8.3 Remarque

Le maillage ne représente que le huitième du bloc tridimensionnel complet. Par contre, on utilise l'opérande SYME dans DEFI\_FOND\_FISS, ce qui revient à représenter un quart de la fissure. Ainsi, il faut diviser la valeur théorique de référence du taux de restitution global par 4.

La forme bilinéaire  $g(u, v)$  vérifie les propriétés suivantes :

$$g(u, u) = G(u)$$

$$g(u, v) = \frac{G(u+v) - G(u-v)}{4}$$

d'où

$$g(u-v, u+v) = \frac{G(2u) - G(-2v)}{4} = G(u) - G(v)$$

Le calcul avec les options ' $G\_MAX$ ' et ' $CALC\_K\_MAX$ ' illustre la méthode pour maximiser  $G$  ou  $KI$  en présence de charges signées et non signées. Les chargements 1 et 3 sont ici définis comme signés, les chargements 2 et 4 étant non signés.

Les deux options se distinguent par la prise en compte ( $CALC\_K\_MAX$ ) ou non ( $G\_MAX$ ) de l'éventuelle interpénétration des lèvres de la fissure ; dans le présent cas test, la solution maximale obtenue correspond à la même combinaison de charges dans les deux cas.

### 8.4 Grandeurs testées et résultats

Les deux premières valeurs testées sont comparées à la solution de référence analytique. Les autres tests sont de type non-régression.

Nœud	Lissage	R_inf	R_sup	Identification	Type de Référence	Référence	Tolérance ( % )
N2667	Lag-Lag	0.1	1.0	$G$ local : $G(u)$	AUTRE_AS TER	11,58	0.80%
N2667	Lag-Lag	0.1	1.0	$G$ bilinéaire : $g(u, u)$	AUTRE_AS TER	11,58	0.80%
N2667	Lag-Lag	0.1	1.0	$G$ MAX : $g(u, u)$	NON_REGR ESSION	30,26	0.60%
N2667	Leg-Leg	0.5	1.5	$G$ local : $G(v)$	NON_REGR ESSION	4,38	0.50%
N2667	Leg-Leg	0.5	1.5	$G$ bilinéaire : $g(v, v)$	NON_REGR ESSION	4,38	0.50%
N2667	Lag-Lag	0.5	1.5	$G$ global : $G(u+v)$	NON_REGR ESSION	30,45	0.50%
N2667	Lag-Lag	0.5	1.5	CALC_K_M AX : $max(G)$	NON_REGR ESSION	153,57	0.50%

## 9 Modélisation G

Calcul avec POST\_K1\_K2\_K3 en 3D.

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation permet de tester les calculs de  $K_I$  et  $G$  à l'aide de POST\_K1\_K2\_K3 lorsque le fond de fissure a été défini non plus par une seule liste de nœuds, mais par deux listes de nœuds dans l'opérateur DEFI\_FOND\_FISS.

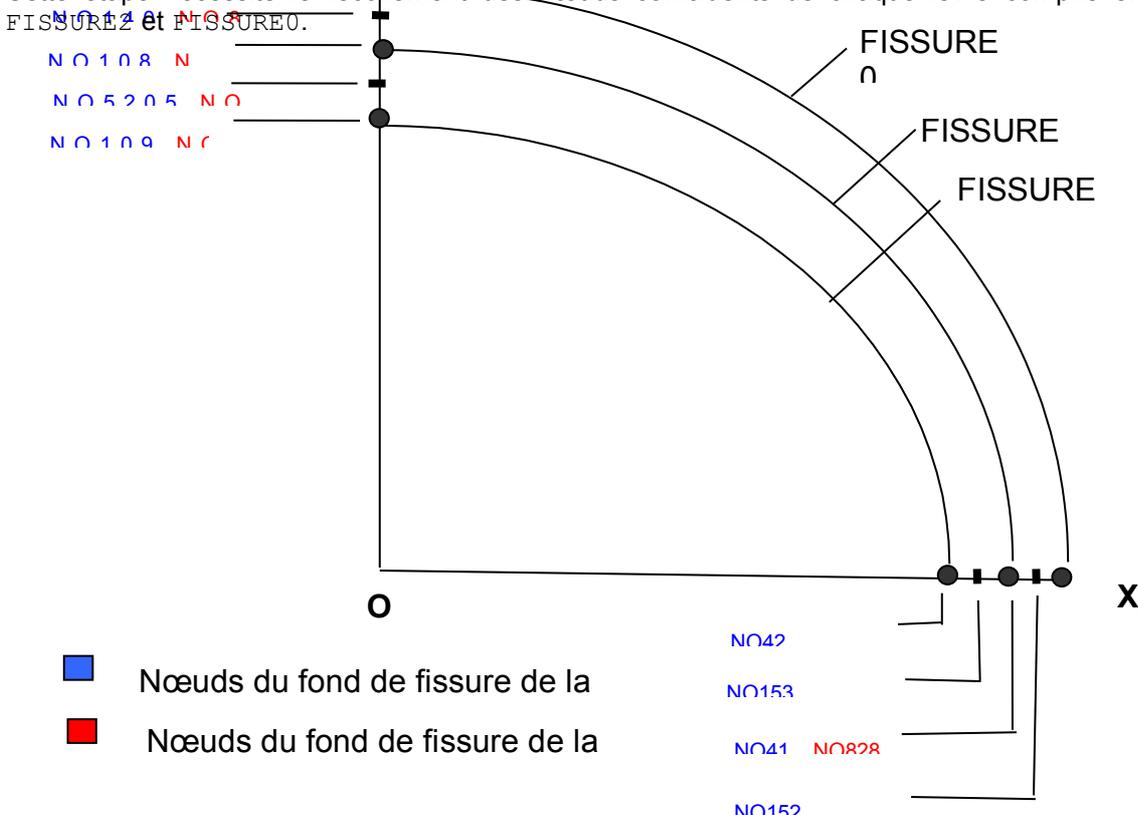
**Remarque :**

Ce type de fond de fissure est obtenu par les mots-clés FOND\_INF et FOND\_SUP de l'opérateur DEFI\_FOND\_FISS [U4.82.01] . Les deux fonds de fissure doivent être géométriquement confondus.

Le maillage est identique à celui de la modélisation B : il contient une fissure circulaire noté FISSURE0 sur le schéma ci-dessous.

On réalise le calcul des coefficients d'intensité de contraintes pour les 3 fonds de fissure suivants :

- FISSURE0 : fissure de la modélisation B (FISSURE0) défini par une seule entité ;
- FISSURE1 : on déplace le fond de fissure initial d'un élément sans modifier le maillage initial. Cette étape nécessite le recollement des nœuds coïncidents de chaque lèvres compris entre FISSURE1 et FISSURE0 ;
- FISSURE2 : on déplace le fond de fissure initial de deux éléments sans modifier le maillage initial. Cette étape nécessite le recollement des nœuds coïncidents de chaque lèvres compris entre FISSURE2 et FISSURE0.



**Remarque :**

Lorsque l'on applique des conditions de recollement ( `LIAISON_GROUP` ) et de symétrie aux nœuds des lèvres , on génère des conditions de blocages surabondantes. Pour remédier à ce problème, les nœuds d'une seule des lèvres ont simultanément des conditions de symétrie et de recollement et pour l'autre lèvre, les nœuds n'ont que des conditions de recollement.

Seul le chargement de traction est pris en compte.

## 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 5227

Nombre de mailles et type : 432 PENTA15 et 784 HEXA20

**Remarque :**

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes, pour obtenir une meilleure précision (éléments de Barsoum).  
Cependant, la présence de nœuds au quart dans la partie recollée de la fissure perturbe significativement le calcul. Il est donc recommandé de dupliquer la structure de données maillage autant de fois que de fonds de fissure grâce à la commande `CREA_MAILLAGE` , et de déplacer les nœuds au quart successivement sur chaque maillage. C'est ce qui est fait dans ce cas test.

## 9.3 Grandeurs testées et résultats

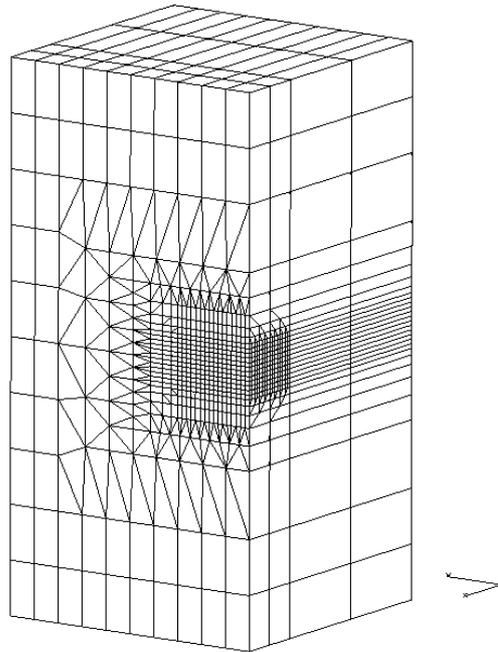
Résultats de POST\_K1\_K2\_K3

Fissure	Identification	Noeud	Référence	Type de référence	% tolérance
Fissure1	<i>KI</i>	Nœud 69	1,547E+06	ANALYTIQUE	0.50
	<i>G</i>	Nœud 69	1,089E+01	ANALYTIQUE	1.00
Fissure2	<i>KI</i>	Nœud 70	1,497E+06	ANALYTIQUE	0.50
	<i>G</i>	Nœud 70	1,020E+01	ANALYTIQUE	1.00

## 10 Modélisation H

Méthode X-FEM.

### 10.1 Caractéristiques de la modélisation



Cette modélisation permet de tester le calcul de  $K_I$  à l'aide de `POST_K1_K2_K3` et `CALC_G` (option `CALC_K_G`) sur une fissure non maillée (méthode X-FEM).

Seul le chargement de traction est pris en compte. Des conditions de symétrie sont imposées sur les deux faces latérales.

### 10.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 6100

Nombre de mailles et type : 1500 PENTA6 et 4600 HEXA8 (maillage linéaire)

### 10.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs testées sont les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  le long du fond de fissure, calculés soit par `POST_K1_K2_K3` (méthode 3), soit par `CALC_G`. Le test s'effectue en 3 points du fond de fissure : points 1 (premier point), 10 et 24 (dernier point).

L'erreur quadratique moyenne correspond à la quantité suivante :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\int_{\Gamma} (K_I^{ref} - K_I^{Aster})^2 ds}{\int_{\Gamma} (K_I^{ref})^2 ds}}$$

Identification	Référence	Type de référence	% tolérance
<code>POST_K1_K2_K3</code>			

<i>KI</i> - point 1	1.595e6	ANALYTIQUE	12.00
<i>KI</i> - point 10	1.595e6	ANALYTIQUE	3.00
<i>KI</i> - point 24	1.595e6	ANALYTIQUE	18.00
<i>Erreur quadratique moyenne</i>			9.90
<b>CALC_G</b>			
<i>KI</i> - point 1	1.595e6	ANALYTIQUE	7,00
<i>KI</i> - point 10	1.595e6	ANALYTIQUE	7.00
<i>KI</i> - point 24	1.595e6	ANALYTIQUE	10.00
<i>Erreur quadratique moyenne</i>			5.3

## Remarques

La précision des résultats obtenus sur une fissure non maillée (méthode X-FEM) est légèrement moins bonne que pour une fissure maillée. Les résultats obtenus avec l'opérateur CALC\_G restent cependant satisfaisants.

On rappelle que le maillage utilisé est linéaire ; l'utilisation d'un maillage plus fin permet d'améliorer la précision du résultat, mais au détriment des temps de calcul.

Le rayon d'enrichissement autour du fond de fissure (paramètre RAYON\_ENRI de DEFI\_FISS\_XFEM) a une influence négligeable sur les résultats de CALC\_G et une influence faible sur les résultats de POST\_K1\_K2\_K3. Pour l'opérateur CALC\_G, les lissages de type LAGRANGE ne permettent pas d'avoir des résultats facilement exploitables ; un lissage de type LEGENDRE est donc à privilégier.

## 11 Modélisation I

Méthode X-FEM en axi-symétrique.

### 11.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation permet de tester le calcul de  $K_I$  à l'aide de `POST_K1_K2_K3` et `CALC_G` (option `CALC_K_G`) sur une fissure axi-symétrique non maillée (méthode X-FEM).

Deux types de chargements sont considérés. Le premier est de traction simple appliquée sur les bords haut et bas de la plaque. Le deuxième est de traction simple appliquée sur les bords haut et bas de la plaque et une rotation de  $150 \text{ trs/min}$  autour de l'axe symétrique.

### 11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20301

Nombre de mailles et type : 20000 QUA4 et 600 SE2 (maillage linéaire)

### 11.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs de  $G$  et  $K_I$  calculées par la commande `CALC_G` option '`CALC_K_G`' et par la commande `POST_K1_K2_K3`, ainsi que la valeur de  $G$  calculée par la commande `CALC_G` (option '`CALC_G`'). Puisque la modélisation est axisymétrique, la relation entre les taux de restitution d'énergie global et local est [R7.02.01] :  $G_{réf}(\theta) = G(s) \cdot a$ , soit ici  $G_{réf} = 23.17 \text{ J/m}$  pour la valeur de  $G$  calculée avec l'option '`CALC_G`'.

Chargement 1: traction simple appliquée sur les bords haut et bas de la plaque

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance ( % )
$G$ ( <code>CALC_G</code> option ' <code>CALC_K_G</code> ' )	'ANALYTIQUE'	11,59	2,1%
$K_I$ ( <code>CALC_G</code> option ' <code>CALC_K_G</code> ' )	'ANALYTIQUE'	1,60E+06	6,0%
$G$ ( <code>CALC_G</code> option ' <code>CALC_K_G</code> ' )	'AUTRE_ASTER'	11,78	0,4%
$K_I$ ( <code>CALC_G</code> option ' <code>CALC_K_G</code> ' )	'AUTRE_ASTER'	1,64E+06	2,0%
$G$ ( <code>CALC_G</code> option ' <code>CALC_G</code> ' )	'ANALYTIQUE'	23,17	2,1%
$G$ ( <code>POST_K1_K2_K3</code> )	'ANALYTIQUE'	11,59	6,0%
$K_I$ ( <code>POST_K1_K2_K3</code> )	'ANALYTIQUE'	1,60E+06	6,0%

Chargement 2: traction simple appliquée sur les bords haut et bas de la plaque et une rotation de  $150 \text{ trs/min}$  autour de l'axe symétrique

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance ( % )
$G$ ( <code>CALC_G</code> option ' <code>CALC_K_G</code> ' )	'AUTRE_ASTER'	2136,52	0,3%

$KI$ ( CALC_G option 'CALC_K_G' )	'AUTRE_ASTER'	2,191E+07	2,5%
$G$ ( CALC_G option 'CALC_G' )	'AUTRE_ASTER'	4273,04	0,3%
$G$ (POST_K1_K2_K3)	'AUTRE_ASTER'	2136,52	4,0%
$KI$ (POST_K1_K2_K3)	'AUTRE_ASTER'	2,191E+07	2,5%

## 11.4 Remarques

Dans ce cas test, le ratio  $a/W$  entre la taille de la fissure  $a$  et la largeur  $W$  est 0,2 . Les effets de bords contribuent donc à la différence entre la solution numérique pour un bord fini et la solution de référence pour un milieu continu.

## 12 Modélisation J

Fond de fissure fermé, calcul de  $G$  pour les éléments incompressibles.

### 12.1 Caractéristiques de la modélisation

Identiques à la modélisation A sauf les éléments utilisés sont 3D\_INCO\_UPG et 3D\_INCO\_UP.

### 12.2 Caractéristiques du maillage

Identiques à la modélisation A

### 12.3 Remarque

On utilise le mot clé SYME dans l'opérateur CALC\_G pour multiplier automatiquement par deux le taux de restitution d'énergie calculé sur une seule lèvres de la fissure, lorsque l'opérande FOND\_FISS est absent. Quand FOND\_FISS est présent, l'information sur la symétrie est récupérée directement dans le concept fond\_fiss créé via DEFI\_FOND\_FISS.

### 12.4 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Type de référence	% tolérance
G global	145.600	ANALYTIQUE	2,0
G local Nœud N403 - G Lagrange	11.586	ANALYTIQUE	4,0
G local Nœud N2862 - G Lagrange	11.586	ANALYTIQUE	1,0
G local Nœud N375 - G Lagrange	11.586	ANALYTIQUE	3,5
G local Nœud N292 - G Lagrange	11.586	ANALYTIQUE	4,0
$\max(G \text{ local})$ - G Lagrange	11.590	ANALYTIQUE	5,0
$\min(G \text{ local})$ - G Lagrange	11.586	ANALYTIQUE	1,0
G local Nœud N403 - G Lagrange_no_no	11.586	ANALYTIQUE	2,5
G local Nœud N2862 - G Lagrange_no_no	11.586	ANALYTIQUE	2,0
G local Nœud N375 - G Lagrange_no_no	11.586	ANALYTIQUE	2,0
G local Nœud N292 - G Lagrange_no_no	11.586	ANALYTIQUE	3,0
$\max(G \text{ local})$ - G Lagrange_no_no	11.715	ANALYTIQUE	2,0
$\min(G \text{ local})$ - G Lagrange_no_no	11.575	ANALYTIQUE	2,0
G local Nœud N403 - G Lagrange_regu	11.586	ANALYTIQUE	2,0
G local Nœud N2862 - G Lagrange_regu	11.76000	NON_REGRESSION	1.00E-004
G local Nœud N375 - G Lagrange_regu	11.76472	NON_REGRESSION	1.00E-004
G local Nœud N292 - G Lagrange_regu	11.74686	NON_REGRESSION	1.00E-004
$\max(G \text{ local})$ - G Lagrange_regu	11.78463	NON_REGRESSION	1.00E-004
$\min(G \text{ local})$ - G Lagrange_regu	11.73482	NON_REGRESSION	1.00E-004

## 13 Modélisation K

---

On teste  $K$  en axisymétrique pour les éléments incompressibles

### 13.1 Caractéristiques de la modélisation

Identiques à la modélisation C sauf les éléments utilisés sont `AXIS _INCO_UPG` et `AXIS _INCO_UP`.

### 13.2 Caractéristiques du maillage

Identique à la modélisation C

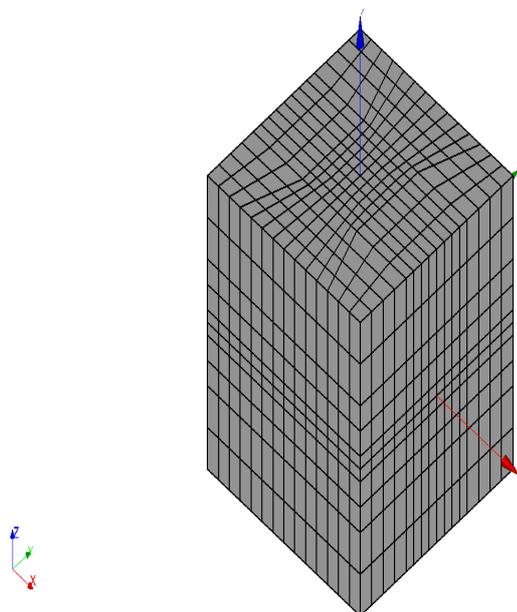
### 13.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Méthode	Référence	Type de référence	% tolérance
$G$	CALC_G	23.2	ANALYTIQUE	2
$G$	CALC_K_G	23.2	ANALYTIQUE	2
$KI$	CALC_K_G	1.595769E6	ANALYTIQUE	3,5
$KI$	CALC_K_G	1.643E+06	ANALYTIQUE	3

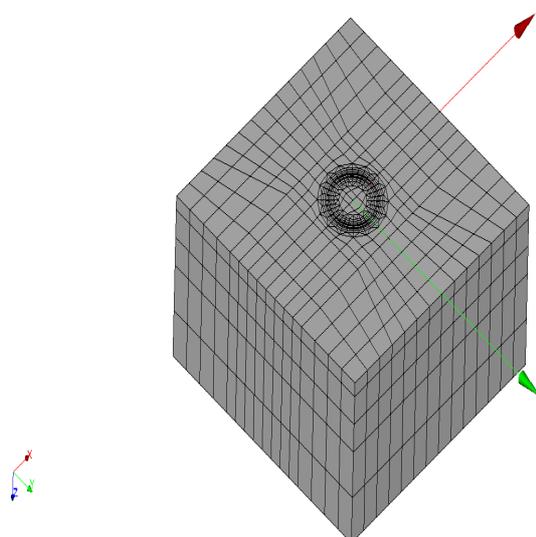
## 14 Modélisation L

Le fond de fissure est fermé. On calcule  $G$ .

### 14.1 Caractéristiques de la modélisation



L'intérêt de cette modélisation est de repartir de la modélisation A et de symétriser le maillage.



Ainsi, nous retrouvons la discrétisation de la couronne de la modélisation A.

Seul le chargement de traction est pris en compte.

### 14.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 18571

Nombre de mailles et type : 3136 HEXA20 et 1728 PENTA15

## 14.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Type de référence	% tolérance
G local Nœud <i>N11</i> - G Lagrange_regu	11.586	ANALYTIQUE	4,0
G local Nœud <i>N31</i> - G Lagrange_regu	11.586	ANALYTIQUE	4,0
G local Nœud <i>N15</i> - G Lagrange_regu	11.586	ANALYTIQUE	4,0
G local Nœud <i>N22</i> - G Lagrange_regu	11.586	ANALYTIQUE	4,0

## 15 Synthèses des résultats

---

Les conclusions de ce cas test sont les suivantes :

- La définition et le calcul de  $G$  local sur des fonds de fissure fermés est validé. On vérifie en particulier l'indépendance de  $G$  local vis-à-vis de l'angle pour une fissure et un chargement axisymétriques. On constate un écart de moins de 2% sur l'ensemble du fond de fissure par les méthodes 'LAGRANGE', 'LAGRANGE\_NO\_NO' et 'LAGRANGE\_REGU'.
- La commande `POST_K1_K2_K3`, qui permet de calculer les facteurs d'intensité de contraintes en exploitant le saut de déplacements sur les lèvres de la fissure, est également validé. Cette méthode, moins précise que `CALC_G`, permet d'obtenir ici (avec un maillage approprié : nœuds milieux des arêtes touchant le fond de fissure déplacés au quart de ces arêtes) des valeurs de  $K1$  et  $K3$  à moins de 2% de la référence.

Trois méthodes d'interpolation sont utilisées et donnent des résultats proches. La méthode 3 est intéressante car elle fournit une valeur unique des facteurs d'intensité de contrainte et non pas une valeur maximale et une valeur minimale.

L'utilisation de `POST_K1_K2_K3` pour étudier une fissure par relâchement de nœuds est testée et donne des résultats satisfaisants.

- On valide le calcul de la forme bilinéaire de  $G$  et les options `G_MAX` et `CALC_K_MAX`.
- La méthode X-FEM permet d'évaluer les facteurs d'intensité des contraintes  $K$  sur un maillage non fissuré avec une erreur inférieure à 10%.
- On valide les calculs pour éléments `3D_INCO_UPG`, `3D_INCO_UP`, `AXIS_INCO_UPG` et `AXIS_INCO_UP`