

## SSLV109 - Cylindre plein en pression non uniforme mode 1

---

### Résumé :

Ce test valide tous les éléments de Fourier (triangles et quadrangles de degrés 1 et 2) en élasticité. Les fonctionnalités sont les suivantes :

- pression variable en espace,
- déplacements imposés,
- matrices de rigidité Fourier mode 1,
- contraintes aux nœuds Fourier mode 1,
- recombinaison de Fourier sur les déplacements et contraintes (modélisation A),
- matériau isotrope transverse (modélisation F).

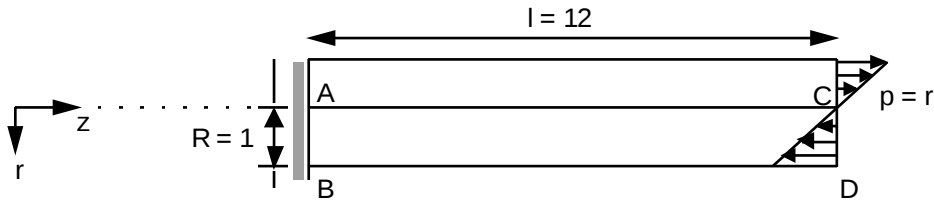
Le test a une solution analytique quadratique en déplacements.

L'intérêt du test réside dans :

- la comparaison entre solution calculée et solution analytique sur les différents éléments finis,
- la comparaison des résultats avec le Code PERMAS sur les éléments TRIA6 (modélisation A).

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Le domaine modélisé est  $ACDB$  (plan  $\theta=0$ ).

### 1.2 Propriétés de matériaux

$$E = 72 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

$$u_r(A) = u_z(A) = u_\theta(A) = 0$$

$$u_z(AB) = 0$$

$$p = \bar{p} \frac{r}{R} \cos \theta$$

avec  $\bar{p} = 1$ . et  $R = 1$  appliqué en  $z = 12$ .

### 1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'analyse statique.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

$$u_r(r, z, \theta) = u(r, z) \cos \theta \quad \text{avec } u(r, z) = \frac{M}{2EI} z^2 + \frac{v \bar{p}}{2ER} r^2$$

$$u_z(r, z, \theta) = v(r, z) \cos \theta \quad \text{avec } v(r, z) = -\frac{\bar{p}}{2EI} r z$$

$$u_\theta(r, z, \theta) = w(r, z) (-\sin \theta) \quad \text{avec } w(r, z) = \frac{M}{2EI} z^2 - \frac{v \bar{p}}{2ER} r^2$$

Toutes les contraintes sont nulles sauf  $\sigma_{zz}(r, z) = -\frac{\bar{p}}{R} r$ .

Les données ont été choisies de telle façon que  $u(x) = u(0, l) = 1$ .

Les déplacements s'écrivent donc ici :

$$u(r, z) = \frac{z^2}{144} + \frac{r^2}{480} ; \quad v(r, z) = -\frac{r z}{72} ; \quad w(r, z) = \frac{z^2}{144} - \frac{r^2}{480}$$

et :

$$\sigma_{zz}(r, z) = -r$$

### 2.2 Résultats de référence

$$u, v, w, \sigma_{zz} \quad \text{en } \begin{matrix} r = 0., 0.5, 1. \\ z = 0., 6., 12. \end{matrix}$$

$$u_r, u_z, u_\theta \quad \begin{matrix} r = 0. \\ \text{en } z = 6. \\ \theta = 45^\circ \end{matrix}$$

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

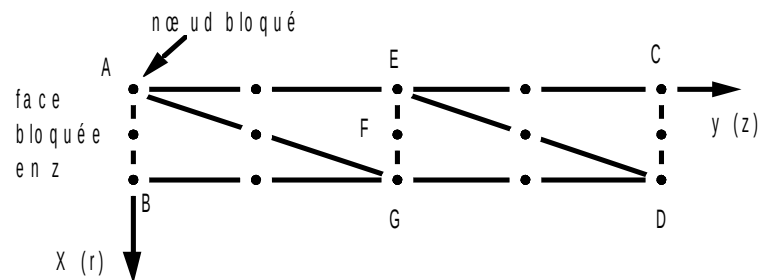
### 2.4 Références bibliographiques

- 1) PERMAS-HS. Axisymmetric Continua with arbitrary loads. Stuttgart 1985. INTES publication n°224 pp 42 - 49.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des noeuds :  $A = N1$   $B = N3$   $C = N13$   
 $D = N15$   $E = N7$   $F = N8$   $G = N9$



Conditions limites :

DDL\_IMPO : ( NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)  
face AB ( GROUP\_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES\_REP (GROUP\_MA : Bout PRES : p)

$p$  étant défini par AFFE\_CHAR\_MECA\_F par  $p(X) = -X$

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 4 TRIA6, 1SEG3 sur segment CD

## 4 Résultats de la modélisation A

### 4.1 Valeurs testées

| Nœud     | Grandeur      | Référence               |
|----------|---------------|-------------------------|
| <i>B</i> | <i>u</i>      | $2.0833 \cdot 10^{-3}$  |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | $-2.0833 \cdot 10^{-3}$ |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |
| <i>E</i> | <i>u</i>      | 0.25                    |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | 0.25                    |
|          | $\sigma_{zz}$ | 0.                      |
| <i>F</i> | <i>u</i>      | 0.250521                |
|          | <i>v</i>      | -0.04166                |
|          | <i>w</i>      | 0.0249479               |
|          | $\sigma_{zz}$ | -0.5                    |
| <i>G</i> | <i>u</i>      | 0.252083                |
|          | <i>v</i>      | -0.083333               |
|          | <i>w</i>      | 0.247917                |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |
| <i>C</i> | <i>u</i>      | 1.                      |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | 1.                      |
|          | $\sigma_{zz}$ | 0.                      |
| <i>D</i> | <i>u</i>      | 1.00208                 |
|          | <i>v</i>      | -0.16666                |
|          | <i>w</i>      | 0.99791                 |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |

### 4.2 Remarques

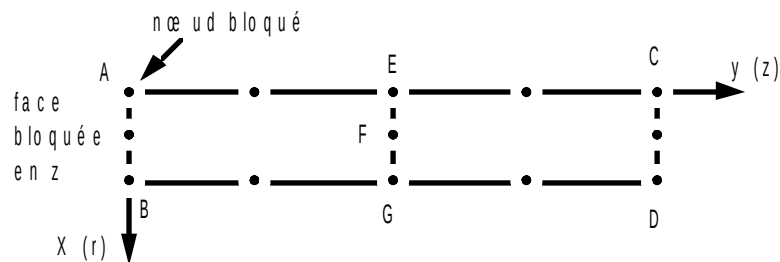
La solution analytique est trouvée avec une précision  $< 0.02$  pour les déplacements et  $< 0.1$  pour les contraintes.

Avec une formule d'intégration numérique à 6 points de GAUSS (au lieu de 3) pour calculer la raideur, on trouverait la relation à  $10^{-10}$  près (comme PERMAS).

## 5 Modélisation B

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds :  $A = N1$   $B = N3$   $C = N13$   
 $D = N15$   $E = N7$   $F = N8$   $G = N9$



Conditions limites :

DDL\_IMPO : ( NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)  
face AB ( GROUP\_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES\_REP (GROUP\_MA : Bout PRES : p)

$p$  étant défini par AFFE\_CHAR\_MECA\_F par  $p(X) = -X$

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD8, 1 SEG3 sur segment CD

## 6 Résultats de la modélisation B

### 6.1 Valeurs testées

| Nœud     | Grandeur      | Référence               |
|----------|---------------|-------------------------|
| <i>B</i> | <i>u</i>      | $2.0833 \cdot 10^{-3}$  |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | $-2.0833 \cdot 10^{-3}$ |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |
| <i>E</i> | <i>u</i>      | 0.25                    |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | 0.25                    |
|          | $\sigma_{zz}$ | 0.                      |
| <i>F</i> | <i>u</i>      | 0.250521                |
|          | <i>v</i>      | -0.04166                |
|          | <i>w</i>      | 0.0249479               |
|          | $\sigma_{zz}$ | -0.5                    |
| <i>G</i> | <i>u</i>      | 0.252083                |
|          | <i>v</i>      | -0.08333                |
|          | <i>w</i>      | 0.247917                |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |
| <i>C</i> | <i>u</i>      | 1.                      |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | 1.                      |
|          | $\sigma_{zz}$ | 0.                      |
| <i>D</i> | <i>u</i>      | 1.00208                 |
|          | <i>v</i>      | -0.16666                |
|          | <i>w</i>      | 0.99791                 |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |

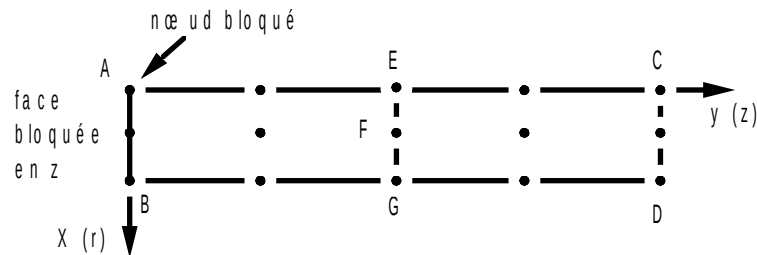
### 6.2 Remarques

La solution analytique est trouvée avec 10 ou 11 chiffres significatifs.

## 7 Modélisation C

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds :  $A = N1$   $B = N3$   $C = N13$   
 $D = N15$   $E = N7$   $F = N8$   $G = N9$



Conditions limites :

DDL\_IMPO : ( NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)  
face AB ( GROUP\_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES\_REP (GROUP\_MA = Bout, PRES = p)

$p$  étant défini par AFFE\_CHAR\_MECA\_F par  $p(x) = -x$

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD9, 1 SEG3 sur segment CD

## 8 Résultats de la modélisation C

### 8.1 Valeurs testées

| Nœud     | Grandeur      | Référence               |
|----------|---------------|-------------------------|
| <i>B</i> | <i>u</i>      | $2.0833 \cdot 10^{-3}$  |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | $-2.0833 \cdot 10^{-3}$ |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |
| <i>E</i> | <i>u</i>      | 0.25                    |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | 0.25                    |
|          | $\sigma_{zz}$ | 0.                      |
| <i>F</i> | <i>u</i>      | 0.250521                |
|          | <i>v</i>      | -0.04166                |
|          | <i>w</i>      | 0.0249479               |
|          | $\sigma_{zz}$ | -0.5                    |
| <i>G</i> | <i>u</i>      | 0.252083                |
|          | <i>v</i>      | -0.08333                |
|          | <i>w</i>      | 0.247917                |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |
| <i>C</i> | <i>u</i>      | 1.                      |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | 1.                      |
|          | $\sigma_{zz}$ | 0.                      |
| <i>D</i> | <i>u</i>      | 1.00208                 |
|          | <i>v</i>      | -0.16666                |
|          | <i>w</i>      | 0.99791                 |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |

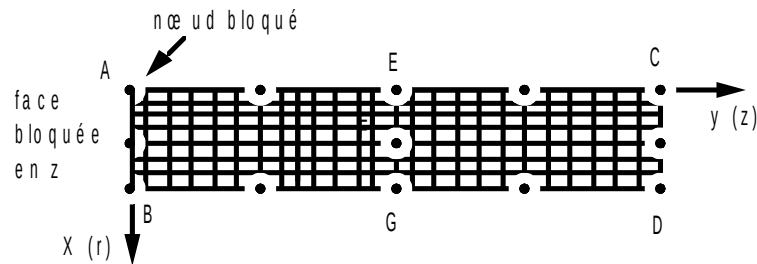
### 8.2 Remarques

La solution analytique est trouvée avec 10 ou 11 chiffres significatifs.

## 9 Modélisation D

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds :  $A=N1$   $B=N1129$   $C=N1369$   
 $D=N2169$   $E=N141$   $F=N705$   $G=N1269$



Conditions limites :

DDL\_IMPO : ( NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)  
face AB ( GROUP\_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES\_REP (GROUP\_MA : Bout PRES : p)

$p$  étant défini par AFFE\_CHAR\_MECA\_F par  $p(x) = -x$

### 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2169

Nombre de mailles et types : 1920 QUAD4, 8 SEG2 sur segment CD

## 10 Résultats de la modélisation D

### 10.1 Valeurs testées

| Nœud     | Grandeur      | Référence               |
|----------|---------------|-------------------------|
| <i>B</i> | <i>u</i>      | $2.0833 \cdot 10^{-3}$  |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | $-2.0833 \cdot 10^{-3}$ |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |
| <i>E</i> | <i>u</i>      | 0.25                    |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | 0.25                    |
|          | $\sigma_{zz}$ | 0.                      |
| <i>F</i> | <i>u</i>      | 0.250521                |
|          | <i>v</i>      | -0.04166                |
|          | <i>w</i>      | 0.0249479               |
|          | $\sigma_{zz}$ | -0.5                    |
| <i>G</i> | <i>u</i>      | 0.252083                |
|          | <i>v</i>      | -0.083333               |
|          | <i>w</i>      | 0.247917                |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |
| <i>C</i> | <i>u</i>      | 1.                      |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | 1.                      |
|          | $\sigma_{zz}$ | 0.                      |
| <i>D</i> | <i>u</i>      | 1.00208                 |
|          | <i>v</i>      | -0.16666                |
|          | <i>w</i>      | 0.99791                 |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |

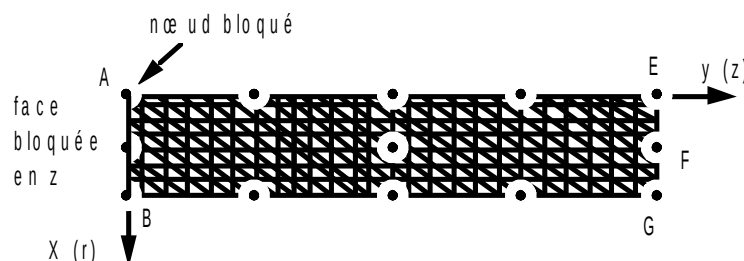
### 10.2 Remarques

Pour obtenir une précision de l'ordre de 1 % sur les contraintes, il est nécessaire de modéliser la structure très finement (8 éléments radialement et 240 axialement).

## 11 Modélisation E

### 11.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds :  $A = N1$   $B = N2421$   
 $E = N121$   $F = N1331$   $G = N2541$



Conditions limites :

DDL\_IMPO : ( NOEUD : A  $DX = 0.$   $DY = 0.$   $DZ = 0.$ )  
face AB ( GROUP\_NO : AB  $DY = 0.$ )

Pression sur la face EG : PRES\_REP (GROUP\_MA : Bout PRES : p)

$p$  étant défini par AFFE\_CHAR\_MECA\_F par  $p(x) = -x$

### 11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2541

Nombre de mailles et types : 4800 TRIA3, 20 SEG2 sur segment EG

### 11.3 Remarques

Pour diminuer le nombre de nœuds, on a modélisé la structure pour  $y \leq 6$ .  
La précision sur les résultats est néanmoins moindre que pour les éléments QUAD4.

## 12 Résultats de la modélisation E

### 12.1 Valeurs testées

| Nœud     | Grandeur      | Référence               |
|----------|---------------|-------------------------|
| <i>B</i> | <i>u</i>      | $2.0833 \cdot 10^{-3}$  |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | $-2.0833 \cdot 10^{-3}$ |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |
| <i>E</i> | <i>u</i>      | 0.25                    |
|          | <i>v</i>      | 0.                      |
|          | <i>w</i>      | 0.25                    |
|          | $\sigma_{zz}$ | 0.                      |
| <i>F</i> | <i>u</i>      | 0.250521                |
|          | <i>v</i>      | -0.04166                |
|          | <i>w</i>      | 0.249479                |
|          | $\sigma_{zz}$ | -0.5                    |
| <i>G</i> | <i>u</i>      | 0.252083                |
|          | <i>v</i>      | -0.083333               |
|          | <i>w</i>      | 0.247917                |
|          | $\sigma_{zz}$ | -1.                     |

### 12.2 Remarques

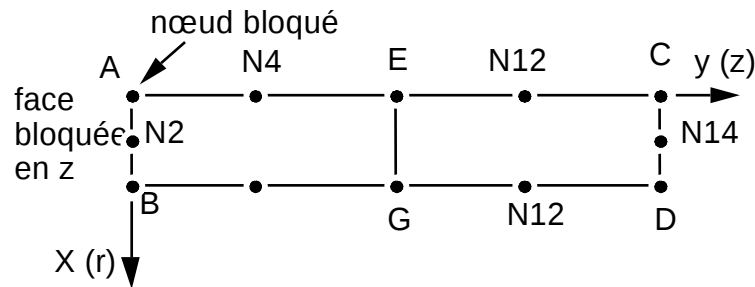
La précision sur les déplacements est inférieure à 3%, celle sur les contraintes inférieure à 2 %.

Sur cet exemple, les TRIA3 convergent nettement moins rapidement que les QUAD4 vers la solution exacte.

## 13 Modélisation F

### 13.1 Caractéristiques de la modélisation

Numéro des nœuds :  $A = N1$   $B = N3$   $C = N13$   
 $D = N15$   $E = N7$   $G = N9$



Conditions limites :

DDL\_IMPO : ( NOEUD : A DX = 0. DY = 0. DZ = 0.)  
face AB ( GROUP\_NO : AB DY = 0.)

Pression sur la face CD : PRES\_REP (GROUP\_MA : Bout PRES : p)

$p$  étant défini par AFFE\_CHAR\_MECA\_F par  $p(X) = -X$

### 13.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 15

Nombre de mailles et types : 2 QUAD8, 1SEG3 sur segment CD

## 14 Résultats de la modélisation F

### 14.1 Valeurs testées

| Nœud | Grandeur      | Référence  |
|------|---------------|------------|
| N2   | $u$           | 2.6041666  |
|      | $w$           | -2.6041666 |
| A    | $\sigma_{zz}$ | 0.         |
| B    | $\sigma_{zz}$ | -1.        |
| N4   | $u$           | 0.0625     |
|      | $w$           | 0.0625     |
| E    | $u$           | 0.25       |
|      | $w$           | 0.25       |
|      | $\sigma_{zz}$ | 0.         |
| G    | $v$           | -0.083333  |
|      | $\sigma_{zz}$ | -1.        |
| N10  | $u$           | 0.5625     |
|      | $w$           | 0.5625     |
| N12  | $v$           | -0.125     |
| C    | $u$           | 1.         |
|      | $w$           | 1.         |
|      | $\sigma_{zz}$ | 0.         |
| N14  | $v$           | -0.083333  |
| D    | $v$           | -0.166666  |
|      | $\sigma_{zz}$ | -1.        |

## 15 Synthèse des résultats

---

Les éléments d'ordre 2 donnent la solution analytique.

Les éléments d'ordre 1 convergent lentement vers la solution et nécessitent des maillages très fins.  
Les temps calculs restent toutefois raisonnables.