
SSLV100 - Cylindre creux en déformations planes

Résumé :

Ce test permet de valider les éléments de déformation plane sur les fonctionnalités suivantes :

- pression répartie,
- matrice de rigidité,
- déplacements imposés :
 - par ddl,
 - par face d'élément.

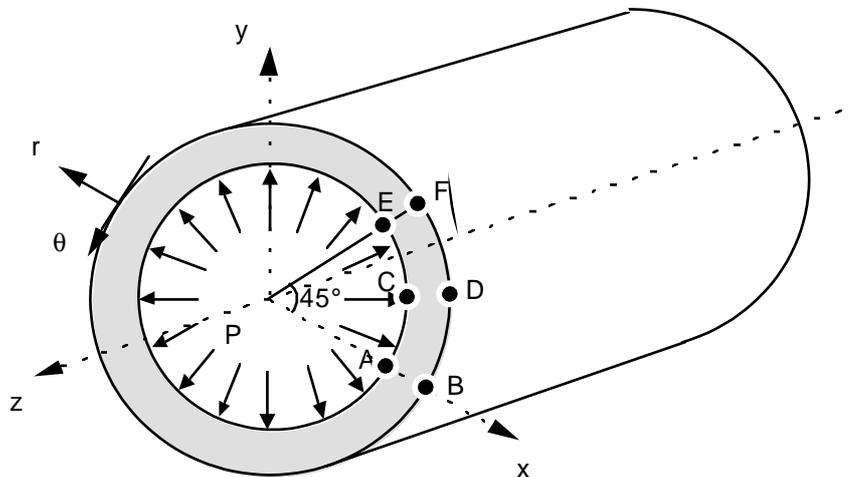
Il comprend 4 modélisations.

Les 3 premières correspondent à des éléments de type différent (linéaires et quadratiques).

La dernière valide les déplacements imposés par face (blocage de la composante normale).

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Rayon interne $a = 0.1 \text{ m}$
Rayon externe $b = 0.2 \text{ m}$

Coordonnées des points :

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>x</i>	0.100	0.200	$0.1 \cos(22.5)$	$0.2 \cos(22.5)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
<i>y</i>	0.	0.	$0.1 \sin(22.5)$	$0.2 \sin(22.5)$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
<i>z</i>	0	0.	0.	0.	0.	0.

1.2 Propriétés des matériaux

$$E = 210^5 \text{ Mpa}$$

$$\nu = 0.3$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Pression interne : $P = 60. \text{ MPa}$

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Analytique

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= 2\nu P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_{rr} &= P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[1 + \frac{b^2}{r^2} \right] \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \\ u_r &= \frac{P}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} (1 + \nu) \left[(1 - 2\nu) + \frac{b^2}{r^2} \right] r\end{aligned}$$

On obtient :

Pour $r=0.1$	$u_r = 5,72 \cdot 10^{-5}$	Pour $r=0.2$	$u_r = 3,64 \cdot 10^{-5}$
	$\sigma_{rr} = -60.$		$\sigma_{rr} = 0.$
	$\sigma_{\theta\theta} = 100.$		$\sigma_{\theta\theta} = 40.$
	$\sigma_{zz} = 12.$		$\sigma_{zz} = 12.$
	$\sigma_{r\theta} = 0.$		$\sigma_{r\theta} = 0.$

Passage dans le système d'axes cartésiens :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta - 2 \sigma_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta + 2 \sigma_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{rr} \sin \theta \cos \theta - \sigma_{\theta\theta} \sin \theta \cos \theta - 2 \sigma_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

avec :

- $\theta = 0^\circ$ aux points A et B ,
- $\theta = 22.5^\circ$ aux points C et D ,
- $\theta = 45^\circ$ aux points E et F .

2.2 Résultats de référence

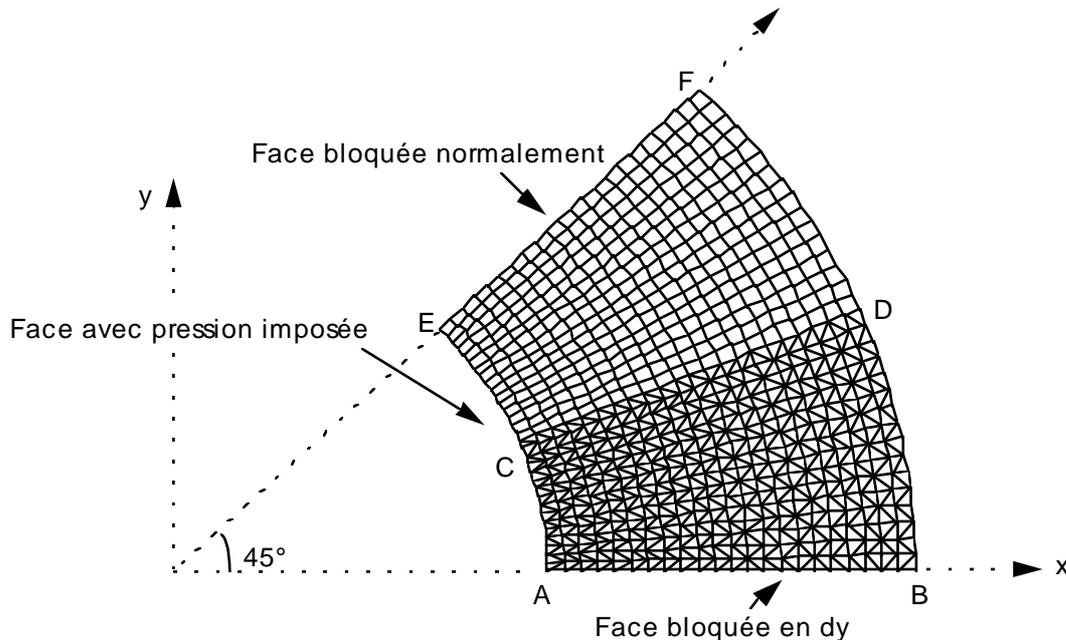
Déplacements (u, v) et contraintes $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy})$ aux points A, B, C, D, E, F .

2.3 Références bibliographiques

- [1] Y. C. FUNG. Foundations of solid mechanics. Prentice-hall, inc. Englewood Cliffs. NJ. 1965 p. 243 à 245.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation : d-plan (QUAD4 + TRIA3)



Conditions limites :

côté *AB*

DDL_IMPO = (GROUP_NO = bordAB DY = 0.)

côté *EF*

FACE_IMPO = (GROUP_MA = faceEFDNOR = 0.)

pression sur la face *AE*

PRES_REP = (GROUP_MA = faceAE PRES = 60.)

Noms des nœuds :

A = N23

B = N1

C = N391

D = N369

E = N451

F = 751

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 759

Nombre de mailles et types : 704 TRIA3, 352 QUAD4

3.3 Grandeurs testées et résultats

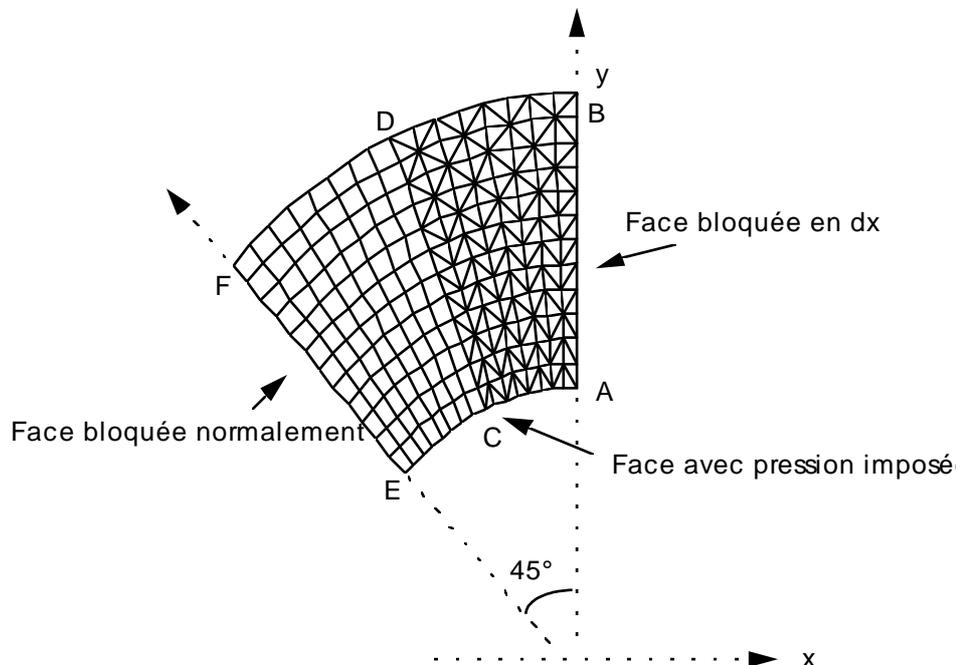
Lieu	Grandeur	Référence	Aster	% différence	tolérance
A	u	$5.72 \cdot 10^{-5}$	$5.7155 \cdot 10^{-5}$	-0.08	10^{-2}
	v	0.	epsilon	-	
	σ_{xx}	-60.	-56.3770	-6.04	
	σ_{yy}	100.	96.3917	-3.61	
	σ_{zz}	12.	12.0044	0.04	
	σ_{xy}	0.	-0.9563	-	
C	u	$5.28459 \cdot 10^{-5}$	$5.2832 \cdot 10^{-5}$	-0.03	10^{-2}
	v	$2.18895 \cdot 10^{-5}$	$2.1777 \cdot 10^{-5}$	-0.51	
	σ_{xx}	-36.56854	-33.5312	-8.31	
	σ_{yy}	76.56854	76.9335	0.48	
	σ_{zz}	12.	13.0207	8.51	
	σ_{xy}	-56.56854	-53.7445	-4.99	
E	u	$4.04465 \cdot 10^{-5}$	$4.0400 \cdot 10^{-5}$	-0.11	10^{-2}
	v	$4.04465 \cdot 10^{-5}$	$4.0400 \cdot 10^{-5}$	-0.11	
	σ_{xx}	20.	23.4926	17.46	
	σ_{yy}	20.	25.4141	27.07	
	σ_{zz}	12.	14.6720	22.27	
	σ_{xy}	-80.	-78.3081	-2.11	
B	u	$3.640 \cdot 10^{-5}$	$3.6405 \cdot 10^{-5}$	0.01	10^{-2}
	v	0.	epsilon	-	
	σ_{xx}	0.	-0.4064	-	
	σ_{yy}	40.	39.8759	-0.31	
	σ_{zz}	12.	11.8408	-1.33	
	σ_{xy}	0.	-0.4447	-	
D	u	$3.36292 \cdot 10^{-5}$	$3.3603 \cdot 10^{-5}$	-0.08	10^{-2}
	v	$1.39297 \cdot 10^{-5}$	$1.3945 \cdot 10^{-5}$	0.11	
	σ_{xx}	5.85786	5.2229	-10.84	
	σ_{yy}	34.14214	33.8961	-0.72	
	σ_{zz}	12.	11.7357	-2.20	
	σ_{xy}	-14.14214	-14.1755	0.24	
F	u	$2.57387 \cdot 10^{-5}$	$2.5710 \cdot 10^{-5}$	-0.11	10^{-2}
	v	$2.57387 \cdot 10^{-5}$	$2.5710 \cdot 10^{-5}$	-0.11	
	σ_{xx}	20.	19.1238	-4.38	
	σ_{yy}	20.	19.6156	-1.92	
	σ_{zz}	12.	11.6218	-3.15	
	σ_{xy}	-20.	-20.1797	0.90	

3.4 Remarques

L'augmentation de l'erreur, quand on passe de AB à CD puis EF , est imputable au maillage (densité en éléments QUAD4 inférieure à celle en TRIA3).

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation : d-plan (QUAD8 + TRIA6)



Conditions limites :

côté AB

DDL_IMPO = (GROUP_NO = bordAB DY = 0.)

côté EF

FACE_IMPO = (GROUP_MA = faceEFDNOR = 0.)

pression sur AE

PRES_REP = (GROUP_MA = faceAE PRES = 60.)

Noms des nœuds :

$A = N2$

$B = N48$

$C = N401$

$D = N424$

$E = N606$

$F = N494$

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 729

Nombre de mailles et types : 192 TRIA6, 96 QUAD8

4.3 Grandeurs testées et résultats

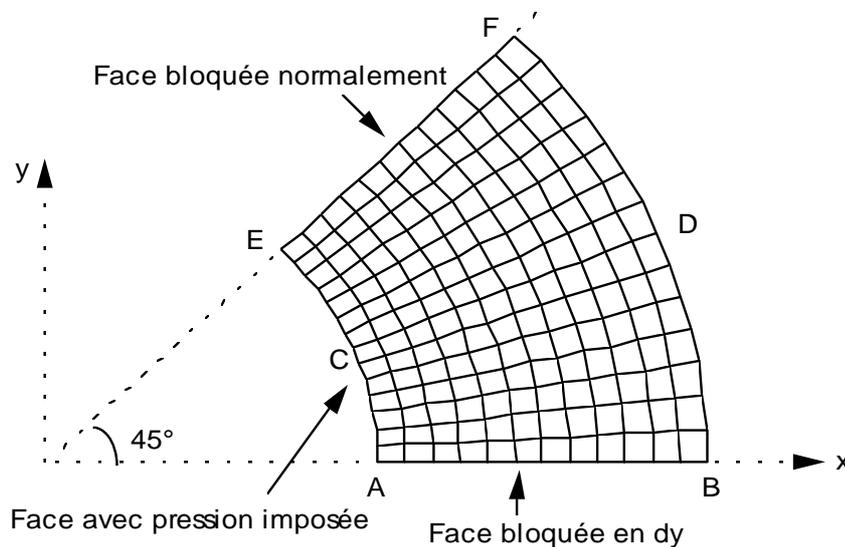
Lieu	Grandeur	Référence	Aster	% différence	tolérance
<i>A</i>	<i>u</i>	0.	eps	-	10^{-2}
	<i>v</i>	$5.72 \cdot 10^{-5}$	$5.7155 \cdot 10^{-5}$	-0.04	
	σ_{xx}	100.	99.7100	-0.29	
	σ_{yy}	-60.	-59.7725	-0.38	
	σ_{zz}	12.	11.9813	-0.16	
	σ_{xy}	0.	0.2643	-	
<i>C</i>	<i>u</i>	$-2.18895 \cdot 10^{-5}$	$-2.1881 \cdot 10^{-5}$	-0.04	10^{-2}
	<i>v</i>	$5.28459 \cdot 10^{-5}$	$5.2826 \cdot 10^{-5}$	-0.04	
	σ_{xx}	76.56854	76.7005	0.17	
	σ_{yy}	-36.56854	-36.4500	-0.32	
	σ_{zz}	12.	12.0751	0.63	
	σ_{xy}	-56.56854	56.2844	-0.50	
<i>E</i>	<i>u</i>	$-4.04465 \cdot 10^{-5}$	$-4.0432 \cdot 10^{-5}$	-0.04	10^{-2}
	<i>v</i>	$4.04465 \cdot 10^{-5}$	$4.0432 \cdot 10^{-5}$	-0.04	
	σ_{xx}	20.	20.0083	$4 \cdot 10^{-4}$	
	σ_{yy}	20.	19.9988	$-6 \cdot 10^{-5}$	
	σ_{zz}	12.	12.0021	$2 \cdot 10^{-4}$	
	σ_{xy}	80.	79.8176	-0.23	
<i>B</i>	<i>u</i>	0.	eps	-	10^{-2}
	<i>v</i>	$3.640 \cdot 10^{-5}$	$3.6390 \cdot 10^{-5}$	-0.03	
	σ_{xx}	40.	39.9924	-0.02	
	σ_{yy}	0.	-0.001338	-	
	σ_{zz}	12.	11.9973	-0.02	
	σ_{xy}	0.	-0.04083	-	
<i>D</i>	<i>u</i>	$-1.39297 \cdot 10^{-5}$	$-1.3926 \cdot 10^{-5}$	-0.03	10^{-2}
	<i>v</i>	$3.36292 \cdot 10^{-5}$	$3.3619 \cdot 10^{-5}$	-0.03	
	σ_{xx}	34.14214	34.1361	-0.02	
	σ_{yy}	5.85786	5.8948	0.63	
	σ_{zz}	12.	12.0093	0.08	
	σ_{xy}	14.14214	14.1596	0.12	
<i>F</i>	<i>u</i>	$-2.57387 \cdot 10^{-5}$	$-2.5731 \cdot 10^{-5}$	-0.03	10^{-2}
	<i>v</i>	$2.57387 \cdot 10^{-5}$	$2.5731 \cdot 10^{-5}$	-0.03	
	σ_{xx}	20.	20.0000	$3 \cdot 10^{-6}$	
	σ_{yy}	20.	19.9996	$-2 \cdot 10^{-5}$	
	σ_{zz}	12.	11.9999	$-7 \cdot 10^{-6}$	
	σ_{xy}	20.	19.9975	$-1 \cdot 10^{-4}$	

4.4 Remarques

L'évolution de l'erreur induite par le maillage suivant *AB* , *CD* ou *EF* , est nettement atténuée par rapport à la modélisation A.

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation : d-plan (QUAD9)



Conditions limites :

côté AB

DDL_IMPO = (GROUP_NO = bordAB DY = 0.)

côté EF

FACE_IMPO = (GROUP_MA = faceEF DNOR = 0.)

pression sur AE

PRES_REP = (GROUP_MA = faceAE PRES = 60.)

Noms des nœuds :

$A = N1$

$B = N47$

$C = N351$

$D = N374$

$E = N569$

$F = N423$

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 725

Nombre de mailles et types : 168 QUAD9

5.3 Grandeurs testées et résultats

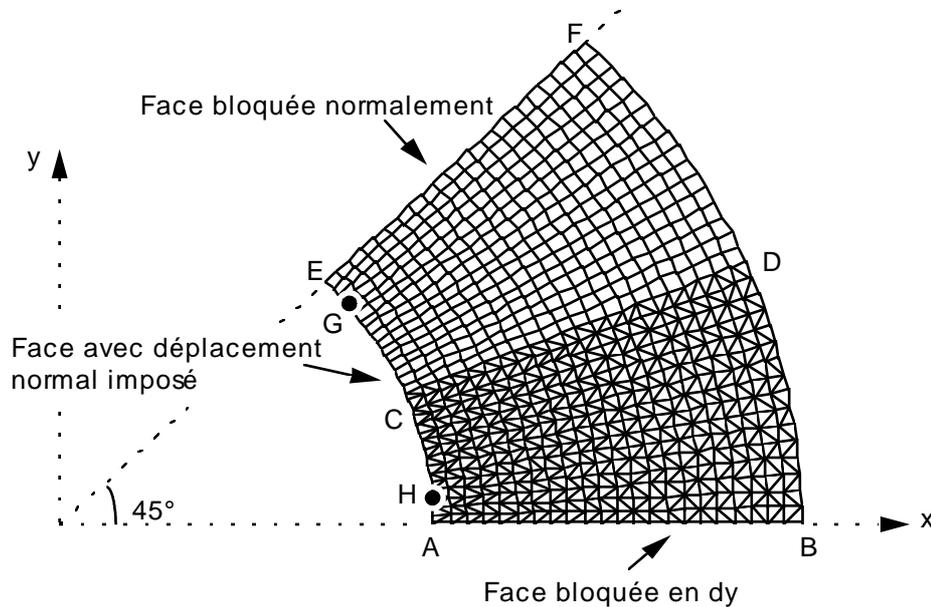
Lieu	Grandeur	Référence	Aster	% différence	tolérance
A	u	$5.72 \cdot 10^{-5}$	$5.7173 \cdot 10^{-5}$	-0.05	10^{-2}
	v	0.	epsilon	-	
	σ_{xx}	-60.	-56.8334	-0.27	
	σ_{yy}	100.	99.84	-0.16	
	σ_{zz}	12.	12.0023	0.02	
	σ_{xy}	0.	-0.00272	-	
C	u	$5.28459 \cdot 10^{-5}$	$5.2821 \cdot 10^{-5}$	-0.05	10^{-2}
	v	$2.18895 \cdot 10^{-5}$	$2.1879 \cdot 10^{-5}$	-0.05	
	σ_{xx}	-36.56854	-36.45	0.32	
	σ_{yy}	76.56854	76.46	-0.14	
	σ_{zz}	12.	12.003	0.02	
	σ_{xy}	-56.56854	-56.45	0.2	
E	u	$4.04465 \cdot 10^{-5}$	$4.0427 \cdot 10^{-5}$	-0.05	10^{-2}
	v	$4.04465 \cdot 10^{-5}$	$4.0427 \cdot 10^{-5}$	-0.05	
	σ_{xx}	20.	19.996	$-2. \cdot 10^{-4}$	
	σ_{yy}	20.	20.011	$5.5 \cdot 10^{-4}$	
	σ_{zz}	12.	12.002	$2. \cdot 10^{-4}$	
	σ_{xy}	-80.	-79.837	0.2	
B	u	$3.640 \cdot 10^{-5}$	$3.6386 \cdot 10^{-5}$	0.04	10^{-2}
	v	0.	epsilon	-	
	σ_{xx}	0.	$-2.7 \cdot 10^{-3}$	-	
	σ_{yy}	40.	40.0011	$-4. \cdot 10^{-4}$	
	σ_{zz}	12.	11.9995	$-4. \cdot 10^{-4}$	
	σ_{xy}	0.	$-4.8 \cdot 10^{-4}$	-	
D	u	$3.36292 \cdot 10^{-5}$	$3.3617 \cdot 10^{-5}$	-0.04	10^{-2}
	v	$1.39297 \cdot 10^{-5}$	$1.3924 \cdot 10^{-5}$	-0.04	
	σ_{xx}	5.85786	5.8557	-0.03	
	σ_{yy}	34.14214	34.143	$2.5 \cdot 10^{-5}$	
	σ_{zz}	12.	11.9996	$3. \cdot 10^{-5}$	
	σ_{xy}	-14.14214	-14.1435	$-1. \cdot 10^{-4}$	
F	u	$2.57387 \cdot 10^{-5}$	$2.5729 \cdot 10^{-5}$	-0.04	10^{-2}
	v	$2.57387 \cdot 10^{-5}$	$2.5729 \cdot 10^{-5}$	-0.04	
	σ_{xx}	20.	19.999	$-3. \cdot 10^{-5}$	
	σ_{yy}	20.	20.0002	$1. \cdot 10^{-5}$	
	σ_{zz}	12.	11.9999	$-9. \cdot 10^{-6}$	
	σ_{xy}	-20.	-20.0025	-0.01	

5.4 Remarques

L'évolution de l'erreur induite par le maillage suivant AB , CD ou EF , est nettement atténuée par rapport à la modélisation A.

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation : d-plan (QUAD4 + TRIA3)



Conditions limites :

côté *AB* D DL_IMPO : (GROUP_NO = bordAB DY = 0.)
 côté *EF* FACE_IMPO : (GROUP_MA = faceEF DNOR = 0.)
 sur *AE* déplacement normal imposé à $5.72 E - 5 m$
 FACE_IMPO : (GROUP_MA = faceAE DNOR = -5.72 E-5)

Noms des nœuds : *A* = N23 *B* = N1 *C* = N391
 D = N369 *E* = N451 *F* = N751
 H = N92 *G* = N447

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 759

Nombre de mailles et types : 704 TRIA3, 352 QUAD4

6.3 Grandeurs testées et résultats

Localisation	Grandeur	Référence	Aster	% différence
C	F_x	0.1360	0.14069	3.45
	F_y	0.056	0.05827	4.06
H	F_x	0.14686	0.13608	7.34
	F_y	0.0108	0.0100	7.04
G	F_x	0.1138	0.114	0.19
	F_y	0.093	0.0936	0.61

6.4 Remarques

On vérifie que les forces nodales de réaction sont nulles en tous les nœuds, sauf sur les nœuds de la ligne AE , EF et AB .

7 Synthèse des résultats

D_plan

Récapitulatif des erreurs max en %		modélisation		
		A	B	C
Déplacements	A, B	0.08	0.04	0.05
	C, D	0.51	0.04	0.05
	E, F	0.11	0.04	0.05
Contraintes σ_{xx}	A, B	6.04	0.29	0.27
	C, D	10.84	0.17	0.32
	E, F	17.46	4.10^{-4}	2.10^{-4}
Contraintes σ_{yy}	A, B	3.61	0.38	0.16
	C, D	0.72	0.63	0.14
	E, F	27.07	2.10^{-5}	$5.5.10^{-4}$
Contraintes σ_{zz}	A, B	1.33	0.16	0.02
	C, D	8.51	0.63	0.02
	E, F	22.27	2.10^{-4}	2.10^{-4}
Contraintes σ_{xy}	A, B	-	-	-
	C, D	4.99	0.50	0.2
	E, F	2.11	0.23	0.2

Ces 3 modélisations ont sensiblement le même nombre de nœuds; les résultats obtenus avec des éléments d'ordre 1 (modélisation A en TRIA3 et QUAD4) sont nettement moins précis, notamment sur la paroi interne.