

## SSLS141 – Plaque en Flexion et cisaillement

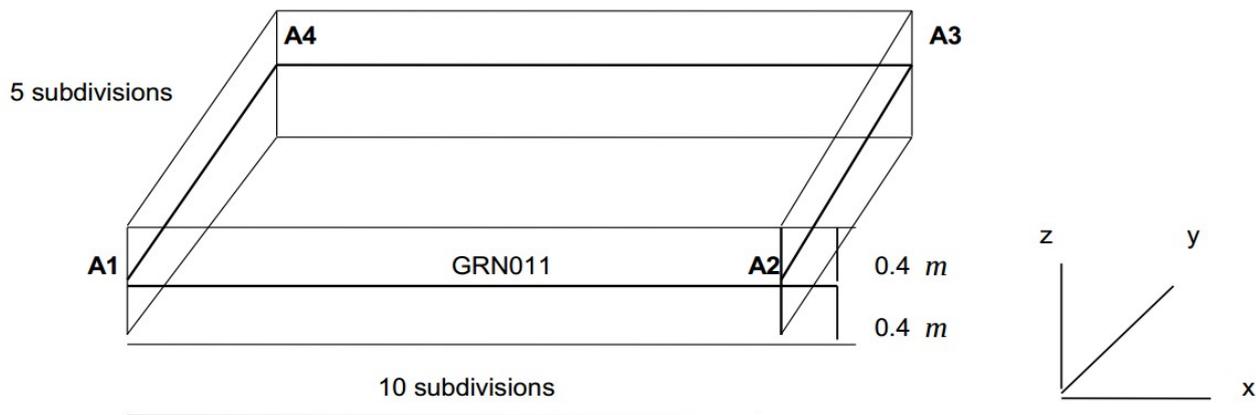
---

### Résumé :

L'objectif de ce test est de valider la réponse en cisaillement des éléments coques DST (QUAD4) et Q4G (QUAD4).

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Les coordonnées des points sont données en mètres (  $m$  ) :

$$\begin{array}{ll} A1(0,0,0) & A3(10,5) \\ A2(10,0,0) & A4(0,5) \end{array}$$

Tableau 1.1-1

L'épaisseur de la plaque est  $e = 0,8 m$

### 1.2 Propriétés du matériau

Le matériau a un comportement élastique isotrope :

Module d'Young :  $E = 200000 MPa$

Coefficient de Poisson :  $\nu = 0$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

L'arête  $A1A4$  est encastree.

On applique une force nodale  $F_z = -1000 N$  sur l'arête  $A2A3$ .

### 1.4 Modélisations

Les différentes modélisations sont :

Modélisation	Type d'élément	Mailles	Nombre d'éléments du maillage
A	DST	QUAD4	50
B	DST	QUAD4	50

	( multi-couches, <i>ncou</i> = 2 )		
C	Q4G	QUAD4	800
D	Q4G (multi-couches, <i>ncou</i> = 2 )	QUAD4	800
E	DST	TRIA3 (maillage régulier)	1600
F	DST	TRIA3 (maillage irrégulier)	1600

Tableau 1.4-1

## 2 Solution de référence

### 2.1 Grandeurs et résultats de référence

#### 2.1.1 Modèle analytique de la plaque

On considère que la réponse de la plaque correspond à la réponse d'une poutre en console (car  $v=0$ ). Dans ce cas, le déplacement de la plaque est donné par les déplacements de chaque section de plaque, suivant la direction  $x(u)$ ,  $z(w)$  et leur rotation par rapport à l'axe  $y(\theta_y)$ .

$$U_x(x, z) = u(x) + z\theta_y(x) \quad U_z(x, z) = w(x)$$

En tout point, les déformations sont:

$$\varepsilon_{xx}(x, z) = u' + z\theta_y' \quad \text{et} \quad 2\varepsilon_{xz}(x, z) = \theta_y + w' = \gamma_z$$

La poutre est encastée en  $x=0$  et soumise à une force verticale  $F$  en  $x=L$ .

La résolution (principe des travaux virtuels et l'équilibre des forces) donne l'expression des efforts généralisés dans le cas d'une réponse linéaire élastique:

$N$  est la force axiale,  $M_y$  le moment suivant l'axe  $y$  et  $T$  l'effort tranchant.

$$\begin{aligned} N(x) &= EAu'(x) & \text{et} & & N(x) &= 0 \\ M_y(x) &= EI\theta_y'(x) & & & M_y(x) &= -F(L-x) \\ T(x) &= GkA\gamma_z & & & T(x) &= F \end{aligned}$$

où le paramètre  $k$  est le facteur de correction en cisaillement

avec les conditions aux limites, on en déduit les déplacements  $u$ ,  $w$  et  $\theta_y$ :

$$u(x) = 0, \quad w(x) = \frac{F}{6EI}x^2(3L-x) + \frac{Fx}{GkA}, \quad \theta_y(x) = \frac{F}{EI} \frac{x(x-2L)}{2}$$

Les déformations et contraintes sont:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= z \frac{-F}{EI}(L-x) & \text{et} & & \sigma_{xx} &= z \frac{-F}{I}(L-x) \\ 2\varepsilon_{xz} &= \frac{F}{GkA} = \gamma_z & \text{et} & & \sigma_{xz} &= \frac{-F}{A}6(z^2/h^2 - 1/4) \end{aligned}$$

où  $h$  est la hauteur de la plaque. La distribution des contraintes en cisaillement est parabolique dans l'épaisseur de la plaque pour respecter les conditions de surface libre ( $\sigma_{xz}(z=h/2) = \sigma_{xz}(z=-h/2) = 0$ ).

La réponse verticale en déplacement du point  $x=L$  est:

$$U_z(L) = \frac{F}{3EI}L^3 + \frac{FL}{GkA}$$

### 2.2 Incertitudes sur la solution

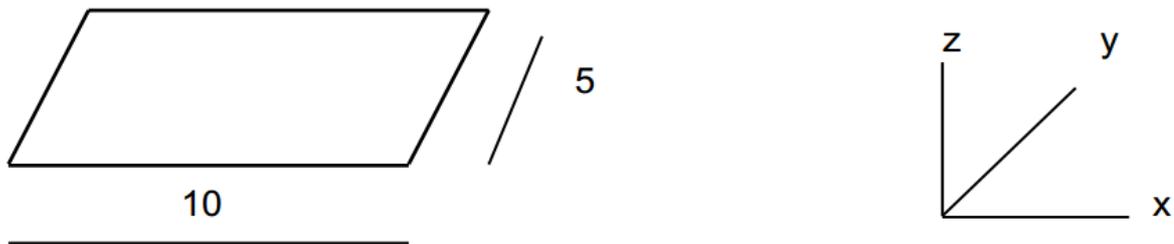
La solution de référence est analytique. Il n'y a donc pas d'incertitude.

### 3 Modélisation A

#### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec une couche.  
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque DST.

#### 3.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 10 subdivisions selon  $x$  et 5 subdivisions selon  $y$ ; soit au total 50 mailles DSQ (QUAD4) et 66 nœuds.

#### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ( A3 )	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX( A1 )	'ANALYTIQUE'	10000	0.001
QX( A1 )	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX( M1 , PT1 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX( M1 , PT1 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	1981.17	0.001
SIXZ( M1 , PT1 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ( M1 , PT1 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX( M50 , PT2 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX( M50 , PT2 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	91768.83	0.001
SIXZ( M50 , PT2 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ( M50 , PT2 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX( M50 , PT2 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX( M50 , PT2 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	4.58844E-07	0.001
EPXZ( M50 , PT2 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ( M50 , PT2 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

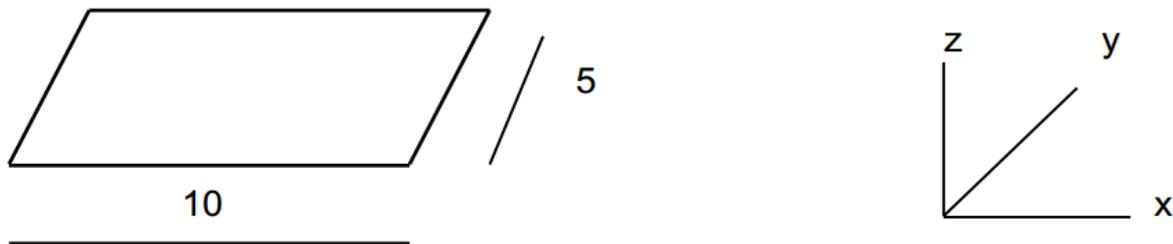
Tableau 3.3-1

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 2 couches.  
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque `DST`.

### 4.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 10 subdivisions selon  $x$  et 5 subdivisions selon  $y$  ; soit au total 50 mailles `DST` (`QUAD4`) et 66 nœuds.

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ( A3 )	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX( A1 )	'ANALYTIQUE'	10000	0.001
QX( A1 )	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX( M1, PT1, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	0.	1.0E-8
SIXX( M1, PT1, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	1981.17	0.001
SIXZ( M1, PT1, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ( M1, PT1, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX( M50, PT2, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX( M50, PT2, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	91768.83	0.001
SIXZ( M50, PT2, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ( M50, PT2, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX( M50, PT2, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX( M50, PT2, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	4.58844E-07	0.001
EPXZ( M50, PT2, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ( M50, PT2, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

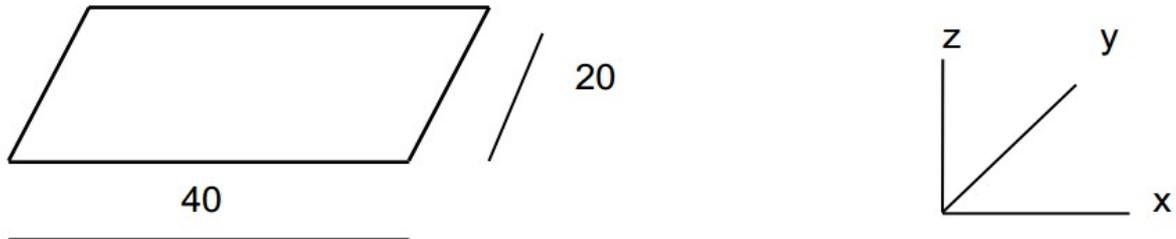
Tableau 4.3-1

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec une couche.  
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque Q4G.

### 5.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 40 subdivisions selon  $x$  et 20 subdivisions selon  $y$  ; soit au total 800 mailles Q4G (QUAD4) et 861 nœuds.

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ( A3 )	'ANALYTIQUE '	-3.92125E-05	0.001
MXX( A1 )	'ANALYTIQUE '	10000	0.02
QX( A1 )	'ANALYTIQUE '	-1000	0.001
SIXX( M141 , PT1 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
SIXX( M141 , PT1 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE '	2839.04	0.3
SIXZ( M141 , PT1 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE '	-1875.0	0.001
SIXZ( M141 , PT1 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
SIXX( M901 , PT2 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
SIXX( M901 , PT2 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE '	93254.70	0.01
SIXZ( M901 , PT2 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE '	-1875.0	0.001
SIXZ( M901 , PT2 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
EPXX( M901 , PT2 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE '	0.0	1.0E-8
EPXX( M901 , PT2 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE '	4.66273E-07	0.01
EPXZ( M901 , PT2 , SSPT2 )	'ANALYTIQUE '	-7.5E-09	0.001
EPXZ( M901 , PT2 , SSPT3 )	'ANALYTIQUE '	-7.5E-09	0.001

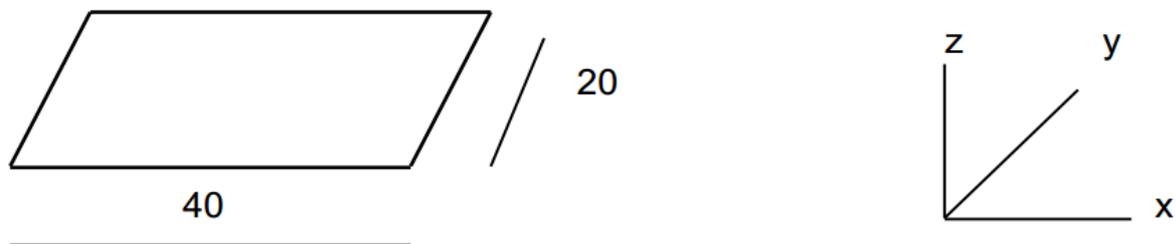
Tableau 5.3-1

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 2 couches.  
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque Q4G.

### 6.2 Caractéristiques du maillage



Le maillage est régulier. On a 40 subdivisions selon  $x$  et 20 subdivisions selon  $y$  ; soit au total 800 mailles Q4G (QUAD4) et 861 nœuds.

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ( A3 )	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.001
MXX( A1 )	'ANALYTIQUE'	10000	0.02
QX( A1 )	'ANALYTIQUE'	-1000	0.001
SIXX( M141, PT1, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX( M141, PT1, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	2839.04	0.3
SIXZ( M141, PT1, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ( M141, PT1, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX( M901, PT2, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
SIXX( M901, PT2, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	93254.70	0.01
SIXZ( M901, PT2, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	-1875.0	0.001
SIXZ( M901, PT2, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX( M901, PT2, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	0.0	1.0E-8
EPXX( M901, PT2, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	4.66273E-07	0.01
EPXZ( M901, PT2, SSPT3 )	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001
EPXZ( M901, PT2, SSPT6 )	'ANALYTIQUE'	-7.5E-09	0.001

Tableau 6.3-1

## 7 Modélisation E

---

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 1 couche.  
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque DST.

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est régulier. On a 40 subdivisions selon  $x$  et 20 subdivisions selon  $y$  ; soit au total 1600 mailles DST (TRIA3) et 861 nœuds.

### 7.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ( A3 )	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.13
DZ ( A2 )	'ANALYTIQUE'	-3.92125E-05	0.13
MXX( A4 )	'ANALYTIQUE'	10000	0.33
MXX( A1 )	'ANALYTIQUE'	10000	0.02

Tableau 7.3-1

## 8 Modélisation F

---

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est constitué de 1 plaque avec 1 couche.  
Les éléments utilisés sont des éléments de plaque DST.

### 8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est libre. On a 1600 mailles DST (TRIA3) et 853 nœuds.

### 8.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeurs de référence	Tolérance
DZ ( A3 )	'ANALYTIQUE '	-3.92125E-05	0.011
DZ ( A2 )	'ANALYTIQUE '	-3.92125E-05	0.009
MXX( A4 )	'ANALYTIQUE '	10000	0.053
MXX( A1 )	'ANALYTIQUE '	10000	0.022

Tableau 8.3-1

---

## 9 Synthèse des résultats

---

- Pour une plaque avec une ou plusieurs couches, les éléments `DST (QUAD4)` donnent de bonnes estimations des déplacements, forces généralisées, déformations et contraintes (Modélisation A et B).
- Pour un maillage plus fin, les éléments `Q4G (QUAD4)` conduisent à des erreurs un peu plus importantes, en particulier pour les contraintes axiales `SIXX` (Modélisation C et D).
- Les deux types d'éléments `DST (QUAD4)` et `Q4G (QUAD4)` donnent respectivement les mêmes résultats avec une (Modélisation A et C) ou deux couches (Modélisation B et D).
- Les éléments `DST (TRIA3)` donnent des résultats beaucoup moins bons (Modélisations E et F). En particulier on met en évidence des effets de maillage importants : les modélisations E et F ont le même nombre d'éléments mais le maillage E est réglé alors que le maillage F est libre. L'erreur sur la flèche est de 13 % pour E et 1 % pour F. On note des écarts analogues sur les moments. Il y a également une forte dissymétrie sur les moments entre les points `A1` et `A4` pour les 2 maillages. Ceci est dû au fait que les maillages ne sont pas symétriques par rapport au chargement. Sur un maillage symétrique le problème n'apparaît plus. Cet élément a donc un comportement en flexion très dépendant du maillage, ce qui mérite sans doute une étude plus approfondie.