

SDLS505 - Flambement d'une enveloppe cylindrique sous pression externe

Résumé :

Ce test représente un calcul de stabilité d'une enveloppe cylindrique mince bouchée à ses extrémités soumise à une pression externe et à une pression axiale. On calcule les charges critiques conduisant au flambement élastique d'Euler. La matrice de rigidité géométrique utilisée dans la résolution du problème aux valeurs propres est celle qui est due aux contraintes initiales.

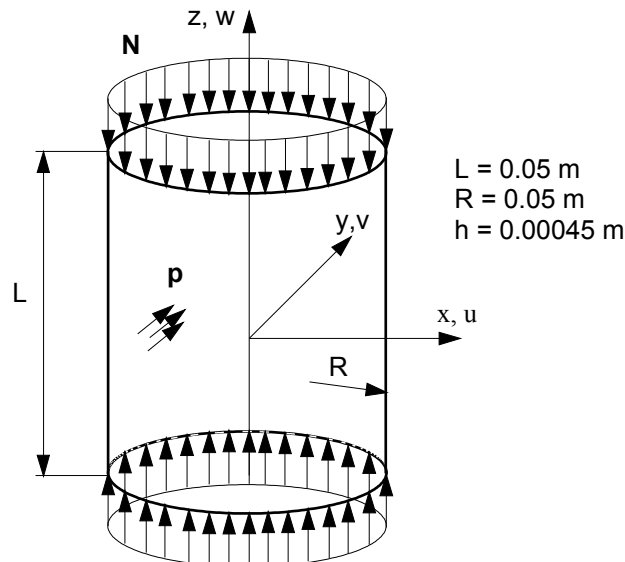
Il permet de valider la modélisation éléments finis :

- COQUE_3D avec les mailles TRIA7 et QUAD9.
- DKT avec les mailles TRIA3 et QUAD4.

La charge critique et le mode propre obtenus sont comparés à une solution de référence analytique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



La symétrie du problème permet de modéliser un demi cylindre de longueur $L/2$, bouché à l'une de ses extrémités, avec des conditions de symétrie spécifiques au bord inférieur.

1.2 Propriétés du matériau

Les propriétés du matériau constituant la plaque sont :

$E = 2.10^{11} \text{ Pa}$ Module d'Young
 $\nu = 0.3$ Coefficient de poisson

1.3 Conditions aux limites et chargements

Chargement :

pression uniformément répartie de $p_{cr} = 1.523 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ sur la partie cylindrique. Cette pression correspond à la valeur de la charge critique,
effort réparti sur le contour du fond $N = 0.5 \times R \cdot p_{cr} = 3.8075 \cdot 10^4 \text{ N/m}$.

1.4 Conditions initiales

Sans objet

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La pression critique est donnée en [bib1] ou [bib2] par l'expression suivante :

$$P_{cr} = \frac{Eh}{R} \left(\frac{1}{n^2 + \frac{b^2}{2}} \right) \left[\frac{1}{\left(\frac{n^2}{b^2} + 1 \right)^2} + \frac{h^2}{12 R^2 (1 - \nu^2)} (n^2 + b^2)^2 \right]$$

avec $b = \frac{\pi R}{L}$

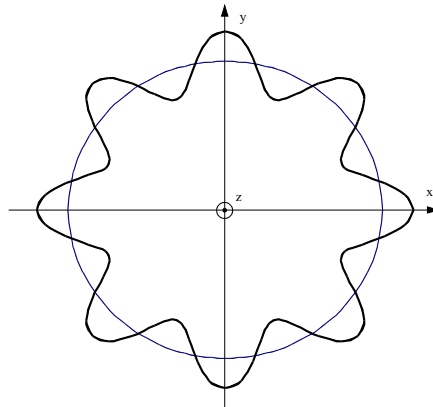
n représente le nombre de modes circonférentiels

Cette formule est valable dans le cas où $N = 0.5 R p_{cr}$.

2.2 Résultats de référence

Pour les caractéristiques géométriques données, la pression critique est minimum pour un nombre $n=8$ et vaut $p_{cr} = 1.523 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Le nombre n est obtenu à partir d'un abaque.



2.3 Incertitudes sur la solution

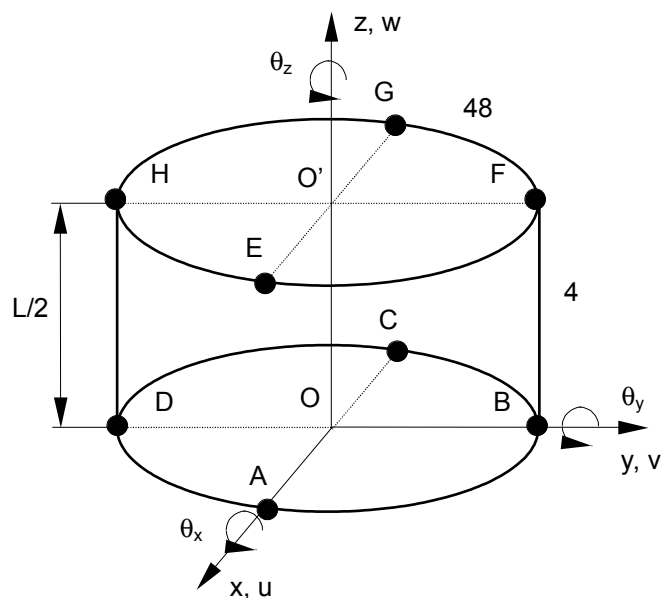
Solution analytique

2.4 Références bibliographiques

- 1) S.P. TIMOSHENKO, J.M. GERE : Théorie de la stabilité élastique, page 500, deuxième édition, DUNOD 1966.
- 2) BO O. ALMROTH, D.O. BRUSH : Buckling of bars, plates and shells, page 173, Mc Graw-Hill, New York, 1975.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation COQUE_3D (TRIA7)

- Conditions de symétrie :
- Contour ABCD : $w = 0$
- Conditions limites :
- Point O' : $u = v = 0$
 - Point E : $v = 0$

3.2 Caractéristiques du maillage

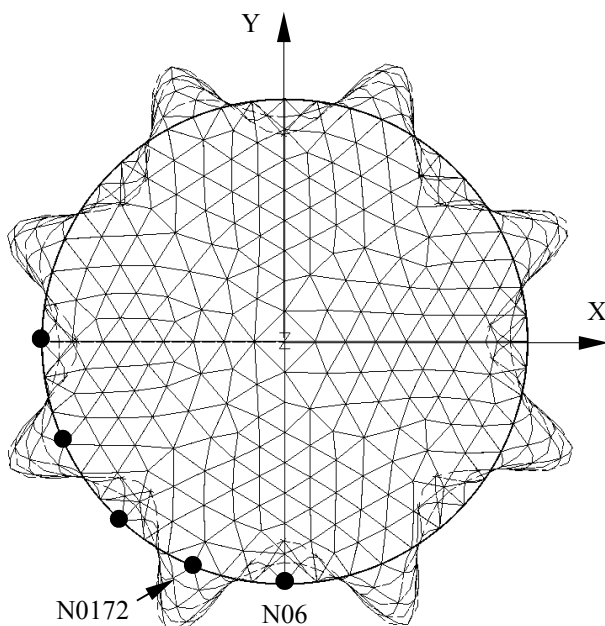
Nombre de nœuds : 2464
Nombre de mailles et types : 834 TRIA7

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Pression critique($n=8$)	$-1.523 \cdot 10^6$ Pa	$-1.6862 \cdot 10^6$ Pa	10.715
Déplacement x au nœud <i>N06</i>	-0.0102.	-0.0102.	0.
Déplacement y au nœud <i>N06</i>	1.	1.	0.
Déplacement x au nœud <i>N0172</i>	-0.392	-0.376	-4.09
Déplacement y au nœud <i>N0172</i>	-0.928	-0.9498	2.352

3.4 Remarques

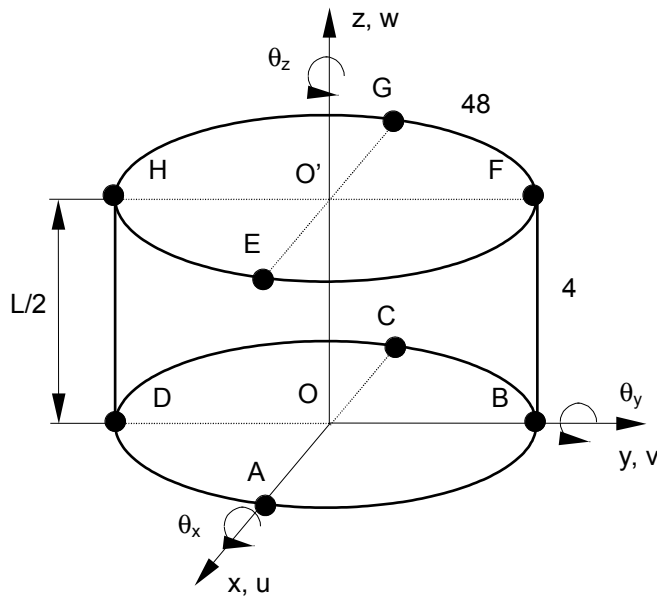
La position angulaire des "bosses" est définie à un angle près, ce qui rend difficile la vérification de la déformée modale. Pour vérifier la déformée modale associée au mode de flambement, nous avons validé graphiquement la déformée. Ensuite nous avons reporté dans le fichier de commande (Opérateur `TEST_RESU`) les déplacements DX et DY du nœud *N06* caractérisant cette déformée, ce qui explique l'écart nul obtenu sur les déplacements. Le déplacement du nœud *N0172* peut alors être déduit immédiatement de celui du nœud *N06* de façon analytique en utilisant les formes des modes propres données dans [bib1] et en considérant qu'il est en opposition de phase avec le nœud *N06*. La valeur des déplacements obtenus de la sorte n'est pas très précise du fait que l'angle entre les deux nœuds ne vaut pas exactement $22^\circ 5$.



- Les nœuds N06 et N0172 sont situés dans le plan $Z=0$. L'angle entre ces deux nœuds est de $22^\circ 5$ (Demi longueur d'onde) approximativement.

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation COQUE_3D (QUAD9)

- Conditions de symétrie :
- Contour ABCD : $w = 0$
- Conditions limites :
- Point O' : $u = v = 0$
 - Point E : $v = 0$

4.2 Caractéristiques du maillage

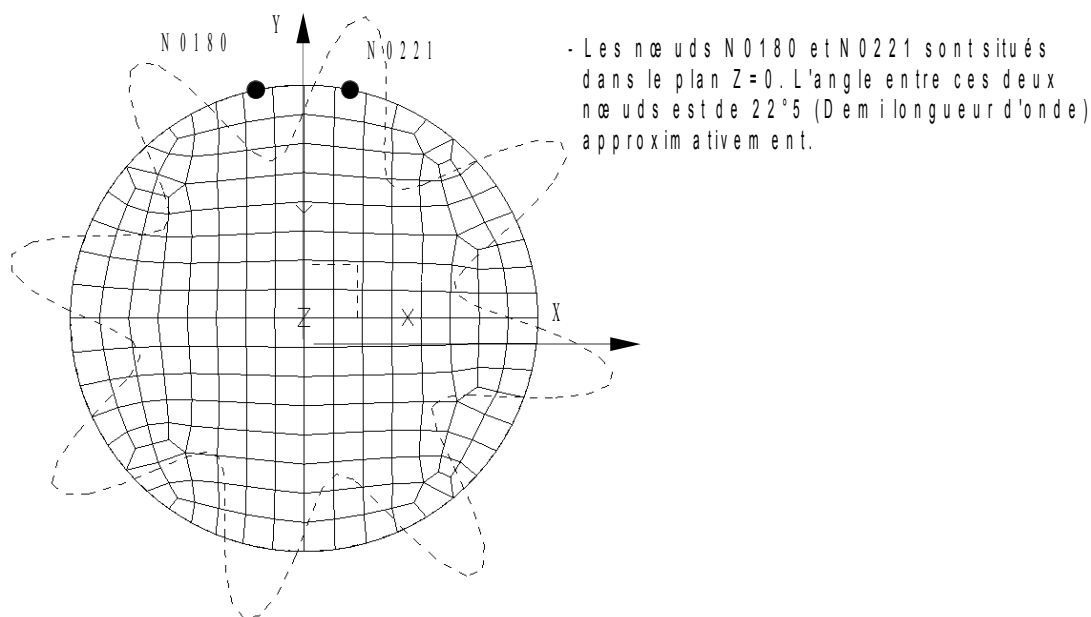
Nombre de nœuds : 1802
Nombre de mailles et types : 472 QUAD9

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Pression critique($n=8$)	$-1.523 \cdot 10^6$ Pa	$1.5576 \cdot 10^6$ Pa	2.272
Déplacement x du nœud <i>N0180</i>	0.13596	0.1003	26.258
Déplacement y du nœud <i>N0180</i>	-0.7744	-0.66172	-14.551
Déplacement x du nœud <i>N0221</i>	0.17743	0.17743	0.
Déplacement y du nœud <i>N0221</i>	0.765965	0.765965	0.

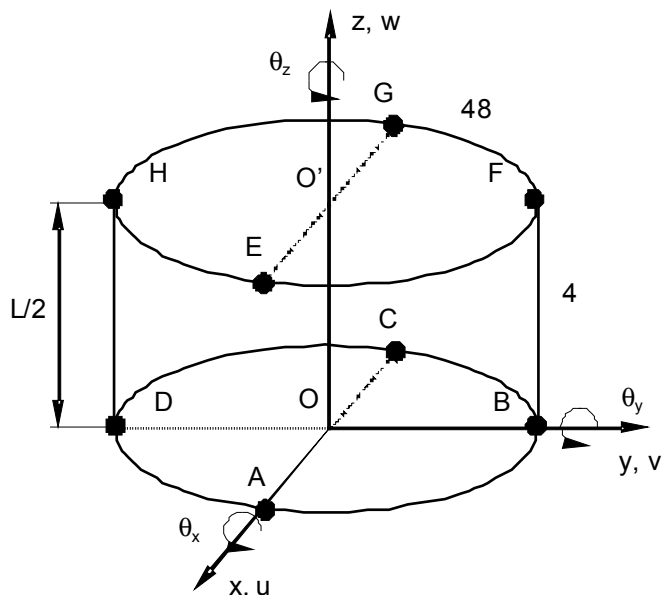
4.4 Remarques

La position angulaire des "bosses" est définie à un angle près, ce qui rend difficile la vérification de la déformée modale. Pour vérifier la déformée modale associée au mode de flambement, nous avons validé graphiquement la déformée. Ensuite nous avons reporté dans le fichier de commande (Opérateur TEST_RESU) les déplacements DX et DY du nœud *N0221* caractérisant cette déformée, ce qui explique l'écart nul obtenu sur les déplacements. Le déplacement du nœud *N0180* peut alors être déduit immédiatement de celui du nœud *N0221* de façon analytique en utilisant les formes des modes propres données dans [bib1] et en considérant qu'il est en opposition de phase avec le nœud *N0221*. La valeur des déplacements obtenus de la sorte n'est pas très précise du fait que l'angle entre les deux nœuds ne vaut pas exactement $22^\circ 5$.



5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKT (TRIA3)

Conditions de symétrie :
- Contour ABCD : $w = 0$
Conditions limites :
- Point O' : $u = v = 0$
- Point E : $v = 0$

5.2 Caractéristiques du maillage

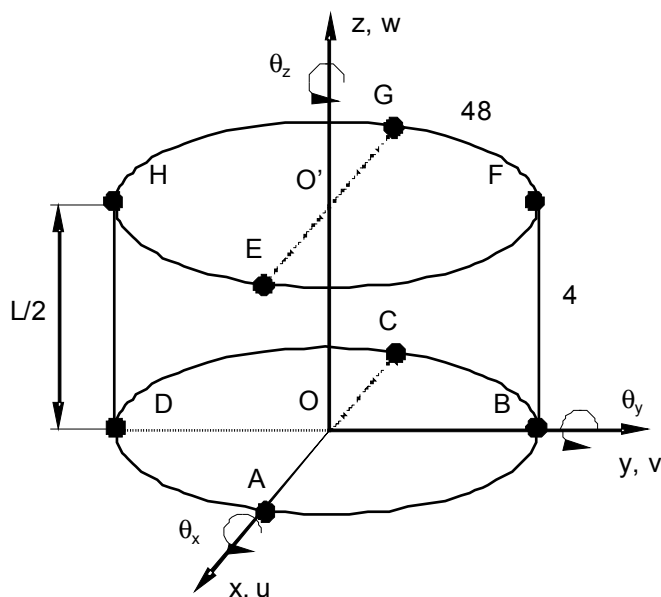
Nombre de nœuds : 418
Nombre de mailles et types : 786 TRIA3

5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Référence	% Tolérance
Pression critique($n=8$)	'ANALYTIQUE '	$-1.523 \cdot 10^6$ Pa	12.5

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKT (QUAD4)

Conditions de symétrie :
- Contour ABCD : $w = 0$
Conditions limites :
- Point O' : $u = v = 0$
- Point E : $v = 0$

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 449
Nombre de mailles et types : 424 QUAD4

6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Référence	% Tolérance
Pression critique($n=8$)	'ANALYTIQUE '	$-1.523 \cdot 10^6 \text{ Pa}$	12.5

7 Synthèse des résultats

Modélisation COQUE_3D

Les résultats obtenus sont satisfaisants. Les incertitudes sur la pression critique ne dépassent pas :

10.71% avec des mailles TRIA7,
2.3% avec des mailles QUAD9.

La déformée modale obtenue correspond bien au mode circonférentiel attendu : $n=8$ pour les deux modélisations.

On constate que la modélisation COQUE_3D avec des mailles QUAD9 est plus précise que la modélisation COQUE_3D avec des mailles TRIA7.

Modélisation DKT

Les résultats obtenus sont satisfaisants pour des éléments de plaques. Les incertitudes sur la pression critique ne dépassent pas 12.5% quelque soit la maille (QUAD4, TRIA3).

La déformée modale obtenue correspond bien au mode circonférentiel attendu : $n=8$ pour les deux modélisations.

Ce test a permis de tester les modélisations COQUE_3D et DKT en flambement linéaire d'Euler d'une structure mince soumis à une pression extérieure.