

## SDLS503 - Vibrations de flexion d'une poutre sandwich

---

### Résumé :

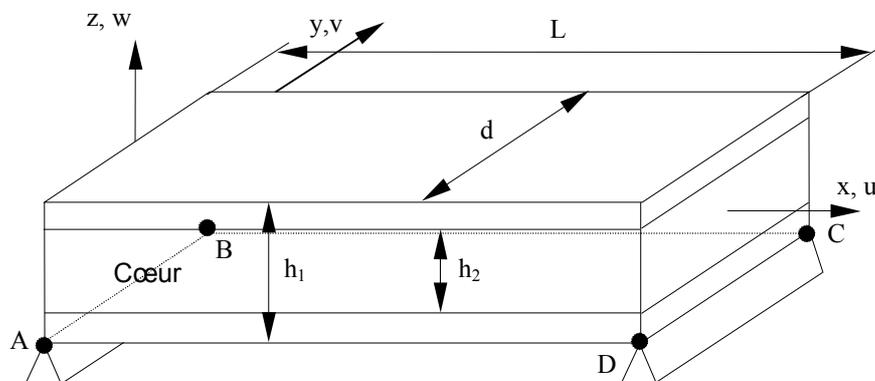
Ce test représente un calcul en analyse modale d'une poutre sandwich simplement supportée. Ce test permet de valider :

- la modélisation éléments finis `DKT` avec des mailles `QUAD4` et `TRIA3`,
- la modélisation éléments finis `DST` avec des mailles `QUAD4` et `TRIA3`,
- la prise en compte de la rigidité en cisaillement transverse,
- la prise en compte de matériau composite.

Les fréquences et les modes obtenus sont comparés à une solution de référence analytique. Il faut noter que la modélisation `DKT`, dont la formulation ne prend pas en compte le cisaillement transverse, n'est pas adaptée pour modéliser ce cas-test. Ainsi, les erreurs sont très importantes pour les modélisations A et B. Les résultats obtenus avec `DST` sont satisfaisants.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



$$\begin{aligned} L &= 1.0 \text{ m} \\ d &= 0.1 \text{ m} \\ h_1 &= 0.1 \text{ m} \\ h_2 &= 0.05 \text{ m} \end{aligned}$$

### 1.2 Propriétés du matériau

Revêtements :	$E_x = 4.10^{10} \text{ Pa}$	$G_{xz} = 4.10^9 \text{ Pa}$	$\nu_{xz} = 0.3$	$\rho_1 = 2000 \text{ kg/m}^3$
Cœur :	$E_x = 4.10^7 \text{ Pa}$	$G_{xz} = 1.5.10^7 \text{ Pa}$	$\nu_{xz} = 0.3$	$\rho_2 = 50 \text{ kg/m}^3$
Coefficient de cisaillement $K : 1/K = 110.8$				

Les coefficients de poisson sont identiques :  $\nu_{xz} = \nu_{xy} = \nu_{yz}$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

La poutre repose simplement sur les cotés  $AB$  et  $CD$ .

### 1.4 Conditions initiales

Sans objet

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le calcul s'effectue à partir des relations d'équilibre dynamique et de comportement [bib2] rappelées ci-après :

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} + T_y = \langle \rho I \rangle \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad \frac{\partial T_y}{\partial X} = \langle \rho S \rangle \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$M_z = \langle EI \rangle \frac{\partial \theta_z}{\partial X} \quad T_y = K \langle GS \rangle \frac{\partial v}{\partial X} - \theta_z$$

Ces relations permettent d'écrire l'équation du mouvement de flexion dynamique transverse  $v(x, t)$ . On obtient l'équation aux fréquences propres après avoir associé les conditions aux limites. L'équation aux fréquences propres s'écrit :

$$\sin(X_2) = 0 \quad \text{avec} \quad X_2 = \left[ \bar{\omega}^2 \frac{(1+a)}{2} + \sqrt{\bar{\omega}^2 \left( \bar{\omega}^2 \left( \frac{1-a}{2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right)} \right]^{1/2}$$

et

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\langle \rho I \rangle \omega^2 l^2}{\langle EI \rangle} ; r^2 = \frac{\langle \rho I \rangle}{\langle \rho S \rangle l^2} ; a = \frac{\langle \rho S \rangle \langle EI \rangle}{K \langle \rho I \rangle \langle GS \rangle}$$

Les solutions de l'équation aux fréquences propres s'écrivent alors :  $X_2 = n\pi$  ( $n=1,2,3, \dots$ )

### 2.2 Résultats de référence

5 premières fréquences et modes propres de flexion associés.

Fréquence mode 1 :	64.476 Hz	
Fréquence mode 2 :	131.918 Hz	
Fréquence mode 3 :	198.734 Hz	
Fréquence mode 4 :	265.383 Hz	
Fréquence mode 5 :	331.963 Hz	

### 2.3 Incertitudes sur la solution

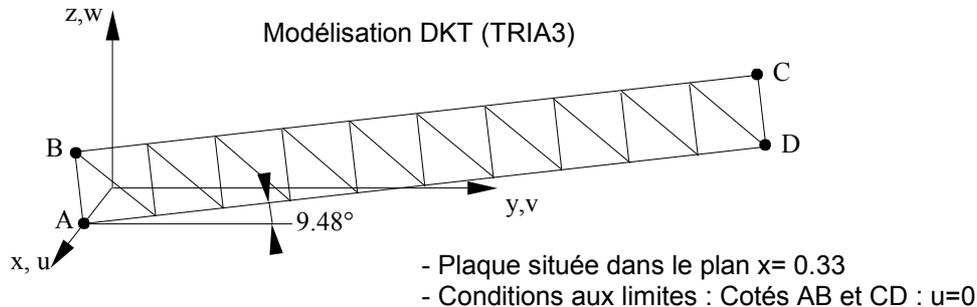
La solution de référence est calculée dans le cadre des hypothèses de la théorie des poutres [bib2] :  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ .

### 2.4 Références bibliographiques

- 1) VPCS : Progiciel de calcul de structures composites ; Exemples de validation. Revue des composites et des matériaux avancés, Volume 5 - numéro hors série/ 1995 - Edition Hermes.
- 2) CIEAUX J.M. : Flexion dynamique des poutres composites à phases orthotropes ; Validité du domaine quasi-statique, thèse de l'université Paul Sabatier Toulouse III, 1988.

### 3 Modélisation A

#### 3.1 Caractéristiques de la modélisation



#### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22  
Nombre de mailles et type : 20 TRIA3

#### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence mode 1	64.476	277.449	330.
Fréquence mode 2	131.918	1105.83	738.
Fréquence mode 3	198.734	2473.80	1.14E3
Fréquence mode 4	265.383	4363.97	1.54E3
Fréquence mode 5	331.963	6753.904	1.93E3

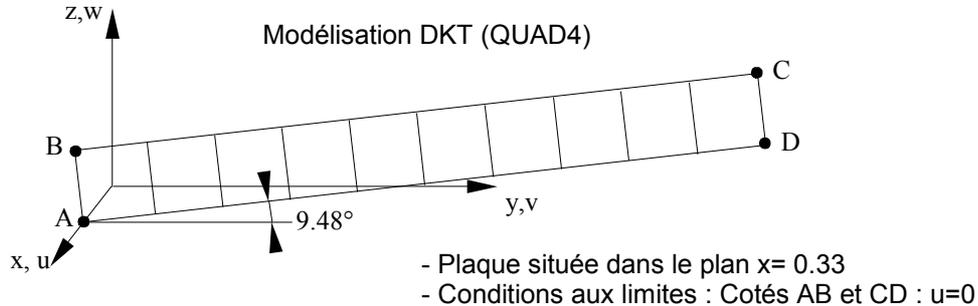
#### 3.4 Remarques

Dans le tableau de résultats, nous avons reporté les fréquences dont les modes sont identiques aux modes de référence.

les effets du cisaillement transverse sont négligés dans la modélisation DKT,  
les résultats Aster sont très supérieurs aux résultats de référence,  
apparition d'un mode de membrane entre les modes 2 et 3 et entre les modes 5 et 6 de référence.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation



### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22  
Nombre de mailles et type : 10 QUAD4

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence mode 1	64.476	277.788	331
Fréquence mode 2	131.918	1111.225	742.
Fréquence mode 3	198.734	2500.930	1.16E3
Fréquence mode 4	265.383	4449.073	1.52E3
Fréquence mode 5	331.963	6960.324	2.00E3

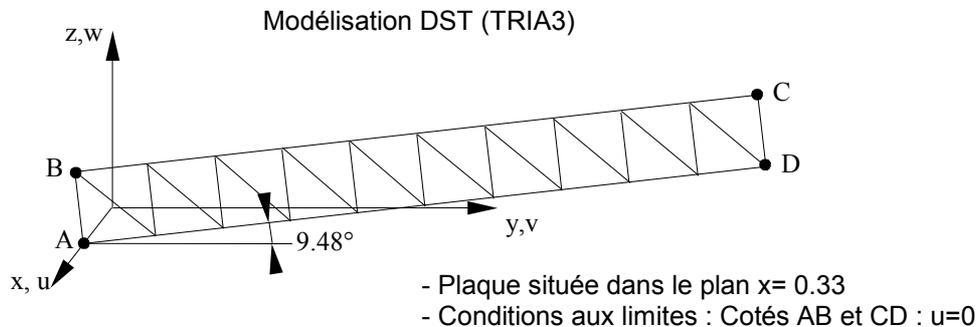
### 4.4 Remarques

Dans le tableau de résultats, nous avons reporté les fréquences dont les modes sont identiques aux modes de référence.

les effets du cisaillement transverse sont négligés dans la modélisation DKT,  
les résultats Aster sont très supérieurs aux résultats de référence,  
apparition d'un mode de membrane entre les modes 2 et 3 et entre les modes 5 et 6 de référence.

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation



### 5.2 Caractéristiques du maillage

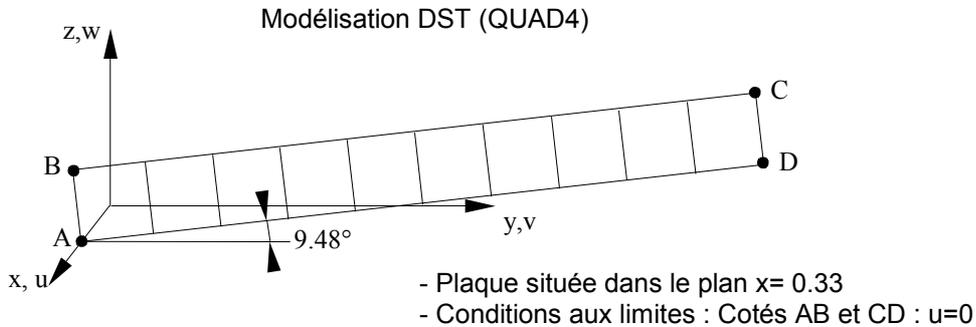
Nombre de nœuds : 22  
Nombre de mailles et type : 20 TRIA3

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence mode 1	64.476	64.573	0.150
Fréquence mode 2	131.918	133.987	1.568
Fréquence mode 3	198.734	206.046	3.679
Fréquence mode 4	265.383	282.875	6.591
Fréquence mode 5	331.963	365.919	10.229

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation



### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22  
Nombre de mailles et type : 10 QUAD4

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Fréquence mode 1	64.476	64.595	0.184
Fréquence mode 2	131.918	131.495	-0.320
Fréquence mode 3	198.734	196.861	-0.942
Fréquence mode 4	265.383	260.247	-1.935
Fréquence mode 5	331.963	320.409	-3.480

## 7 Synthèse des résultats

---

La modélisation `DKT` n'est pas adaptée pour modéliser ce cas-test, les erreurs sont très importantes. La formulation `DKT` ne prend pas en compte le cisaillement transverse contrairement à la modélisation `DST`. Pour ce type d'exemple, où la structure est constituée d'un matériau composite et relativement épaisse ( $h/L=0.1$ ), il est préférable d'utiliser la modélisation `DST`.

Les résultats obtenus avec `DST` sont :

satisfaisants pour les 3 premières fréquences avec la maille `TRIA3` et pour les 5 premières fréquences pour la maille `QUAD4` avec une meilleure précision pour la maille `QUAD4`, l'erreur de 10% pour la 4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> fréquence avec la maille `TRIA3` est significative. Un maillage plus fin devrait permettre d'améliorer les résultats en ayant une meilleure représentation des derniers modes.