

## SDLS07 - Modes propres d'une enveloppe sphérique mince

---

### Résumé :

Ce test issu du guide VPCS permet de valider les algorithmes de l'opérateur de recherche de valeurs propres `CALC_MODES` avec les matrices de rigidité et de masse correspondant aux modélisations suivantes :

- 1) Coques tridimensionnelles : éléments finis `DKT` (maillage d'un 1/8 de sphère),
- 2) Eléments finis 2D axisymétriques `TRIA6` et `QUAD8` (maillage d'une section),
- 3) Coques tridimensionnelles : éléments finis axisymétriques isoparamétriques `SEG3` (maillage linéique de la section),
- 4) Coques tridimensionnelles `COQUE_3D` : élément fini `MEC3QU9H` (maillage 1/8 de sphère),
- 5) Coques tridimensionnelles `COQUE_3D` : élément fini `MEC3TR7H`.

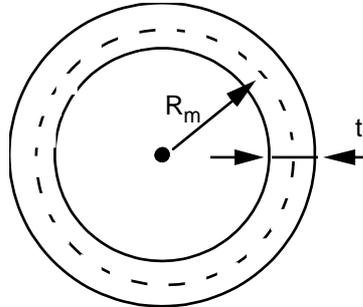
Les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique (HAYEK) et font apparaître pour les six premiers modes des écarts inférieurs à :

- 0,45% pour les éléments milieux continus axisymétriques,
- 0,20% pour les éléments de coque `DKT`,
- 0,17% pour les éléments de coques axisymétriques isoparamétriques,
- 0,17% pour les éléments `COQUE_3D`.

## 1 Problème de référence

---

### 1.1 Géométrie



Il s'agit d'une sphère mince, de rayon moyen  $R_m = 2.5 m$ , et d'épaisseur  $t = 0.1 m$ .

### 1.2 Propriétés des matériaux

Le matériau est homogène, isotrope, élastique linéaire. Les coefficients élastiques sont :  
 $E = 200\,000 MPa$  et  $\nu = 0.3$ .

La masse volumique est constante et vaut :  $\rho = 7800 kg/m^3$ .

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

La structure est libre dans l'espace.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Pour les sphères minces ( $i.t \ll R$  avec  $i$ , ordre du mode), les modes propres avec déplacement radial et tangentiel établis par une théorie de membrane sont donnés par [bib1] et [bib2] :

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

$$\text{avec } \lambda_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{b \pm \sqrt{b^2 - 4(1-\nu^2)(i^2 + i - 2)}} \text{ et } b = i^2 + i + 1 + 3\nu$$

La théorie présentée par Hayek permet d'introduire une correction de l'effet de flexion (approximation de la théorie générale de Wilkinson) qui conduit à des valeurs de  $\lambda_i$  fonction de

$$a = t^2 / 12 R^2$$
$$b = i(i+1)$$

et solution de :

$$\lambda_i^4 - \lambda_i^2 [1 + 3\nu - a(1-\nu) + b(1 + a\nu + ab)] + ab[b^2 - 4b + 5 - \nu^2] + (1-\nu^2)[b - 2(1+a)] = 0$$

### 2.2 Résultats de référence

Fréquences propres :

i	Fréquences propres
2	237.25
3	282.85
4	305.24
5	324.17
6	346.76
7	376.68
8	416.
9	465.75
10	526.20

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

### 2.4 Références bibliographiques

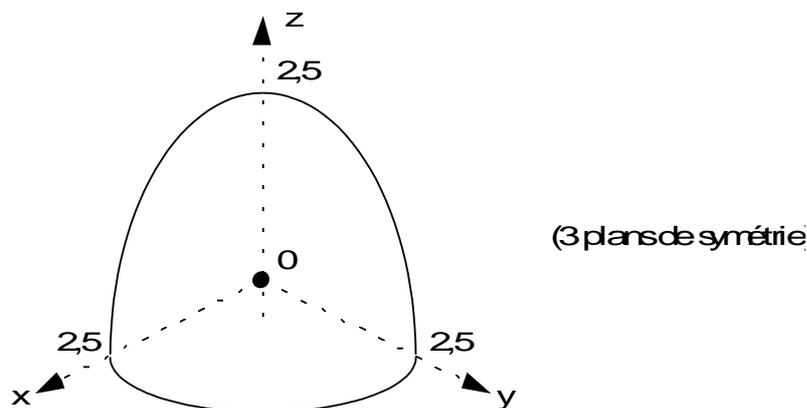
- 1) Fiche VPCS SDLS 07/89 dans le Guide de Validation des Progiciels de Calcul de Structures/ SFM AFNOR TECHNIQUE 1990.
- 2) S. HAYEK : "Vibrations of a spherical shell in acoustic medium", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 40, 2, 1996, p. 342-348

## 3 Modélisation A

---

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Coques DKT



La géométrie discrétisée est représentée ci-dessus. Les éléments DKT sont des facettes planes à 3 nœuds. Le nombre des nœuds sur le méridien et sur l'équateur est : 34.

Les conditions aux limites appliquées sur les trois frontières correspondent aux conditions de symétrie (déplacements et rotations bloquées).

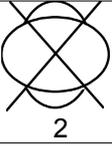
### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1128

Nombre de mailles et types : 2125 TRIA3

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

(Fréquences en Hertz)

Valeur du paramètre i de la solution de référence	Référence	Aster	% différence
	237.25	237.24	-0.005
		237.24	-0.003
3	282.85	non obtenu [§4.2]	
4	305.24	304.97	-0.089
		304.99	-0.080
		305.08	-0.054
5	324.17	non obtenu [§4.2]	
6	346.76	346.11	-0.186
		346.12	-0.185
		346.30	-0.133
		346.38	-0.108
7	376.68	non obtenu [§4.2]	
8	416.00	414.89	-0.266
		414.92	-0.259
		415.16	-0.201
		415.24	-0.183
		415.33	-0.161
9	465.75	non obtenu [§4.2]	
10	526.20	524.34	-0.353
		524.43	-0.337
		524.71	-0.283
		524.94	-0.240
		524.97	-0.234
		525.12	-0.205

## 3.4 Remarques

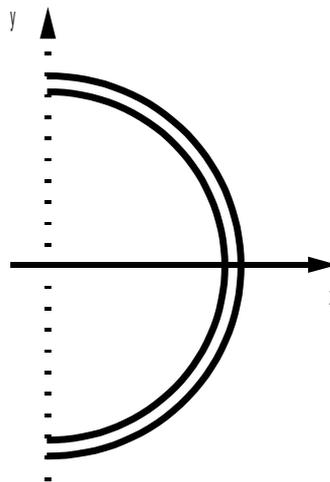
La solution de référence ne donne pas la multiplicité des modes. On observe avec les calculs des ordres de multiplicité qui croissent avec la valeur de la fréquence.

Les modes 3, 5, 7, 9 ne sont pas obtenus à cause des conditions aux limites choisies pour ce modèle, avec les trois plans de symétrie.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

2D axisymétrique



Aucune condition aux limites.

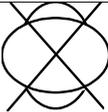
### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 365

Nombre de mailles et types : 40 QUAD8 et 80 TRIA6

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

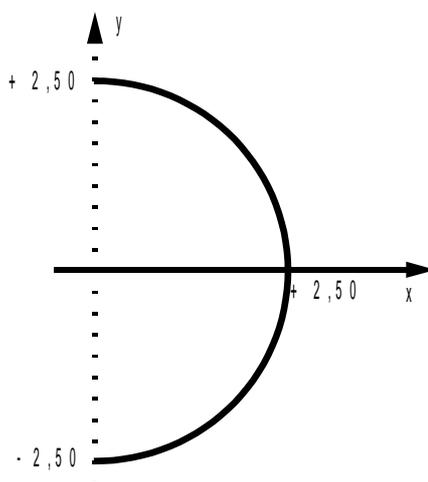
Fréquences en Hertz

Identification n ° mode	Référence	Aster	% différence
 2	237.25	237.24	0.036
3	282.85	282.78	-0.023
4	305.24	304.85	-0.125
5	324.17	323.32	-0.262
6	346.76	345.22	-0.443
7	376.68	374.14	-0.674
8	416.00	412.03	-0.955
9	465.75	459.75	-1.286
10	526.20	517.51	-1.651

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Coques 1D axisymétriques



Aucune condition aux limites.

On choisit le modèle de Love-Kirchhoff pour décrire la cinématique. Avec l'élément choisi, cette cinématique est obtenue par pénalisation : on met une grande valeur pour le coefficient  $A\_CIS$ . Par ailleurs, on néglige la correction de métrique.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 81

Nombre de mailles et types : 40 SEG3

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

(Fréquences en Hertz)

Identification n° mode	Référence	Aster OPTION='BANDE' (méthode des itérations simultanées)	Aster OPTION='AJUSTE' (méthode des puissances inverses)	% différence
2	237.25	237.31	237.32	0.025/0.029
3	282.85	282.77	282.78	-0.028/-0.025
4	305.24	304.95	304.95	-0.096
5	324.17	323.68	323.68	-0.150
6	346.76	346.23	346.23	-0.154

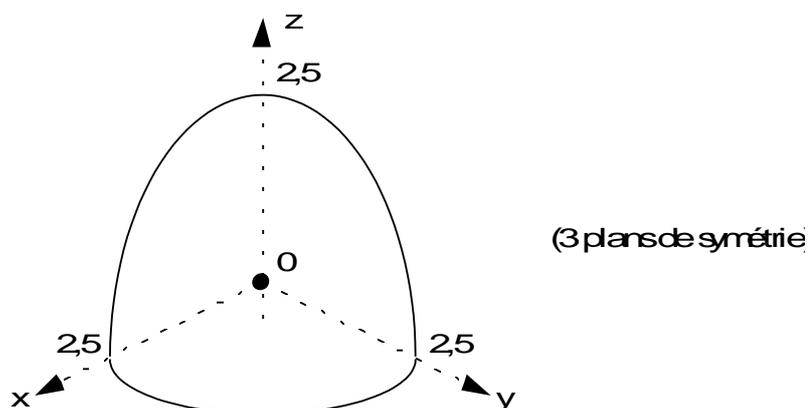
### 5.4 Remarques

Ce test avec cette modélisation n'a pour but que de tester la matrice de masse. Un écart satisfaisant étant observé sur les six premières fréquences, on a choisi de ne pas calculer les suivantes.

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Coques 3D MEC3QU9H



Les conditions aux limites appliquées sur les trois frontières correspondent aux conditions de symétrie (déplacements et rotations bloquées).

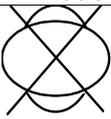
### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 331

Nombre de mailles et types : 75 QUAD9

## 6.3 Grandeurs testées et résultats

(Fréquences en Hertz)

Identification n ° mode	Référence	Aster	% différence
	237.25	237.25	0
		237.26	0.004
2			
3	282.85	non obtenu [§10.2]	
4	305.24	305.18	-0.019
		305.19	-0.017
		305.20	-0.011
5	324.17	non obtenu [§10.2]	
6	346.76	346.17	-0.169
		346.19	-0.165
		346.25	-0.147
		346.36	-0.114
7	376.68	non obtenu [§10.2]	
8	416.00	413.81	-0.525
		413.84	-0.520
		413.84	-0.518
		414.02	-0.476
		414.09	-0.46
9	465.75	non obtenu [§10.2]	
10	526.20	520.57	-1.071
		520.62	-1.06
		520.64	-1.056
		521.28	-0.935
		521.29	-0.933
521.31	-0.929		

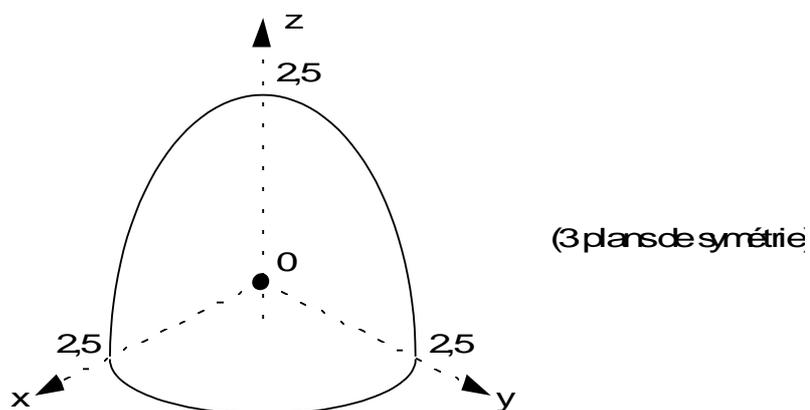
## 6.4 Remarques

Les modes 3, 5, 7, 9 ne sont pas obtenus à cause des conditions aux limites choisies pour ce modèle, avec les trois plans de symétrie.

## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Coques 3D MEC3TR7H



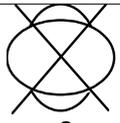
### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 925

Nombre de mailles et types : 294 TRIA7

## 7.3 Grandeurs testées et résultats

(Fréquences en Hertz)

Identification n ° mode	Référence	Aster	% différence
	237.25	237.25	-0.001
		237.25	-0.001
2			
3	282.85	non obtenu [§12.2]	
4	305.24	305.20	-0.011
		305.22	-0.008
		305.22	-0.005
5	324.17	non obtenu [§12.2]	
6	346.76	346.32	-0.126
		346.43	-0.095
		346.46	-0.086
		346.58	-0.051
7	376.68	non obtenu [§12.2]	
8	416.00	413.91	-0.502
		414.33	-0.402
		414.36	-0.394
		414.99	-0.241
		415.14	-0.206
9	465.75	non obtenu [§12.2]	
10	526.20	520.	-1.176
		521.02	-0.985
		521.43	-0.907
		522.32	-0.738
		523.03	-0.602
		523.77	-0.461

## 7.4 Remarques

Les modes 3, 5, 7, 9 ne sont pas obtenus à cause des conditions aux limites choisies pour ce modèle, avec les trois plans de symétrie.

## 8 Synthèse des résultats

---

- La modélisation coque `DKT`, restreinte ici aux modes présentant les 3 symétries par rapport aux plans  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , fournit les fréquences propres avec une erreur inférieure à 0.4% sur les 20 premiers modes.
- La modélisation milieu continu 2D axisymétrique fournit les fréquences propres avec une erreur inférieure à 2%.
- La modélisation `COQUE_AXIS` (éléments isoparamétriques quadratiques) fournit les fréquences propres avec une erreur inférieure à 0.2% sur les 5 premiers modes (discrétisation spatiale identique à la trace du maillage 2D axisymétrique).
- La modélisation `COQUE_3D` dégénérée (éléments de coque épaisse `MEC3QU9H`, `MEC3TR7H`) fournir les fréquences propres avec une erreur inférieure à 1.2% sur les 10 premiers modes.