SDLL141 - Fréquences propres d’une poutre seule, soumise à l’effet gyroscopique.

Résumé :

Ce problème consiste à chercher les fréquences de vibration d'une poutre appuyée à chacune de ses extrémités, sur des appuis infiniment rigides. La poutre est pleine, de section circulaire et soumise à une vitesse de rotation constante. Elle comporte aucun disque.

Deux modélisation sont étudiées :

- Modélisation A : la poutre est suivant l’axe X,
- Modélisation B : la poutre est suivant l’axe t tel que t vecteur directeur de la bissectrice (x, y).
- Modélisation C : la poutre est suivant l’axe t tel que t vecteur directeur de la bissectrice (x, y), et la masse est distribuée par des éléments discrets installés sur chacun des nœuds.
- Modélisation D : la poutre est suivant l’axe X. La section est circulaire et variable avec les deux rayons $R1$ et $R2$ identiques.

Ce problème permet donc de tester l'effet de la matrice gyroscopique qui a été développé pour une poutre droite.

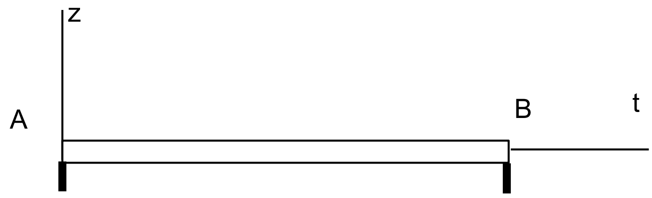
L’effet gyroscopique conduit au dédoublement des modes. L’évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation permet de construire le diagramme de Campbell.

Les références sont basées sur la théorie d’Euler-Bernouilli.

Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux donnés en référence.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Modélisations A et D: SDLL141a et SDLL141d

$$t=x$$

Modélisations B et C: SDLL141b et SDLL141c

$$\frac{\pi}{4}=(\hat{x},t) \text{ et } t.z=0$$

Pour la modélisation C (SDLL141c) la masse volumique du matériau est prise égal à zéro. La masse est installée par l'intermédiaire d'éléments discrets installés sur chacun des nœuds.

Longueur de la poutre :

$$L=AB=0.9\,m$$

Section circulaire :

Diamètre : $D=0.05\,m$

Coordonnées des points (m) :

		Modélisations A et D	Modélisations B et C
	A	B	B
X	$0.$	0.9	$0.9\cos(\pi/4)$
Y	$0.$	$0.$	$0.9\sin(\pi/4)$
Z	$0.$	$0.$	$0.$

Tableau 1.1-1 : Coordonnées des points A et B

1.2 Propriétés de matériaux

$E=2.10^{11}\,Pa$
$\rho=7\,800\,kg/m^3$ sauf pour la modélisation C.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Point A : appuyé $u=v=w=0$
Point B : appuyé $u=v=w=0$

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle présentée dans l'ouvrage de René-Jean GIBERT.
En adoptant les notations suivantes :

- poutre suivant x
- y et z les mouvements de flexion dans les plan xOz et xOy
- S : section de la poutre
- I : moment d'inertie de flexion par rapport aux axes y et z
- I_x : moment d'inertie par unité de longueur par rapport à l'axe Ox
- ρ , E les caractéristiques du matériau
- Ω vitesse de rotation de la poutre

Les solution singulières sont régies par le système d'équations suivant :

$$EI\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}-\rho S\omega^2 Y+i\omega\Omega I_x\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0$$
$$EI\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4}-\rho S\omega^2 Z-i\omega\Omega I_x\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}=0$$

en respectant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} Y=Z=0 \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x=0 \\ x=L \end{cases}$$

On obtient deux familles de modes propres :

- Mode rétrograde :

$$Y_1=-i.Z_1=\sin\frac{n\pi x}{L} \text{ avec } \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)=\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda$$

- Mode direct :

$$Y_2=-i.Z_2=\sin\frac{n\pi x}{L} \text{ avec } \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)=\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda$$

en posant :

pulsation propre sans rotation : $\omega_0=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

$$\lambda=\frac{1}{2}.\frac{\Omega I_x}{\sqrt{EI\rho S}} \text{ avec } I_x=\frac{\rho S D^2}{8} \text{ et } I=\frac{\pi D^4}{64}$$

2.2 Résultats de référence

4 premiers modes propres de flexion.

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique avec l'hypothèse de poutre d'Euler.

2.4 Références bibliographiques

René-Jean GIBERT, Vibrations des structures, n°69 de la collection R&D d'EDF chez EYROLLES, p. 235-237 (1988).

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : 18 Eléments équirépartis de poutre POU_D_E

Conditions limites :
Nœud à l'extrémité A DDL_IMPO: $(DX=0.0, DY=0.0, DZ=0.0)$
Nœud à l'extrémité B DDL_IMPO: $(DX=0.0, DY=0.0, DZ=0.0)$
ANGL_NAUT (45.,0,0) pour les modélisations B et C
Noms des nœuds : Point A = $N1$
Point B = $N19$

Pour la modélisation D
Les éléments sont de section circulaire variables avec les deux rayons $R1$ et $R2$ identiques.

Pour la modélisation C

Poutre suivant t avec $\frac{\pi}{4}=(\hat{x}, t)$ et $t.z=0$

Masse volumique nulle
Longueur d'un élément

$$e=\frac{L}{18}=0.05\,m$$

Caractéristiques des éléments discrets dans la base (t, v, z)

Nœuds $N2$ à $N18$	Nœuds $N1$ et $N19$
$m=\rho e \pi \frac{D^2}{4}=0.7657\,kg$	$m'=\rho \frac{e}{2} \pi \frac{D^2}{4}=0.3829\,kg$
$I_{tt}=m.\frac{D^2}{8}=2,393.10^{-4}\ kg.m^2$	$I'_{xx}=m'.\frac{D^2}{8}=1,196.10^{-4}\ kg.m^2$
$I_{vv}=I_{zz}=\frac{I_{tt}}{2}+m.\frac{e^2}{12}=2,791.10^{-4}\ kg.m^2$	$I'_{vv}=I'_{zz}=\frac{I'_{tt}}{2}+m'.\frac{e^2}{3}=1,395.10^{-4}\ kg.m^2$

Tableau 3.1-1 : Calcul des caractéristiques des éléments discrets

Deux solutions sont possibles pour définir les caractéristiques dans la base :
- soit effectuer un changement de base du repère local de la poutre (t, v, z) au repère global (x, y, z). Pour cela, il faut effectuer un changement de base par une rotation d'axe z et de valeur $-45°$. On obtient :

$$\bar{\bar{I}}=\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$ avec :

$$I_{xx}=\cos^2(\pi/4) I_{tt}+\sin^2(\pi/4) I_{vv}$$
$$I_{yy}=\sin^2(\pi/4) I_{tt}+\cos^2(\pi/4) I_{vv}$$
$$I_{xy}=\cos(\pi/4)\sin(\pi/4)(I_{tt}-I_{vv})$$

Caractéristiques des éléments discrets dans la base (x, y, z)

Nœuds $N2$ à $N18$	Nœuds $N1$ et $N19$
$m=\rho . e . \pi \frac{D^2}{4}=0,7657\ kg$	$m'=\rho . \frac{e}{2} . \pi \frac{D^2}{4}=0,3829\ kg$
$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}\left(m . \frac{D^2}{8}+\frac{1}{2} m . \frac{D^2}{8}+m . \frac{e^2}{12}\right)$ $=2,592 . 10^{-4}\ kg . m^2$	$I'_{xx}=I'_{yy}=\frac{1}{2}\left(m' . \frac{D^2}{8}+\frac{1}{2} m' . \frac{D^2}{8}+m' . \frac{e^2}{12}\right)$ $=1,296 . 10^{-4}\ kg . m^2$
$I_{zz}=\frac{I_{tt}}{2}+m . \frac{e^2}{12}=2,792 . 10^{-4}\ kg . m^2$	$I'_{zz}=\frac{I'_{tt}}{2}+m' . \frac{e^2}{12}=1,396 . 10^{-4}\ kg . m^2$
$I_{xy}=I_{yx}=\frac{1}{2}\left\{m . \frac{D^2}{8}-\left(\frac{1}{2} m . \frac{D^2}{8}+m . \frac{e^2}{12}\right)\right\}$ $=-1,994 . 10^{-5}\ kg . m^2$	$I'_{xy}=I'_{yx}=\frac{1}{2}\left\{m' . \frac{D^2}{8}-\left(\frac{1}{2} m' . \frac{D^2}{8}+m' . \frac{e^2}{12}\right)\right\}$ $=-9,971 . 10^{-6}\ kg . m^2$

Tableau 3.1-2 : Calcul des caractéristiques des éléments discrets

– soit déclarer les caractéristiques dans le repère local de la poutre et utiliser les angles nautiques pour définir l'orientation du repère local. C'est cette méthode qui a été utilisé pour la modélisation C.

3.2 Caractéristiques du maillage

Maillage : Nombre de nœuds : 19
Nombre de mailles et types : 18 `SEG2`

3.3 Grandeurs testées et résultats

Rotor à l'arrêt ($\Omega=0$) (fréquences en Hz)

Référence	Modélisation A		Modélisation B		Modélisation C		Modélisation D	
fréquence	ASTER	% référence	ASTER	% référence	ASTER	% référence	ASTER	% référence
122,7475	122,7475	0,000	122,7461	0,001	122,4789	-0,219	122,7475	0,000
490,9899	490,9949	0,001	490,9889	0,001	486,6954	-0,875	490,9949	0,001
1104,7273	1104,7844	0,005	1104,7710	0,004	1083,2630	-1,943	1104,7844	0,005
1963,9596	1964,2791	0,016	1964,2551	0,015	1897,3908	-3,390	1964,2791	0,016

Tableau 3.2-1 : Calcul des fréquences du rotor à l'arrêt

Calcul des fréquences propres à l'aide de l'algorithme de Sorensen
Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes directs (fréquences en Hz)

Référence	Modélisation A		Modélisation B		Modélisation C		Modélisation D	
fréquence	ASTER	% référence	ASTER	% référence	ASTER	% référence	ASTER	% référence
125,8150	125,8150	0,000	125,8135	0,001	125,5324	-0,225	125,8150	0,000
503,2598	503,2649	0,001	503,2587	0,000	498,7463	-0,897	503,2649	0,001
1132,3346	1132,3918	0,005	1132,3779	0,004	1109,7993	-1,990	1132,3918	0,005
2013,0393	2013,3589	0,016	2013,3342	0,015	1986,6704	-1,310	2013,3589	0,016

Tableau 3.2-2 : Calcul des fréquences des modes directs du rotor à la vitesse $10000 rad/s$

Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes rétrogrades (fréquences en Hz)

Référence	Modélisation A		Modélisation B		Modélisation C		Modélisation D	
fréquence	ASTER	% référence	ASTER	% référence	ASTER	% référence	ASTER	% référence
119,7548	119,7549	0,000	119,7534	0,001	119,4990	-0,214	119,7549	0,000
479,0191	479,0242	0,001	479,0183	0,000	474,9244	-0,855	479,0242	0,001
1077,7931	1077,8502	0,005	1077,8370	0,004	1057,3064	-1,901	1077,8502	0,005
1916,0765	1916,3958	0,017	1916,3723	0,015	1852,4597	-3,320	1916,3958	0,017

Tableau 3.2-3 : Calcul des fréquences des modes rétrogrades du rotor à la vitesse $10000 rad/s$

4 Synthèse des résultats

Bonne implantation de l'effet gyroscopique pour l’élément de poutre. Le changement d'axe de la poutre x (direction selon laquelle les éléments ont été implantés) (modélisation A) à une direction $x+y$ (modélisation D) n'engendre pas d'écarts de résultats.

En absence de référence analytique pour la validation des éléments discrets soumis à l’effet gyroscopique, la modélisation C permet tout de même de vérifier l’implantation de la matrice gyroscopique d’un disque supposé indéformable. Le mouvement de chacun des disques est fixé par celui des nœuds et suit donc la déformée de la fibre neutre uniquement de manière discrète. Ceci explique les écarts constatés sur la modélisation C, d’autant plus pour les modes élevés caractérisés par une concavité de la déformée modale plus importante.