

SDLL02 - Poutre élançée, encastrée-libre, repliée sur elle même

Résumé :

Ce problème bidimensionnel consiste à rechercher les fréquences et les modes de vibration d'une structure mécanique, composée d'une poutre élançée, encastrée libre et repliée sur elle-même.

Le problème posé n'a pas de signification physique. Il permet par contre de valider la recherche des fréquences propres de flexion multiples et la recherche des modes doubles dans un sous-espace d'ordre 2.

Dans ce test, on effectue trois modélisations différentes :

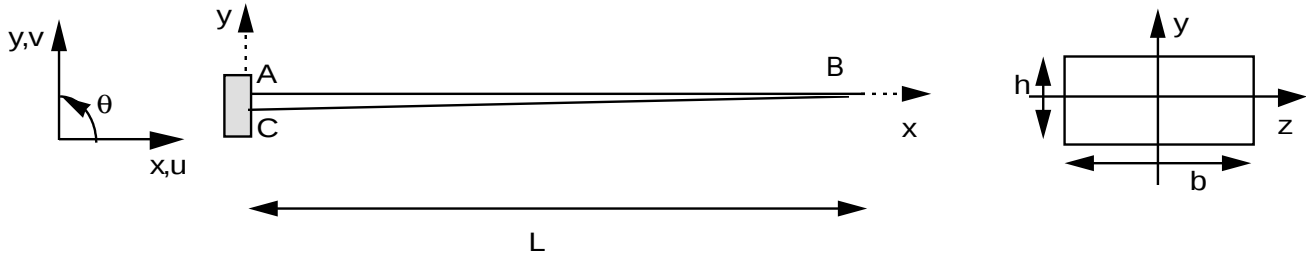
dans la première modélisation, les conditions aux limites sont imposées à l'aide de paramètres de Lagrange (commande `AFFE_CHAR_MECA`) et les valeurs et vecteurs propres sont calculés par la méthode de Lanczos (commande `CALC_MODES`, `METHODE='TRI_DIAG'` sous le mot-clé facteur `SOLVEUR_MODAL`),

dans la deuxième modélisation, les conditions aux limites sont imposées en supprimant des degrés de liberté dans les matrices de masse et de raideur (commande `AFFE_CHAR_CINE`) et les valeurs et vecteurs propres sont calculés par la méthode de Bathe et Wilson (commande `CALC_MODES`, `METHODE='JACOBI'` sous le mot-clé facteur `SOLVEUR_MODAL`),

dans la troisième modélisation, on vérifie le comportement de la modélisation `COQUE_C_PLAN` en dynamique. Les valeurs propres et les modes propres sont calculés avec la méthode de SORESENSEN (commande `CALC_MODES`, `METHODE='SORENSEN'` sous le mot-clé facteur `SOLVEUR_MODAL`).

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Les caractéristiques géométriques de la poutre constituant le modèle mécanique sont les suivantes :

Longueur : $L = 0.5 \text{ m}$

Section droite rectangulaire :

Hauteur : $h = 0.005 \text{ m}$
 Largeur : $b = 0.050 \text{ m}$
 Aire : $A = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
 Moment d'inertie : $I_z = 5.208 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$

Les coordonnées (en mètres) des points caractéristiques de l'ensemble des poutres sont :

	A	B	C
x	0.	0.5	0.
y	0.	0.	0.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés du matériau constituant la poutre sont :

$$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\rho = 7800. \text{ kg/m}^3$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

La condition aux limites qui caractérise ce problème est l'encastrement du point A et s'écrit :

$$u = v = 0. , \theta = 0 .$$

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle donnée dans la fiche SDLL02/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante :

Par la méthode de raideur dynamique, on montre que la poutre repliée admet des fréquences doubles, solution de :

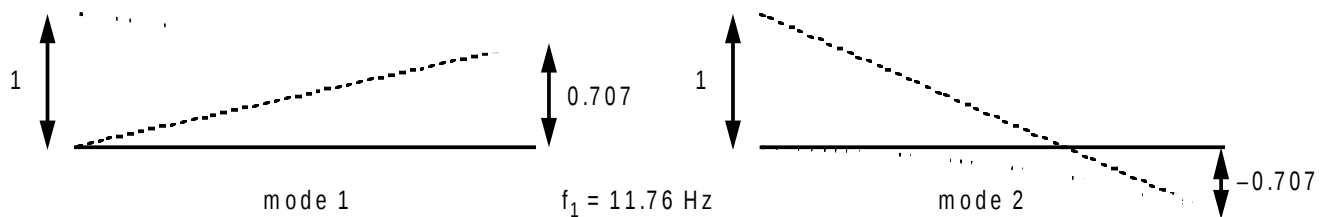
$$\cos(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = (2i-1) \frac{\pi}{2}$$
$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}} \quad i = 1, 2, \dots$$

Pour une section rectangulaire, on obtient :

$$f_i = (2i-1)^2 \pi \frac{R}{8L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}} \quad i = 1, 2, \dots$$

Cette formulation néglige les déformations d'effort tranchant et d'inertie de rotation (poutre d'Euler-Bernoulli).

Pour les modes propres, les formes sont données dans le guide VPCS. Ils sont normés à 1 ou -1 au point de plus grande amplitude. On a des résultats seulement pour les modes 1, 2, 3, 4, 7 et 8. Par exemple, les formes des deux premiers modes propres sont les suivantes :



Remarque :

Dans Code_Aster, quand une valeur propre est multiple, les modes propres associés à cette valeur propre, même s'ils sont normés et orthogonaux deux à deux, sont, a priori, imprévisibles. On ne sait pas, pour l'instant, tester la forme d'un mode multiple.

2.2 Résultats de référence

Les résultats de référence sont les huit premières fréquences propres.

2.3 Incertitude sur la solution

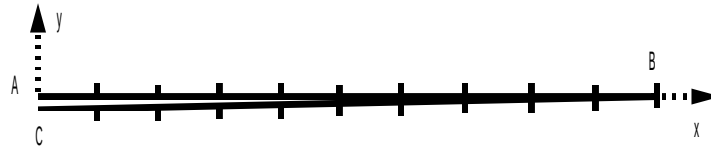
Il n'y a pas d'incertitude sur la solution car elle est analytique.

2.4 Références bibliographiques

- 1) PIRANDA J. : Cours et Travaux Dirigés de Vibrations des Structures - Option Mécanique - Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et Micromécanique - Laboratoire de Mécanique Appliquée - Besançon (France (1983).)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



On a découpé la poutre en 20 mailles `SEG2` (10 pour la partie `AB` et 10 pour la partie `BC`).

La modélisation utilisée pour les poutres est celle d'Euler Bernoulli (`POU_D_E`).

On recherche des solutions bidimensionnelles. On peut donc bloquer pour tous les nœuds le déplacement `DZ` et les rotations `DRX` et `DRY`.

L'extrémité de la poutre (point `A`) est encastrée d'où en ce point :

$$DX = DY = 0. \quad DRZ = 0.$$

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 21 nœuds et 20 mailles de type `SEG2`.

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

$$\text{Point } A = A \quad \text{Point } B = B \quad \text{Point } C = C$$

3.3 Grandeurs testées et résultats

Pour les fréquences de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

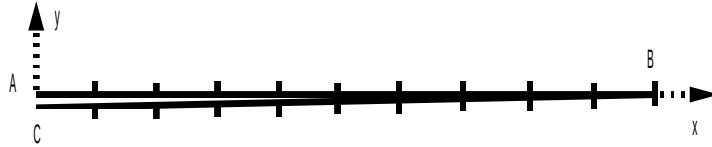
Identification	Référence
Fréquence 1	11.76
Fréquence 2	11.76
Fréquence 3	105.88
Fréquence 4	105.88
Fréquence 5	294.10
Fréquence 6	294.10
Fréquence 7	576.44
Fréquence 8	576.44

3.4 Remarques

Pour les fréquences propres, les résultats obtenus sont très bons (erreur < 0.1%).

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



On a découpé la poutre en 20 mailles `SEG2` (10 pour la partie AB et 10 pour la partie BC).

La modélisation utilisée pour les poutres est celle d'Euler Bernouilli (`POU_D_E`).

On recherche des solutions bidimensionnelles. On peut donc bloquer pour tous les nœuds le déplacement DZ et les rotations DRX et DRY .

L'extrémité de la poutre (point A) est encastrée d'où en ce point :

$$DX = DY = 0. \quad DRZ = 0.$$

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 21 nœuds et 20 mailles de type `SEG2`.

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

$$\text{Point } A = A \quad \text{Point } B = B \quad \text{Point } C = C$$

4.3 Grandeurs testées et résultats

Pour les fréquences de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

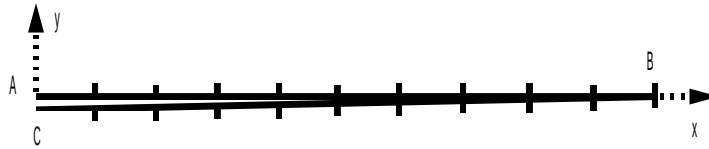
Identification	Référence
Fréquence 1	11.76
Fréquence 2	11.76
Fréquence 3	105.88
Fréquence 4	105.88
Fréquence 5	294.10
Fréquence 6	294.10
Fréquence 7	576.44
Fréquence 8	576.44

4.4 Remarques

Pour les fréquences propres, les résultats obtenus sont très bons (erreur < 0.1%).

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



On a découpé la poutre en 20 mailles `SEG3` (10 pour la partie `AB` et 10 pour la partie `BC`).

La modélisation utilisée est `COQUE_C_PLAN`.

L'extrémité de la poutre (point `A`) est encastrée d'où en ce point :

$$DX = DY = DRZ = 0.$$

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 41 nœuds et 20 mailles de type `SEG3`.

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point `A=A` Point `B=B` Point `C=C`

5.3 Grandeurs testées et résultats

Pour les fréquences de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Référence
Fréquence 1	11.76
Fréquence 2	11.76
Fréquence 3	105.88
Fréquence 4	105.88
Fréquence 5	294.10
Fréquence 6	294.10
Fréquence 7	576.44
Fréquence 8	576.44

5.4 Remarques

Dans ce cas-test, où les résultats sont indépendants du module d'Young, il n'est pas nécessaire de modifier le module d'Young retenu pour la modélisation, comme dans le cas de l'analyse statique linéaire, pour tenir compte de la largeur réelle de la poutre.

6 Synthèse des résultats

Modélisations A et B de type Poutre :

Le problème est traité avec une très bonne précision sur les huit premières fréquences (tolérance $< 0.1\%$) pour les deux modélisations testées.

Modélisation COQUE_C_PLAN

La précision sur les résultats est bonne pour les trois premières fréquences, l'erreur est de l'ordre de 0.6% . Elle se dégrade au fur et à mesure que la fréquence augmente, l'erreur passe de la 4^{ième} fréquence à la 8^{ième} de 1.5% à 6.4% . Plus la fréquence est élevée plus l'écart entre les fréquences doubles est important.