

## SDLD30 - Réponse sismique spectrale d'un système 2 masses et 3 ressorts multi-supporté

---

### Résumé :

Le problème consiste à calculer la réponse spectrale d'un système 2 masses - 3 ressorts soumis à une excitation sismique multiple.

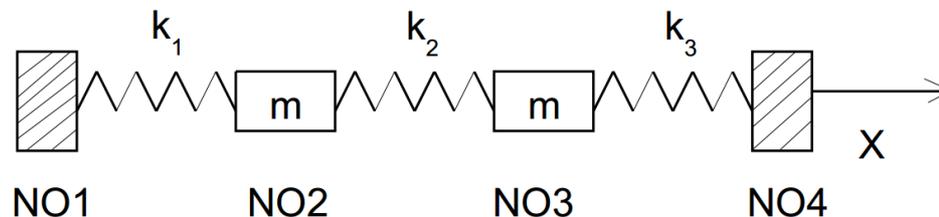
On teste l'élément discret en traction, le calcul des modes propres, des modes statiques et de la réponse spectrale par superposition modale via l'opérateur `COMB_SISM_MODAL`. Différents cumuls sont testés lors du calcul des réponses d'appuis.

Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats analytiques de référence.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

La structure est modélisée par un ensemble de 3 ressorts et de 2 masses ponctuelles.



### 1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison :  $k_1 = k_2 = k = 1000 \text{ N/m}$  ;  $k_3 = 10k = 10000 \text{ N/m}$   
 masse ponctuelle :  $m_2 = m_3 = m = 10 \text{ kg}$ .

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

#### •conditions aux limites

Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe  $x$ .

Les points  $NO1$  et  $NO4$  sont encastrés :  $DX=DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$ .

Les autres points sont libres en translation selon la direction  $x$  :  $DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$ .

#### •chargement

La structure est soumise à une excitation sismique spectrale multiple et à des déplacements différentiels.

Les spectres de réponses d'oscillateur en pseudo accélération sont simplifiés. Seules les valeurs correspondant aux 2 fréquences propres du système sont mentionnées. Elles ne dépendent pas de l'amortissement :

#### •au nœud $NO1$ :

$$SRO_{NO1}(f_1) = A_{11} = 7 \text{ m/s}^2$$

$$SRO_{NO1}(f_2) = A_{21} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$DDS_{NO1} = D_1 = -0.04 \text{ m}$$

#### •au nœud $NO4$ :

$$SRO_{NO4}(f_1) = A_{12} = 12 \text{ m/s}^2$$

$$SRO_{NO4}(f_2) = A_{22} = 6 \text{ m/s}^2$$

$$DDS_{NO4} = D_2 = 0.06 \text{ m}$$

### 1.4 Conditions initiales

Le système est initialement au repos.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On calcule la réponse spectrale par superposition modale d'un système masse ressort soumis à deux excitations distinctes. On détermine le déplacement des masses et les réactions d'appui aux nœuds  $NO1$  et  $NO4$  suivant l'axe  $x$ .

On calcule analytiquement :

- les fréquences propres  $f_i$ ,
- les vecteurs propres associés  $\varphi_{Ni}$  normalisés par rapport à la masse modale,
- les modes statiques d'appuis  $\psi_j$  du système,
- les facteurs de participation modale  $P_{ij}$  relatif aux appuis,
- $Rm_{ij}$  le maximum de la réponse de chaque mode à partir des spectres d'excitation,
- $Re_j$  la contribution du mouvement d'entraînement de chaque appui à partir des déplacements différentiels,
- $Rc_j$  le terme de correction statique,
- les composantes primaires et secondaires de la réponse en fonction des règles de cumul adoptées.

### 2.2 Résultats de référence

•matrice de rigidité  $K$

$$K = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 11k & -10k \\ 0 & 0 & -10k & 10k \end{bmatrix}$$

$$K^p = \begin{bmatrix} 2k & -k & -k & 0 \\ -k & 11k & 0 & -10k \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & -10k & 0 & 10k \end{bmatrix}$$

matrice partitionnée degrés de liberté de structure 2, 3, degrés de liberté de support 1, 4

$$K^p = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xs} \\ k_{sx} & k_{ss} \end{bmatrix} \quad k_{xx} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 11k \end{bmatrix} \quad k_{xs} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -10k \end{bmatrix}$$

$$k_{sx} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -10k \end{bmatrix} \quad k_{ss} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 10k \end{bmatrix}$$

•matrice de masse  $M$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

•calcul modal en base encastrée

$$k_{xx} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 11k \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (k_{xx} - \lambda_i m_{xx} \varphi_i) &= 0 & \lambda_i &= \omega_i^2 \\ \text{soit } \lambda_1 &= \frac{k}{2m} (13 - \sqrt{85}) & \lambda_2 &= \frac{k}{2m} (13 + \sqrt{85}) \end{aligned}$$

1) fréquences propres :

$$\text{soit } f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

1) modes propres non normés :

$$\text{soit } \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ (-9 + \sqrt{85})/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ (9 + \sqrt{85})/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

•masses modales généralisées  $\mu_i = {}^T \varphi_i M \varphi_i$  :

$$\text{soit } \mu_1 = \frac{m}{4} (170 - 18\sqrt{85}) \quad \mu_2 = \frac{m}{4} (170 + 18\sqrt{85})$$

[1] modes propres normés à la masse modale généralisée unitaire  $\varphi_{Ni}$  :

$$\text{soit } \varphi_{N1} = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\mu_1}} \quad \varphi_{N2} = \frac{\varphi_2}{\sqrt{\mu_2}}$$

•réactions modales  $Fm_i$  :

$$r_i = k_{sx} \varphi_{Ni} \quad \varphi_{Ni}^p = \begin{pmatrix} \varphi_{Nix} \\ \varphi_{Nis} \end{pmatrix} \quad Fm_i^p = \begin{pmatrix} 0 \\ r_i \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } Fm_1 = \frac{k}{\sqrt{\mu_1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5(9 - \sqrt{85}) \end{pmatrix} \quad Fm_2 = \frac{k}{\sqrt{\mu_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -5(9 + \sqrt{85}) \end{pmatrix}$$

•facteurs de participation modale  $P_{ij} = {}^T \varphi_i M \psi_j$  :

•contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud NO1 :

$$P_{11} = {}^T \varphi_1 M \psi_1 = \frac{m}{42\sqrt{\mu_1}} (13 + \sqrt{85})$$

•contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud NO4 :

$$P_{12} = {}^T \varphi_1 M \psi_2 = \frac{10m}{21\sqrt{\mu_1}} (-8 + \sqrt{85})$$

- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud *NO1* :

$$P_{21} = {}^T \varphi_2 M \psi_1 = \frac{m}{42\sqrt{\mu_2}} (-13 + \sqrt{85})$$

- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud *NO4* :

$$P_{22} = {}^T \varphi_2 M \psi_2 = \frac{10m}{21\sqrt{\mu_2}} (8 + \sqrt{85})$$

- facteur de participation du mode dynamique 1 dans la direction *X* :

$$P_{1X} = P_{11} + P_{12}$$

- facteur de participation du mode dynamique 2 dans la direction *X* :

$$P_{2X} = P_{21} + P_{22}$$

## • modes statiques d'appuis $\psi_j$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud *NO1* :

$$\text{déplacements : } \psi_1 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{réactions nodales : } F_{S_1} = K \psi_1 = \frac{10}{21} k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud *NO4* :

$$\text{déplacements : } \psi_2 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \text{réactions nodales : } F_{S_2} = K \psi_2 = \frac{10}{21} k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## • réponse du mode *i* au mouvement de l'appui *j*

$$Rm_{ij} = r_i P_{ij} \frac{A_{ij}}{\omega_i^2} \quad \text{avec } r_i = \varphi_{Ni} \text{ ou } Fm_i$$

## • correction statique

- modes statiques  $u_j$  solution de  $K u_j = M \psi_j$  :

$$\text{déplacements : } u_1 = \frac{m}{441k} \begin{pmatrix} 0 \\ 122 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{réactions nodales : } F u_1 = \frac{m}{441} \begin{pmatrix} -122 \\ 231 \\ 21 \\ -130 \end{pmatrix}$$

$$\text{déplacements : } u_2 = \frac{m}{441k} \begin{pmatrix} 0 \\ 130 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{réactions nodales : } F u_2 = \frac{m}{441} \begin{pmatrix} -130 \\ 210 \\ 420 \\ -500 \end{pmatrix}$$

- correction statique relative au mouvement de l'appui *j* si le mode 2 n'est pas retenu :

$$Rc_j = \left( ru_j - \frac{P_{1j} r_1}{\omega_1^2} \right) A_{1j} \text{ avec : } ru_j = u_j \text{ ou } Fu_j \text{ et } r_1 = \varphi_{N1} \text{ ou } Fm_1$$

• contribution de l'appui  $j$  au mouvement d'entraînement

$$Re_j = r_j D_j \text{ avec } r_j = \psi_j \text{ ou } Fs_j$$

Ces calculs analytiques sont décrits dans le fichier Matlab sld30a.55.

## 2.3 Incertitude sur la solution

Aucune (solution analytique exacte).

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le système est modélisé par :

- 3 éléments discrets  $K\_T\_D\_L$ ,
- 2 éléments discrets  $M\_T\_D\_N$ .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 3 mailles  $SEG2$ .

## 4 Résultats de la modélisation A

### 4.1 Fréquences propres

MODE	Référence
1	2,18815E+00
2	5,30484E+00

### 4.2 Réponse globale sur base modale complète

Les modes 1 et 2 sont pris en compte. Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) de la réponse sont directement cumulées au niveau des appuis.

- calcul n°1

COMB\_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui  $j=1$  (nœud  $NO1$ ) :  $R_1 = \sqrt{Rm_1^2 + Re_1^2}$  avec  $Rm_1 = \sqrt{Rm_{11}^2 + Rm_{21}^2}$  (cumul sur les modes)
- réponse de l'appui  $j=2$  (nœud  $NO4$ ) :  $R_2 = \sqrt{Rm_2^2 + Re_2^2}$  avec  $Rm_2 = \sqrt{Rm_{12}^2 + Rm_{22}^2}$
- réponse globale :  $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$  (cumul sur les appuis)

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
$NO1$	4,00000E-02
$NO2$	5,43820E-02
$NO3$	5,75544E-02
$NO4$	6,00000E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
$NO1$	5,36769E+01
$NO4$	7,44120E+01

## 4.3 Réponse globale sur base modale incomplète sans correction statique

Seul le mode 1 est pris en compte. Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) de la réponse sont directement cumulées au niveau des appuis.

- calcul n°1

COMB\_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui  $j=1$  (nœud *NO1*) :  $R_1 = \sqrt{Rm_1^2 + Re_1^2}$  avec  $Rm_1 = Rm_{11}$
- réponse de l'appui  $j=2$  (nœud *NO4*) :  $R_2 = \sqrt{Rm_2^2 + Re_2^2}$  avec  $Rm_2 = Rm_{12}$
- réponse globale :  $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	4,00000E-02
<i>NO2</i>	5,43794E-02
<i>NO3</i>	5,73536E-02
<i>NO4</i>	6,00000E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	5,36743E+01
<i>NO4</i>	5,68312E+01

## 4.4 Réponse globale sur base modale incomplète avec correction statique

Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse. La contribution statique du mode 2 négligé est prise en compte.

- calcul n°1

COMB\_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui  $j=1$  (nœud *NO1*) :  $R_1 = \sqrt{Rm_1^2 + Rc_1^2 + Re_1^2}$  avec  $Rm_1 = Rm_{11}$
- réponse de l'appui  $j=2$  (nœud *NO4*) :  $R_2 = \sqrt{Rm_2^2 + Rc_2^2 + Re_2^2}$  avec  $Rm_2 = Rm_{12}$
- réponse globale :  $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence	Tolérance
<i>NO1</i>	4,00000E-02	0.001
<i>NO2</i>	0.054389658	0.001
<i>NO3</i>	0.058152653	0.001
<i>NO4</i>	6,00000E-02	0.001

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence	Tolérance
NO1	53.6846755	0.001
NO4	111.6190600	0.001

## 4.5 Partition des composantes primaire et secondaire de la réponse

Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) sont traitées séparément.

### •calcul n°1

#### •réponse primaire sur base modale complète (modes 1 et 2)

COMB\_MODE='SRSS'

1) réponse de l'appui  $j=1$  (nœud NO1) :  $RI_1 = \sqrt{Rm_{11}^2 + Rm_{21}^2}$  (cumul sur modes)

•réponse de l'appui  $j=2$  (nœud NO4) :  $RI_2 = \sqrt{Rm_{12}^2 + Rm_{22}^2}$

•réponse primaire :  $RI = \sqrt{RI_1^2 + RI_2^2}$

déplacements relatifs : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	0,00000E+00
NO2	4,12562E-02
NO3	6,60152E-03
NO4	0,00000E+00

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,12562E+01
NO4	6,60152E+01

#### •réponse secondaire

COMB\_DEPL\_APPUI='QUAD'

1) réponse secondaire :  $RII = \sqrt{Re_1^2 + Re_2^2}$

déplacements d'entraînement : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	4,00000E-02
NO2	3,54306E-02
NO3	5,71746E-02
NO4	6,00000E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
NO1	3,43386E+01
NO4	3,43386E+01

- calcul n°2

- réponse primaire sur base modale incomplète sans correction statique  
Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse

COMB\_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui  $j=1$  (nœud *NO1*) :  $RI_1 = Rm_{11}$

- réponse de l'appui  $j=2$  (nœud *NO4*) :  $RI_2 = Rm_{12}$

- réponse primaire :  $RI = \sqrt{RI_1^2 + RI_2^2}$

déplacements relatifs : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	0,00000E+00
NO2	4,12528E-02
NO3	4,52841E-03
NO4	0,00000E+00

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,12528E+01
NO4	4,52841E+01

- réponse secondaire

COMB\_DEPL\_APPUI='LINE'

- réponse secondaire :  $RII = Re_1 + Re_2$

déplacements d'entraînement : DEPL

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	-4,00000E-02
<i>NO2</i>	7,61905E-03
<i>NO3</i>	5,52381E-02
<i>NO4</i>	6,00000E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	-4,76190E+01
<i>NO4</i>	4,76190E+01

- calcul n°3

- réponse primaire sur base modale incomplète avec correction statique  
Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse

COMB\_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui  $j=1$  (nœud *NO1*) :  $RI_1 = \sqrt{Rm_{11}^2 + Rc_1^2}$

- réponse de l'appui  $j=2$  (nœud *NO4*) :  $RI_2 = \sqrt{Rm_{12}^2 + Rc_2^2}$
- réponse primaire :  $RI = \sqrt{RI_1^2 + RI_2^2}$

déplacements relatifs : DEPL

NOEUD	Référence	Tolérance
<i>NO1</i>	0,00000E+00	-
<i>NO2</i>	4,1266282E-02	0.001
<i>NO3</i>	1.0620582E-02	0.001
<i>NO4</i>	0,00000E+00	-

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence	Tolérance
<i>NO1</i>	4,12662823E+001	0.001
<i>NO4</i>	1.0620581996E+02	0.001

- réponse secondaire

COMB\_DEPL\_APPUI='ABS'

- réponse secondaire :  $RII = |Re_1| + |Re_2|$

déplacements d'entraînement : DEPL

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	4,00000E-02
<i>NO2</i>	4,95238E-02
<i>NO3</i>	5,90476E-02
<i>NO4</i>	6,00000E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,76190E+01
NO4	4,76190E+01

- calcul n°4

- réponse primaire sur base modale incomplète avec correction statique

Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse.

COMB\_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui  $j=1$  (nœud NO1) :  $RI_1 = \sqrt{Rm_{11}^2 + Rc_1^2}$

- réponse de l'appui  $j=2$  (nœud NO4) :  $RI_2 = \sqrt{Rm_{12}^2 + Rc_2^2}$

- réponse primaire :  $RI = \sqrt{RI_1^2 + RI_2^2}$

- réponse secondaire : test cumul de DDSs

5 cas de charge sont définis. Les 5 réponses statiques élémentaires associées sont :

- cas a :  $DDSa_{NO1} = -0.04$  soit  $R_a = r_1 \times DDSa_{NO1}$

- cas b :  $DD Sb_{NO4} = 0.06$  soit  $R_b = r_2 \times DD Sb_{NO4}$

- cas c :  $DD Sc_{NO4} = 0.03$  soit  $R_c = r_2 \times DD Sc_{NO4}$

- cas d :  $DD Sd_{NO1} = -0.07$  soit  $R_d = r_1 \times DD Sd_{NO1}$

- cas e :  $DD Se_{NO4} = 0.05$  soit  $R_e = r_2 \times DD Se_{NO4}$

4 combinaisons sont calculées :

- combinaison n°1

cumul linéaire des cas a et b : TYPE\_COMBI='LINE' NUME\_ORDRE=200

réponse secondaire :  $RII_1 = Ra + Rb$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	-4,00000E-02
NO2	7,61905E-03
NO3	5,52381E-02
NO4	6,00000E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
NO1	-4,76190E+01
NO4	4,76190E+01

- combinaison n°2

cumul absolu des cas a et c : TYPE\_COMBI='ABS' NUME\_ORDRE=201

réponse secondaire :  $RII_2 = |Ra| + |Rc|$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	4,00000E-02
NO2	3,52381E-02
NO3	3,04762E-02
NO4	3,00000E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
NO1	3,33333E+01
NO4	3,33333E+01

- **combinaison n°3**

cumul quadratique des cas d et e : TYPE\_COMBI='QUAD' NUME\_ORDRE=202

réponse secondaire :  $RII_3 = \sqrt{Rd^2 + Re^2}$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	7,00000E-02
NO2	4,37189E-02
NO3	4,77356E-02
NO4	5,00000E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,09635E+01
NO4	4,09635E+01

- **combinaison n°4**

cumul linéaire des cas a et e : TYPE\_COMBI='LINE' NUME\_ORDRE=203

réponse secondaire :  $RII_4 = Ra + Re$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	-4,00000E-02
NO2	2,85714E-03
NO3	4,57143E-02
NO4	5,00000E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
NO1	-4,28571E+01
NO4	4,28571E+01

La réponse secondaire totale est établie par le cumul quadratique des 4 combinaisons précédentes :

$$RII = \sqrt{RII_1^2 + RII_2^2 + RII_3^2 + RII_4^2} \quad \text{NUME\_ORDRE}=204$$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	9,84886E-02
NO2	5,67386E-02
NO3	9,13703E-02
NO4	9,74679E-02

réactions nodales : REAC\_NODA

NOEUD	Référence
NO1	8,30266E+01
NO4	8,30266E+01

## 5 Synthèse des résultats

---

Les résultats obtenus avec *Code\_Aster* sont conformes aux résultats analytiques de référence.