Approche énergétique de la prédiction du clivage Gp

Résumé

Le paramètre G_p permet de définir un critère d'amorçage valide dans le domaine du clivage (rupture fragile en présence de plasticité). On rappelle tout d'abord les fondements de cette approche : modélisation de la fissure par une entaille, principe de minimisation de l'énergie, formulation, extension au 3D. On précise ensuite les éléments essentiels à l'implémentation de cette approche dans *Code_Aster*.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Bases théoriques....3
1.1 Champ d'application et intérêt de l'approche Gp....3
1.2 Représentation de la fissure par une entaille....3
1.3 Principe de minimisation....4
1.4 Définition d'un taux de restitution d'énergie élastique en plasticité incrémentale....4
1.5 Extension au 3D....5
2 Mise en oeuvre dans Code_Aster....6
2.1 Calcul de Gp....6
2.2 Identification des paramètres....7
3 Bibliographie....8

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Bases théoriques

Dans ce chapitre on rappelle l'intérêt de l'approche, on décrit la représentation de la fissure par une entaille puis on présente le principe de minimisation qui conduit à la définition du paramètre en 2D. On termine par l'extension de la définition du paramètre G_p en 3D.

1.1 Champ d'application et intérêt de l'approche Gp

En mécanique de la rupture, le paramètre classique permettant de définir un critère d'amorçage est le paramètre G, taux de restitution d'énergie élastique. On le calcule par la méthode THETA (commande CALC_G) soit en élasticité linéaire [R7.02.01], soit en élasticité non linéaire [R7.02.03]. On peut également le calculer pour un comportement élastoplastique en supposant que le chargement est proportionnel. Cette hypothèse implique que les équations de la plasticité sont équivalentes aux équations de Hencky (qui sont celles de l'élasticité non linéaire).

Dans le cadre de l'élastoplasticité incrémentale, quand le chargement est non proportionnel, on dispose du paramètre GTP [R7.02.07], appelé taux de restitution d'énergie mécanique totale, qui nécessite de mailler la fissure par une entaille (calculé par la commande CALC_G également). Cependant ce paramètre ne permet pas, à l'heure actuelle, de définir un critère valide dans le domaine de la rupture par clivage (rupture fragile en présence de plasticité).

Le paramètre G_p, en revanche, est valide en plasticité incrémentale ; il permet de définir un critère d'amorçage dans le domaine du clivage. Sa définition, comme on va le voir, ne fait appel qu'à l'énergie libre ainsi qu'à quelques paramètres géométriques nécessaires à la définition de la fissure, modélisée par une entaille. Au final, il représente une énergie élastique moyenne présente dans la zone adjacente au front d'entaille. On notera que l'énergie élastique est fortement liée à la contrainte ($W_{elas}= \sigma^2/E$), ce qui permet de rapprocher l'approche énergétique des critères en contrainte tels que Beremin, Bordet, ou Le Corre.

1.2 Représentation de la fissure par une entaille

Dans le cadre de l'approche G_p, la fissure réelle située dans le domaine Ω n'est pas modélisée par une surface de discontinuité des champs de déplacements, mais par une « entaille » qui correspond, lors de la propagation, à une zone endommagée de rigidité nulle (voir la Figure 1.2-a).

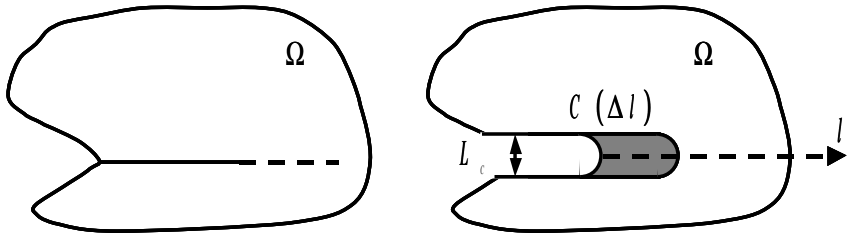

Figure 1.2-a - Représentation de la fissure par une entaille

L_c est l'épaisseur de cette entaille et $R=\frac{L_c}{2}$ est le rayon du cercle représentant le fond d'entaille.

La zone endommagée ou zone de propagation virtuelle de l'entaille est appelée $C(\Delta l)$, Δl étant la longueur de la zone $C(\Delta l)$, (ou encore la distance au fond d'entaille). Ainsi, en toute rigueur, nous ne sommes plus dans le contexte de la mécanique de la rupture mais dans celui de la mécanique de l'endommagement. Un champ d'endommagement $\chi(M)$ est défini sur Ω. Par définition, $\chi(M)=0$ sur Ω, avant la propagation de l'entaille et, $\chi(M)=0$ sur $\left\{\Omega-C(\Delta l)\right\}$, $\chi(M)=1$ sur $C(\Delta l)$ après la propagation de l'entaille. L'énergie volumique dissipée dans le processus d'endommagement est notée : w_c.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque :
On aurait pu distinguer l'épaisseur de l'entaille préexistante, de celle de la zone endommagée. Ceci aurait conduit à un modèle un peu plus complexe (plus de paramètres). Par souci de simplicité on ne fait donc pas cette distinction mais, on impose la condition : $L_c \ll L$, L étant la longueur de la fissure, afin que l'entaille soit bien représentative d'une vraie fissure.

1.3 Principe de minimisation

Dans le cadre élastique, l'évolution de l'endommagement est obtenue par la minimisation de l'énergie totale suivante proposée par Francfort et Marigo 1 pour sa simplicité :

$$E_{tot}(u,\chi)=\int_\Omega \left[(1-\chi)\Phi_{el}+\Delta\chi\, w_C\right] d\Omega \tag{1}$$

où Φ_{el} est la densité d'énergie libre, définie par $\Phi_{el}=\int_\Omega \frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{A}^{-1}:\boldsymbol{\sigma}]\,d\Omega$ (où $\boldsymbol{A}$ est la matrice tangente du comportement), et Δ désigne la variation d'une grandeur durant l'incrément considéré. Comme l'endommagement initial est nul, et que l'on considère ici la rupture brutale (soit $\chi=0$ ou $\chi=1$), on a ici : $\Delta\chi=\chi$. L'égalité des énergies dissipées pendant la propagation de la fissure G_C et de l'énergie dissipée volumique du modèle d'endommagement pour l'entaille permet d'écrire :

$$G_C=w_c L_c \tag{2}$$

On peut remarquer que G_C ne représente plus "l'énergie de surface" usuelle mais plutôt la valeur critique d'une densité d'énergie intégrée sur un volume. Le mécanisme de rupture est donc contrôlé par deux paramètres matériau, w_c et L_c, ce qui est différent du critère de Griffith qui ne dépend que de G_C .

Dans le cas d'un comportement élastoplastique la définition de l'énergie totale E_{tot} est étendue, en supposant que les mécanismes de dissipation de rupture et plastique sont indépendants. On considère l'expression suivante (cf. 3) :

$$E_{tot}(u,\boldsymbol{\varepsilon}^p,\alpha,\chi)=\int_\Omega \left[(1-\chi)\Phi_{el}+\Delta\chi\, w_C\right] d\Omega+E_{bl}(\alpha)+D_{pl}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p,\Delta\alpha) \tag{3}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^p$, α , E_{bl} et D_{pl} étant respectivement le champ de déformation plastique, les variables d'écrouissage, l'énergie libre bloquée par la plasticité, et la dissipation plastique. Par ailleurs, l'énergie dissipée pendant la propagation sera maintenant notée G_{PC} (en plasticité) pour la différencier de G_C (en élasticité).

1.4 Définition d'un critère en élastoplasticité

Afin de simplifier la présentation on se place dans le cadre 2D (l'extension au 3D sera présentée au paragraphe 1.5) ainsi qu'à des trajets de fissuration prédéfinis et sujets à une évolution continue de la fissure (pas de fissure en pointillés le long du trajet). On peut ainsi paramétrer la position de la fissure, après propagation, par le paramètre Δl, c'est à dire que l'on restreint les champs d'endommagement possibles χ à une famille $\chi(\Delta l)$. La question de l'amorçage peut alors être formulée de la manière suivante : à un état donné $(u,\boldsymbol{\varepsilon}^p,\alpha)$ correspondant à une évolution quasi-statique sans propagation de l'entaille, la solution sans propagation $\Delta l=0$ est-elle toujours licite au regard de la minimisation de 3 ? Dans le cas contraire, il y a propagation. On peut montrer qu'il s'agit de déterminer le minimum (cf. 3) :

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\min_{\Delta l \geqslant 0} E_{tot}\left(u, \boldsymbol{\varepsilon}^{p}, \alpha, \chi\left(\Delta l\right)\right) \tag{4}$$

La condition de propagation peut s'écrire :

$$\exists \Delta l > 0, G_{P}\left(\Delta l\right) \geqslant G_{PC}, \quad \text{avec } G_{P}\left(\Delta l\right) = \frac{\left[\int_{\Omega} \Phi_{el} \, d\Omega\right]}{\Delta l} \tag{5}$$

On définit alors le paramètre G_p comme :

$$G_{p} = \max_{\Delta l} G_{p}\left(\Delta l\right) \tag{6}$$

Le critère de propagation peut alors s'écrire :

$$G_{p} \geqslant G_{pc} \tag{7}$$

Le critère proposé implique la connaissance de 2 paramètres matériau, L_c et G_{pc}, qui nécessitent donc une identification (voir le paragraphe 2.2).

Le paramètre G_p est calculé comme le maximum (par rapport à Δl, longueur de propagation) de l'intégrale sur le domaine $C\left(\Delta l\right)$ de l'énergie libre Φ_{el}, divisée par Δl. C'est donc une densité d'énergie élastique moyenne (kJ/m^2). Ce n'est pas ici un taux de restitution d'énergie car l'énergie considérée pour la minimisation est celle de l'instant courant, et n'inclue par le rééquilibrage des champs après propagation.

A l'instar de $K_J\left(MPa\sqrt{m}\right)$, défini à partir de J via la relation d'Irwin $\left(J = \left[\frac{\left(1-\nu^2\right)}{E}\right] K_J^2\right)$ - valable en 2D déformation plane et en 3D -, on peut aussi définir un paramètre $K_{GP}\left(MPa\sqrt{m}\right)$ à partir de G_p à l'aide de cette même relation :

$$G_{p} = \left[\frac{\left(1-\nu^2\right)}{E}\right] K_{GP}^2 \tag{8}$$

1.5 Extension au 3D

La définition du paramètre G_p en 3D se heurte à la difficulté suivante : comment définir de façon générale les champs d'endommagement en fonction de « Δl » (distance de propagation virtuelle mesurée selon la normale au front de fissure) et de s (abscisse curviligne mesurée le long du front de fissure) ? Devant cette difficulté il semble raisonnable de se limiter à des champs d'endommagement définis « par extension » de ceux définis en 2D.

Pour un point M du front de fissure d'abscisse curviligne s on considérera donc le segment $(M1-M2)$ avec les extrémités $M1$ et $M2$ d'abscisses $\left[s-\delta s\,;\, s+\delta s\right]$ (voir Figure 1.5-a). On suppose que δs est suffisamment petit pour que l'on puisse considérer que la tranche 3D comprise entre les 2 plans normaux au front de fissure en $M1$ et $M2$ est en état de déformation plane. On

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

exclut donc les points du front trop près des bords libres s'ils existent. Le calcul du paramètre G_p au point M s'effectue alors comme en 2D, en remplaçant le plan 2D par la tranche 3D correspondante.

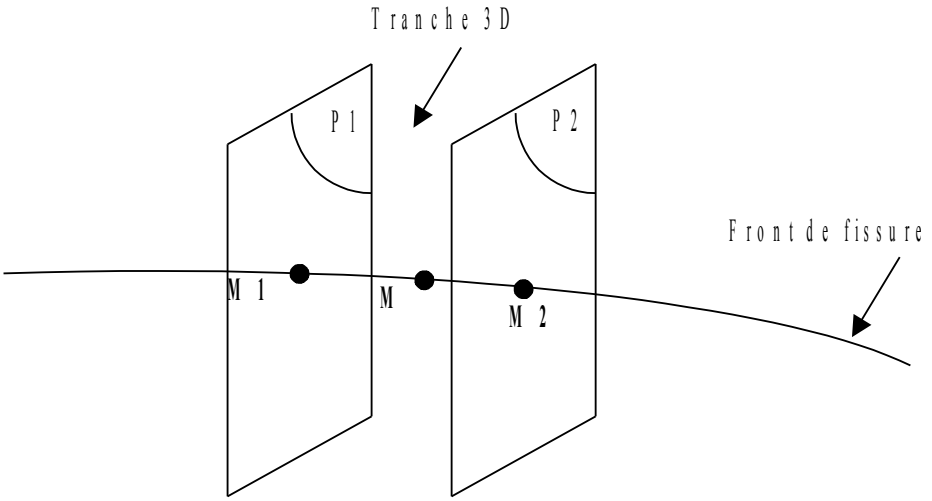

Figure 1.5-a -Définition des tranches en 3D

Concrètement le segment $(M1-M2)$ pourra correspondre à un élément fini de la discrétisation du front de fissure, et les plans normaux pourront être ceux que l'on définit classiquement en construisant le maillage 3D par extrusion d'un maillage 2D, localement autour du font de fissure.

En 2D, il faut donc définir en 2D une région d'épaisseur L_C représentant la zone endommagée ; en 3D il faut donc en plus définir des « tranches » permettant le calcul de G_p. Cependant ces deux contraintes ne conduisent pas nécessairement à définir des maillages particuliers, même si c'est cette dernière solution qui a été mise en œuvre jusqu'ici en 3D. Il est théoriquement possible en effet, de façon plus générale, de définir ces zones géométriquement sur un maillage libre (mais suffisamment fin) et de sélectionner les éléments finis appartenant à ces zones ; c'est ce qui est fait en 2D.

2 Mise en oeuvre dans *Code_Aster*

Le calcul mécanique est réalisé sous l'hypothèse d'un comportement thermo-élasto-plastique associé à un critère de Von Mises avec écrouissage isotrope ou cinématique linéaire (VMIS_ISOT_TRAC, VMIS_ISOT_LINE, VMIS_CINE_LINE). Nous allons préciser en quoi consiste le calcul de G_p et comment s'effectue l'identification des paramètres matériaux $R=\frac{L_c}{2}$ (rayon de l'entaille) et G_{PC} (limite de rupture).
La méthodologie de calcul et d'identification avec Code_Aster est présentée en Doc U2.05.08. La documentation d'utilisation simple est la Doc U4.82.31.

2.1 Calcul de Gp

Le calcul de G_p, réalisé à l'aide de la macro commande CALC_GP, est basé sur l'utilisation de POST_ELEM qui permet le calcul de l'énergie élastique sur un groupe de mailles. Les modélisations (éléments finis, petites ou grandes déformations, etc.) et chargements utilisables sont ceux de la commande POST_ELEM, mot clé ENER_ELAS. Plus précisément il s'agit, pour chaque instant prévu dans la liste des instants de calcul, de réaliser les deux étapes suivantes :

1/ tout d'abord calculer la quantité $G_p(\Delta l)$ pour des valeurs croissantes de Δl par:

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$G_P(\Delta l)=\frac{[\int_\Omega \Phi_{el}\, d\,\Omega]}{\Delta l}$$

En 2D il faut donc identifier les éléments de la zone $C(\Delta l)$ par un groupe de mailles défini au niveau du maillage comme présenté en Figure 2.1-a, ou par une zone géométrique de points de Gauss, puis calculer l'énergie élastique sur cette zone puis la diviser par Δl. En 3D on réalise la même opération dans chaque tranche, et on divise par la surface « ΔS » de la tranche.
Pour identifier les éléments de la zone $C(\Delta l)$ on opérera comme suit : les éléments du premier copeau constitueront un premier groupe de mailles, les éléments des copeaux 1 et 2 constitueront un second groupe, les éléments des copeaux $1,2,3,...,i$ constitueront un i ème groupe, etc. Il faut prévoir un nombre de copeaux suffisamment grand pour pouvoir trouver le maximum de $G_p(\Delta l)$, qui se trouve le plus souvent à une distance d'environ $3\mathrm{R}$ du fond d'entaille.

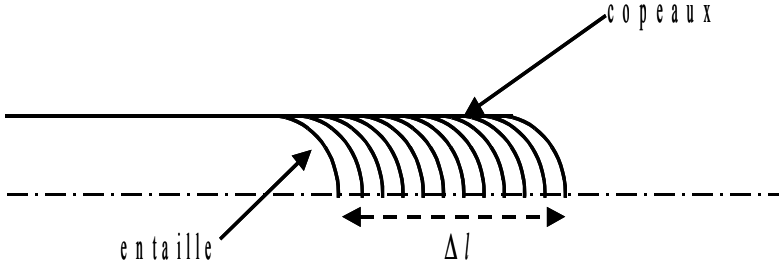

Figure 2.1-a - Définition des copeaux dans le maillage

2/ ensuite calculer le maximum de cette fonction :

$$G_p=\max_{\Delta l} G_p(\Delta l)$$

ce qui, en 3D conduit donc à autant de valeurs de G_p que de tranches.

On trouvera des exemples et conseils d'utilisation dans le document [U2.05.01], dans les tests ssnp131 [V6.03.131] et ssnv218 [V6.04.218].

2.2 Identification des paramètres

On suppose connu, pour le matériau considéré :

1) le module d'Young E,
2) la contrainte critique σ_c,
3) l'énergie de surface G_c.

Le paramètre G_{PC} est déterminé par simulation d'un essai sur éprouvette CT où la fissure est représentée par une entaille de rayon R donné. Pour chaque valeur du chargement, croissant de 0 jusqu'à une valeur critique, on calcule d'une part le paramètre G et d'autre part le paramètre G_p. Pour la valeur critique du chargement correspondant à $G=G_c$, on obtient $G_p=G_{PC}$. Cependant, cette valeur dépend directement de la valeur du paramètre R.

Ce paramètre R est déterminé via un essai de traction sur un barreau. Lors de la rupture du barreau (dans le domaine du clivage) un simple bilan d'énergie permet d'obtenir :

$$\frac{\sigma_c^2}{E}R=G_{PC}(R)$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La résolution de cette équation pour différentes valeurs de R, ce qui nécessite de déterminer la fonction $G_{PC}(R)$ pour ces mêmes valeurs, permet de déterminer et la valeur de R et la valeur de G_{PC}.

Cependant, dans la plupart des cas, on peut monter que la fonction G_p dépend explicitement de R et qu'il suffit alors de considérer une seule valeur de ce paramètre sous la seule condition : $R \ll L$, longueur de la fissure. Dans la plupart de cas, on prend $R = 50\,\mu m$. On a alors une seule simulation d'essai sur éprouvette CT à effectuer.

3 Bibliographie

[1] Francfort GA, Marigo JJ (1993) Stable damage evolution in a brittle continuous medium. Eur J Mech A Solids 12 (2):149-189

[2] Francfort GA, Marigo JJ (1998) Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 46 (8):1319-1342

[3] Lorentz E, Wadier Y (2004) L'approche énergétique de la rupture élastoplastique appliquée à la modélisation de la propagation d'une entaille. Revue Européenne des Eléments Finis 13:583-592

[4] Lorentz É, Wadier Y, Debruyne G (2000) Mécanique de la rupture fragile en présence de plasticité : définition d'un taux de restitution d'énergie. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics 328 (9):657-662

[5] Wadier Y, Bonnamy M The energy approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the analysis of the shallow crack effect. In: ASME PVP, Cleveland, USA, 2003a.

[6] Wadier Y, Bonnamy M The energy approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the analysis of the warm pre-stress effect. In: ASME PVP, Cleveland, USA, 2003b.

[7] Wadier Y, Bonnamy M The energy approach of elastic-plastic fracture mechanics applied to the analysis of a WPS experiment on a cracked cylinder. In: ASME PVP, Denver, USA, 2005.

Les références [1] et [2] sont relatives au principe de minimisation de l'énergie ou aux formulations énergétiques, les références [3] et [4] concernent les bases théoriques de l'approche G_P et les références [5], [6] et [7] sont relatives à des applications de l'approche.

4 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
10.4	Y. WADIER EDF R&D AMA	Texte initial

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)