Taux de restitution d'énergie en thermo-élasto-plasticité – Approche GTP

Résumé :

On présente le calcul du taux de restitution de l'énergie mécanique totale par la méthode thêta en 2D ou en 3D (approche G_{TP}) pour un problème thermo-élastoplastique. Les relations de comportement thermo-élasto-plastique sont décrites en détail dans le document [R5.03.02].

Ce taux de restitution de l'énergie mécanique totale, appelé G_{TP}, permet d'analyser les situations de chargements non monotones du défaut, pour des comportements de matériau irréversibles.

Notons que le problème de la rupture thermo-élasto-plastique est un problème délicat. Il est conseillé de consulter les références avant une première utilisation.

Attention :

Le défaut doit être modélisé par une entaille et non pas par une fissure [§5]. Cette approche n'est donc pas valable avec la méthode X-FEM [R7.02.12] car celle-ci ne permet pas de modéliser une entaille.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

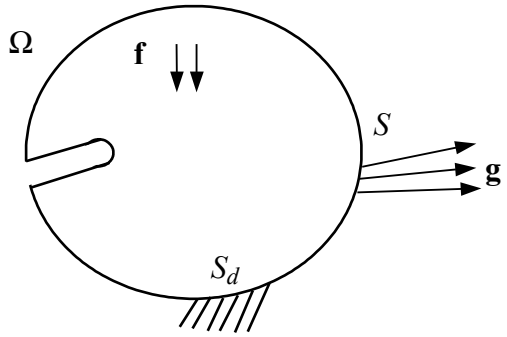
1 Choix de la formulation du taux de restitution d'énergie en thermo-élastoplasticité.....3
2 Relation de comportement.....4
3 Expression Lagrangienne du taux de restitution d'énergie en thermo-élasto-plasticité.....6
4 Implantation dans Code_Aster.....8
5 Restrictions.....8
6 Bibliographie.....8
7 Description des versions du document.....8

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Choix de la formulation du taux de restitution d'énergie en thermo-élastoplasticité

On considère un solide élastique **entaillé** occupant le domaine Ω de l'espace $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Soit :

$\mathbf{u}$ le champ de déplacement,
T le champ de température,
$\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes,
f le champ des forces volumiques appliquées sur Ω,
$\mathbf{g}$ le champ des forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$,
$\mathbf{U}$ le champ de déplacements imposés sur une partie S_d de $\partial\Omega$.



En thermo-élasticité linéaire ou non-linéaire, le taux de restitution de l'énergie G est défini par l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport au domaine Ω [bib1][R7.02.03] :

$$G=-\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \Omega}$$

L'énergie potentielle globale à l'équilibre du système est :

$$\mathrm{W}(\mathbf{u})=\int_{\Omega} \Psi \,\mathrm{d}\,\Omega-\int_{\Omega} \mathbf{f_i}\,\mathbf{u_i}\,\mathrm{d}\,\Omega-\int_{\mathrm{S}} \mathbf{g_i}\,\mathbf{u_i}\,\mathrm{dG}$$

où Ψ est la densité d'énergie libre. En élasticité, Ψ est égale à la densité d'énergie libre élastique [R7.02.01]

On étend cette définition pour le problème thermo-élasto-plastique (loi de Von Mises), en choisissant de remplacer Ψ par l'énergie mécanique totale $\tilde{\Psi}$. Ce choix est justifié dans le document [bib2].

$\tilde{\Psi}$ est une fonction des variables d'état suivantes :

$\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations totales,
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$ le tenseur des déformations plastiques,
T le champ de température,
p la variable interne scalaire d'écrouissage isotrope (déformation plastique cumulée),
$\boldsymbol{\beta}$ une ou plusieurs variables tensorielles ou scalaires d'écrouissage cinématique (ce type d'écrouissage n'est pas pris en charge dans le code pour le calcul de G).

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\tilde{\Psi}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},T,p,\boldsymbol{\beta}\right)=\int_{0}^{t}\boldsymbol{\sigma}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\,d\tau=\Psi\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},p,T,\boldsymbol{\beta}\right)+\int_{o}^{t}\mathrm{D}^{\mathrm{p}}(\tau)\,d\tau+\int_{o}^{t}s\frac{d}{d\tau}T(\tau)\,d\tau$$

où
- Ψ est la densité d'énergie libre
- D^{p} est la puissance volumique de dissipation plastique
- $s(T)$ est la densité d'entropie

On constate que $\tilde{\Psi}$ est la densité d'énergie libre augmentée de l'énergie volumique dissipée plastiquement au cours de toute l'évolution, et à laquelle est ajoutée l'énergie $\int_{o}^{t}\mathrm{s}\frac{d}{d\tau}T()\,d\tau$ (contribution de la température à la variation d'énergie libre).

Attention :

On se limite à un solide Ω entaillé (cf. [§5]).

2 Relation de comportement

Le comportement du solide est supposé thermo-élasto-plastique associé à un critère de Von Mises avec écrouissage isotrope. Ce type de comportement est traité actuellement dans l'opérateur STAT_NON_LINE [U4.32.01] sous le mot clé facteur COMPORTEMENT. Les relations traitées dans ce document sont :

VMIS_ISOT_LINE : Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire,
VMIS_ISOT_TRAC : Von Mises avec écrouissage isotrope donné par une courbe de traction.

Remarque: pour VMIS_ISOT_TRAC, la prise en compte de la thermique pour le calcul de G n'est actuellement pas disponible dans le code.

Pour plus de détails, consulter le document [R5.03.02].

$\boldsymbol{\varepsilon}$ est relié au champ de déplacement $\mathbf{u}$ par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}+\mathbf{u}_{\mathbf{j},\mathbf{i}}\right)$$

La densité d'énergie libre s'écrit :

$$\Psi\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},T,p,\boldsymbol{\beta}\right)=\omega^{e}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},T\right)+h(p,\beta,T)+z(T)$$

où

h est la densité d'énergie d'écrouissage
z une fonction arbitraire de la température
ω^{e} la densité d'énergie thermo-élastique définie par :

$$\omega_{e}\left(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^{p},T\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{e}=\frac{1}{2}\mathbf{A}_{\mathbf{ijkl}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}-\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{p}-\alpha\left(T-T_{réf}\right)\boldsymbol{\delta}_{ij}\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}-\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{p}-\alpha\left(T-T_{réf}\right)\boldsymbol{\delta}_{kl}\right),$$

avec α le coefficient de dilatation thermique, et $\mathbf{A}_{ijkl}$ le tenseur d'élasticité.

Dans le cas particulier où il n'y a pas eu d'évolution plastique, on retrouve l'expression de la densité d'énergie élastique pour un problème thermo-élastique linéaire [R7.02.01 §1.1].

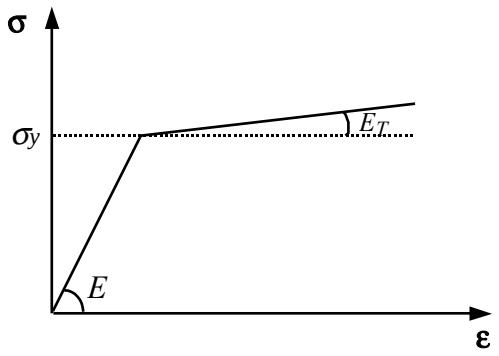
Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'énergie libre d'écrouissage h est déduite de :

$\frac{\partial h}{\partial p}(p,T)=R(p,T)$, pour l'écrouissage isotrope où $R(p,T)$ est le rayon de la surface de charge et $\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta},T)=X(\boldsymbol{\beta},T)$, pour l'écrouissage cinématique (non pris en charge dans le code pour le calcul de G) où $X(\boldsymbol{\beta},T)$ est la translation de la surface de charge dans l'espace des contraintes (dans le cas de l'écrouissage cinématique linéaire $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\varepsilon}^p$)

Pour la relation de comportement de Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire :

$$R(p,T)=\frac{E_T E}{E-E_T}p$$



Courbe de traction

Les caractéristiques du matériau (Module d'Young E et D_SIGM_EPSI : E_T) peuvent dépendre de la température [R5.03.02 §3.2.1].

La dissipation plastique (ou dissipation intrinsèque mécanique) pour une loi de comportement de Von Mises s'écrit :
$D^p=\sigma:\dot{\varepsilon}^p-R\,\dot{p}=\sigma_Y\,\dot{p}$
où σ_y est la limite d'élasticité linéaire initiale.
Donc la dissipation plastique vérifie :

$$\int_o^t D^p(\tau)\,d\tau=\sigma_y\,p$$

Finalement la densité d'énergie mécanique totale $\tilde{\Psi}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,T,p,\boldsymbol{\beta}) &= \Psi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,T,p,\boldsymbol{\beta})+\int_o^t D^p(\tau)\,d\tau+\int_o^t s\,\dot{T}(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}-\boldsymbol{\varepsilon_{ij}^p}-\alpha(T-T_{réf})\,\boldsymbol{\delta_{ij}}\right)+\int_o^p R(p,T)\,dp+\int_o^b X(\boldsymbol{\beta},T)\,dc+\sigma_y\,p\end{aligned}$$

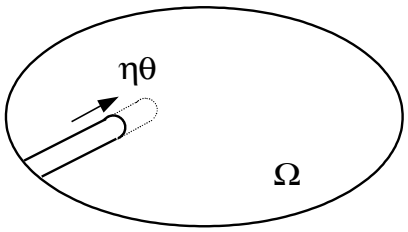
Pour un écrouissage isotrope linéaire :

$$\tilde{\Psi}=\tilde{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,T,p,\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}-\boldsymbol{\varepsilon_{ij}^p}-\alpha(T-T_{réf})\,\boldsymbol{\delta_{ij}}\right)+\frac{1}{2}\frac{E_T E}{E-E_T}p^2+\sigma_y\,p$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Expression Lagrangienne du taux de restitution d'énergie en thermo-élasto-plasticité

Le taux de restitution est calculé dans *Code_Aster* par la méthode G-théta [R7.02.01 §1.3]. On note par $\dot{\mathrm{Q}}$ la dérivée lagrangienne de la quantité Q dans une propagation virtuelle de l'entaille de $\eta\boldsymbol{\theta}$, η étant un petit paramètre réel et $\boldsymbol{\theta}$ un champ de vecteur représentant la direction de propagation de l'entaille (on a donc $\dot{\mathrm{Q}}(\mathbf{x}(\eta),\eta)=\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}+\nabla Q.\boldsymbol{\theta}$).



Le taux de restitution de l'énergie mécanique totale dans cette propagation $\eta\boldsymbol{\theta}$ est :

$$-\mathrm{G}(\boldsymbol{\theta})=\int_{\Omega}\left(\overline{\tilde{\Psi}-\mathbf{f_i}\,\mathbf{u_i}}\right)+\left(\tilde{\Psi}-\mathbf{f_i}\,\mathbf{u_i}\right)\boldsymbol{\theta}_{k,k}\,d\,\Omega$$
$$-\int_{S}\overline{\mathbf{g_i}\,\mathbf{u_i}}+\mathbf{g_i}\,\mathbf{u_i}\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k,k}}-\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\,\mathbf{n_k}}\mathbf{n_k}\right)d\,\Gamma$$

Or $\tilde{\Psi}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{ij}},\boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{\mathbf{ij}},T,p,\boldsymbol{\beta}_i\right)=\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{ij}}}.\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{ij}}}.\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{ij}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial T}\dot{T}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\partial\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{i}}}.\partial\dot{\boldsymbol{\beta}}_i+s\dot{T}$

avec
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}}=\boldsymbol{\sigma}_{ij}\\ \dfrac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}_{ij}}=-\boldsymbol{\sigma}_{ij}\\ \dfrac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial T}=-s\\ \dfrac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial p}=\mathrm{R}(p,T)+\sigma_Y p\\ \dfrac{\partial\tilde{y}}{\partial\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{i}}}=X_i(\partial\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{i}},T)\end{cases}$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\text{soit } -G(\boldsymbol{\theta})=\int_{\Omega}\boldsymbol{\sigma_{ij}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}-\boldsymbol{\sigma_{ij}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{p}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial T}\dot{T}+\mathrm{R}\,\dot{p}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{i}}}\dot{\beta}_{i}+\tilde{\Psi}\,\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}}\,d\,\Omega$$
$$+\ \text{termes classiques}\ (f,g)$$

$$\text{avec}\ \begin{cases}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\mathbf{u_{i,j}}}{\partial\eta}+\dfrac{\partial\mathbf{u_{j,i}}}{\partial\eta}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\mathbf{u_{i,k}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k,j}}+\mathbf{u_{j,k}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k,i}}\right)\\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{p}=\dfrac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{ij}}^{\mathbf{p}}}{\partial\eta}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{ij,k}}^{\mathbf{p}}\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}}\\ \dot{T}=\dfrac{\partial T}{\partial\eta}+\mathbf{T}_{,\mathbf{k}}\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{k}}\\ \dot{p}=\dfrac{\partial p}{\partial\eta}+\boldsymbol{p}_{,\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{k}}\\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_{ij}=\dfrac{\partial\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{ij}}}{\partial\eta}+\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{ij},\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{k}}\end{cases}$$

On peut éliminer $\dot{u}$ de l'expression de $\mathrm{G}(\boldsymbol{\theta})$ en remarquant que $\dot{u}$ est cinématiquement admissible et en utilisant l'équation d'équilibre [R7.02.01 §1.3]. De même, les termes $(-\boldsymbol{\sigma}.\dfrac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}}{\partial\eta}+\mathrm{R}\dfrac{\partial p}{\partial\eta}+X.\dfrac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\eta})+\sigma_{Y}\dfrac{\partial p}{\partial\eta}$ s'éliminent ainsi que les termes $\dfrac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial T}.\dfrac{\partial T}{\partial\eta}-s\dfrac{\partial T}{\partial\eta}$.

On obtient alors l'expression suivante :

$$-G(\boldsymbol{\theta})=\int_{\Omega}\tilde{\Psi}\,\theta_{k,k}-\sigma_{ij}u_{i,k}\sigma_{k,j}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,k}^{p}\theta_{k}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial T}T_{,k}q_{k}$$
$$+\left(\mathrm{R}(p,T)+\sigma_{y}\right)p_{,k}\theta_{k}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\beta_{ij}}\beta_{ij,k}\theta_{k}\,d\,\Omega$$
$$+\text{termes classiques}(\mathbf{f},\mathbf{g})$$

et finalement :

$$G(\boldsymbol{\theta})=\int_{\Omega}-\tilde{\Psi}\,\theta_{k,k}+\sigma_{ij}u_{i,k}\theta_{k,j}-\left(\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial T}T_{,k}+\left(\mathrm{R}+\sigma_{y}\right)p_{,k}+\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\beta_{ij}}\beta_{ij,k}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,k}^{p}\right)\theta_{k}\,d\,\Omega$$
$$+\text{termes classiques}(\mathbf{f},\mathbf{g})$$

Pour un chargement radial et monotone : $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,k}^{p}=\left(\mathrm{R}+\sigma_{y}\right)p_{,k}+\dfrac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\beta_{ij}}\beta_{ij,k}$ et on retrouve l'expression de $\mathrm{G}(\boldsymbol{\theta})$ en thermoélasticité non linéaire [R7.02.03].

Dans le cadre général, l'invariance de $\mathrm{G}(\boldsymbol{\theta})$ en fonction de la couronne d'intégration n'est pas démontrée.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Implantation dans *Code_Aster*

La comparaison des formulations de $G(\theta)$ en thermo-élasticité linéaire et en thermo-élasto-plasticité montre que les termes des deux formulations ne diffèrent que par des termes de transport des variables internes.

La présence du mot clé facteur COMPORTEMENT, et du mot clé facteur RELATION = 'VMIS_ISOT_LINE' (ou 'VMIS_ISOT_TRAC') indique qu'il est nécessaire de récupérer le champ de déplacements, $\mathbf{u}$ les contraintes σ, et les caractéristiques du matériau élasto-plastique.

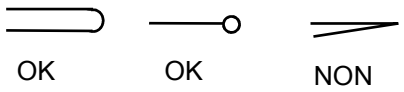
Les types d'éléments finis qui supportent ces options sont les mêmes qu'en élasticité [R7.02.01 §2.4]. Ce sont les éléments isoparamétriques 2D et 3D.

Les chargements supportés sont les mêmes que dans le cas élastique.

5 Restrictions

Attention :

Cette formulation de G pour une relation thermo-élasto-plastique n'est valable que pour un solide entaillé et pas pour un solide fissuré. On choisira par exemple (mais l'utilisateur pourra choisir sa propre entaille régulière) :



En effet, la difficulté principale dans l'établissement de cette formulation est l'impossibilité de démontrer l'existence de la dérivée de l'énergie mécanique totale pour un domaine comportant une fissure, et ceci principalement par l'absence de connaissance des singularités des champs en plasticité. Pour contourner le problème, on régularise le domaine en représentant le défaut sous forme d'entaille. Pour plus de détails, il est conseillé de consulter [bib2].

La validation de cette formulation est réalisée dans le test SSNP102 [V6.03.102] - Calcul du taux de restitution d'énergie pour un problème élasto-plastique – Approche GTP.

6 Bibliographie

1) BUI H.D. : Mécanique de la rupture fragile, Masson, 1977.

2) DEBRUYNE G. : Proposition d'un paramètre énergétique de rupture ductile en thermo-plasticité, HI-74/95/027/0, 23/02/96

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
4	G.DEBRUYNE, E.VISSE-R&D/AMA	Texte initial

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)