

## Loi de Mohr-Coulomb

---

### Résumé :

Ce document présente la méthode de résolution de la loi de Mohr-Coulomb dans *Code\_Aster*.

## Table des Matières

1 Notations.....	3
1.1 Données générales.....	3
1.2 Convention sur les notations tensorielles.....	3
2 Formulation en termes de contraintes principales.....	6
3 Intégration locale de la loi de Mohr-Coulomb.....	7
3.1 Cas où un seul mécanisme est actif.....	7
3.2 Cas où deux mécanismes sont actifs.....	8
3.2.1 Formulation de la solution.....	8
3.2.2 Choix du deuxième mécanisme LEFT ou RIGHT.....	10
3.3 Cas de la projection au sommet du cône.....	11
4 Expression de la matrice tangente consistante dans la base principale.....	14
4.1 Cas où un seul mécanisme est actif.....	14
4.2 Cas où deux mécanismes sont actifs.....	14
4.3 Cas de la projection au sommet du cône.....	14
5 Expression de la matrice tangente consistante dans la base globale.....	15
5.1 Quelques résultats sur les tenseurs symétriques isotropes d'ordre 2.....	15
5.2 Dérivée d'une fonction tensorielle isotrope d'ordre 2.....	15
5.2.1 Cas bidimensionnel de type contraintes planes (C_PLAN).....	16
5.2.2 Cas bidimensionnel de type déformations planes (D_PLAN) et axisymétrique (AXIS).....	17
5.2.3 Cas tridimensionnel.....	17
5.2.4 Application au calcul de la matrice tangente consistante de la loi de Mohr-Coulomb.....	19
6 Bibliographie.....	21

## 1 Notations

### 1.1 Données générales

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	Contraintes principales (dans cet ordre)
$E$	Module d'Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$	Module de compressibilité élastique
$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	Module de cisaillement élastique
$\phi$	Angle de frottement interne du matériau
$\psi$	Angle de dilatance du matériau
$c$	Cohésion du matériau
$s = \sin(\phi)$	
$t = \sin(\psi)$	
$p = \frac{I_1}{3} = \frac{\text{trace}(\boldsymbol{\sigma})}{3}$	Contrainte moyenne
$p < 0$	Convention de signe pour la contrainte en compression
$\boldsymbol{\sigma}^e$	Tenseur de prédiction élastique des contraintes
$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + d \boldsymbol{\varepsilon}^p$	Tenseurs des déformations totale, élastique et incrément de déformation plastique
$d \varepsilon_v^p = \text{trace}(d \boldsymbol{\varepsilon}^p)$	Incrément de la déformation plastique volumique
$d \boldsymbol{e}^p = d \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{d \varepsilon_v^p}{3} \mathbf{1}$	Incrément de la déformations plastique déviatorique

### 1.2 Convention sur les notations tensorielles

Les vecteurs des déformations et des contraintes dans la base principale  $(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3)$  sont notés :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

Le tenseur d'élasticité  $\boldsymbol{C}$  permettant de relier  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  dans la base principale, tel que  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$  s'écrit :

$$C = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G \end{bmatrix} \quad (1)$$

Les déformations et les contraintes sont des tenseurs symétriques d'ordre 2. On exploite généralement cette symétrie (6 composantes indépendantes) en les représentant par des vecteurs de dimension 6 en projetant ces tenseurs dans des bases appropriées.

Les déformations et les contraintes données en entrée et produites en sortie de la résolution de la loi de comportement sont exprimées dans la base orthonormée des tenseurs symétriques d'ordre 2, notée  $\bar{b}$  :

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \\ \frac{\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

où  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  représentent les vecteurs unitaires de la base orthonormée cartésienne globale, supposée fixe. L'expression condensée des tenseurs des déformations et des contraintes projetés dans la base  $\bar{b}$  s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{xy} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{yz} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2} \sigma_{xy} \\ \sqrt{2} \sigma_{yz} \\ \sqrt{2} \sigma_{xz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Cette écriture fait apparaître un terme en  $\sqrt{2}$  devant les composantes croisées. Elle permet de :

- Exprimer le tenseur d'élasticité d'ordre 4 de  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  composantes par un tenseur d'ordre 2 de  $6 \times 6 = 36$  composantes ;
- Symétriser ce tenseur d'élasticité.

En effet, en notant  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ , sa forme projetée dans la base  $\bar{b}$  devient  $\bar{\sigma}_i = \bar{C}_{ij} \bar{\varepsilon}_j$ , où on a l'expression suivante pour  $\bar{C}$  :

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xyyy} & C_{xxzz} & \sqrt{2}C_{xxxxy} & \sqrt{2}C_{xxxzx} & \sqrt{2}C_{xxxzy} \\ C_{xyyy} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & \sqrt{2}C_{yyxy} & \sqrt{2}C_{yyxz} & \sqrt{2}C_{yyyz} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & \sqrt{2}C_{zzxy} & \sqrt{2}C_{zzxz} & \sqrt{2}C_{zzyz} \\ \sqrt{2}C_{xyxx} & \sqrt{2}C_{xyyy} & \sqrt{2}C_{xyzz} & 2C_{xyxy} & 2C_{xyxz} & 2C_{xyyz} \\ \sqrt{2}C_{xzxx} & \sqrt{2}C_{xzxy} & \sqrt{2}C_{xzxx} & 2C_{xzxy} & 2C_{xzxz} & 2C_{xzyz} \\ \sqrt{2}C_{yzxx} & \sqrt{2}C_{yzyy} & \sqrt{2}C_{yzzz} & 2C_{yzxy} & 2C_{yzxz} & 2C_{yzyz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

La forme condensée (3) n'est pas commode à utiliser à cause de la nécessité de manipuler les termes en  $\sqrt{2}$  lors des opérations matricielles. On lui préfère une autre basée sur la projection dans la base dite de Voigt, notée  $\tilde{b}$  et ayant l'expression suivante :

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} e_x \otimes e_x \\ e_y \otimes e_y \\ e_z \otimes e_z \\ e_x \otimes e_y \\ e_x \otimes e_z \\ e_y \otimes e_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

L'expression condensée des tenseurs des déformations et des contraintes projetés dans la base de Voigt  $\tilde{b}$  s'écrit :

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad \tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Cette écriture permet de s'affranchir des termes en  $\sqrt{2}$  devant les composantes croisées, et est plus commode à utiliser au cours de la résolution numérique de la loi de comportement.

## 2 Formulation en termes de contraintes principales

Cette formulation n'est valable que sous l'hypothèse d'une isotropie du matériau [2, 5]. En effet, cette condition est nécessaire pour garantir que la méthode de retour radial préserve les directions principales. Son intérêt réside dans le fait qu'elle simplifie énormément l'écriture des équations et autorise de ce fait des méthodes de résolution très performantes (car quasi-analytiques).

Le comportement élastique est purement linéaire.

La surface de charge est caractérisée par six plans dans l'espace des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Chacun de ces plans est caractérisé par une équation du type :

$$\begin{cases} F_{13}(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \end{cases} \quad (7)$$

où  $\phi$  et  $c$  sont des données matériau et caractérisent respectivement l'angle de frottement interne et la cohésion du matériau.

La loi étant non associée, le potentiel d'écoulement plastique  $G_{13}$  associé à la surface de charge  $F_{13}$  s'écrit de la même façon :

$$G_{13}(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \psi - 2c \cos \psi \quad (8)$$

où  $\psi$  est une donnée matériau et caractérise l'angle de dilatance du matériau.

Lorsque  $\psi = \phi$ , la loi d'écoulement plastique devient associée.

Une représentation graphique de la surface de charge de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes principales (a) et dans le plan  $\pi$  (b) est donnée sur la Figure 1.

On observe que les six plans s'intersectent deux à deux suivant une arête anguleuse, et se rejoignant au sommet du cône caractérisé par l'équation :

$$p = c \cot(\phi) \quad (9)$$

Ces arêtes, au nombre de six, ainsi que le sommet du cône forment des singularités qui posent des problèmes d'intégration numérique, car les dérivées de la surface de charge ne sont pas définies à ces endroits. On discutera plus loin des méthodes permettant de résoudre cette difficulté.

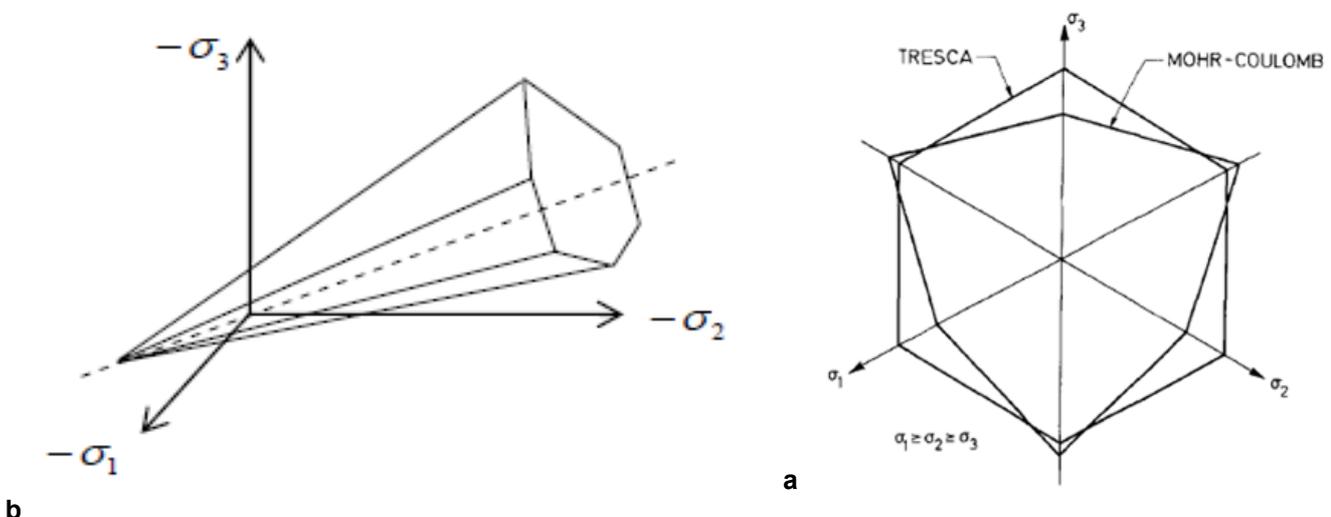


Figure 1: Représentation de la surface de charge de Mohr-Coulomb a) dans l'espace tridimensionnelle des contraintes principales b) dans le plan  $\pi$  des déviateurs des contraintes (tout vecteur représenté dans ce plan correspond à une contrainte déviatorique).

## 3 Intégration locale de la loi de Mohr-Coulomb

Le taux de déformation plastique est donné à l'aide de la formule de Koiter :

$$d \boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_{j=1}^m d \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{j=1}^m d \lambda_j \mathbf{n}_{G_j} \quad (10)$$

où  $m$  caractérise le nombre de mécanismes actifs, égal à 1, 2 ou 6 suivant les situations suivantes :

- la contrainte finale se situe à l'intérieur de la surface de charge, le point est régulier et  $m=1$  ;
- la contrainte finale se situe sur une arête du cône, le point est singulier et  $m=2$  ;
- la contrainte finale ne se situe ni à l'intérieur de la surface de charge ni sur une arête. Elle est alors projetée au sommet du cône, le point est singulier et  $m=6$  ;

La contrainte finale  $\boldsymbol{\sigma}^+$  est calculée à partir d'une prédiction élastique notée  $\boldsymbol{\sigma}^e$  et d'une correction  $\boldsymbol{\sigma}^c = \mathbf{C} \cdot d \boldsymbol{\varepsilon}^p$  de sorte que :

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{\sigma}^e - d \boldsymbol{\sigma}^c = \boldsymbol{\sigma}^e - \mathbf{C} \cdot d \boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\sigma}^e - \sum_{j=1}^m d \lambda_j \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_{G_j} \quad (11)$$

Les multiplicateurs plastiques  $d \lambda_j$  sont calculés en injectant l'équation (11) dans l'équation (7), ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^m d \lambda_j \left[ (\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_{G_j})_1 - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_{G_j})_3 + \left( (\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_{G_j})_1 + (\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_{G_j})_3 \right) s \right] = \sigma_1^e - \sigma_3^e + (\sigma_1^e + \sigma_3^e) s - 2c \cos \phi \quad (12)$$

Dans ce qui suit, on détaille les expressions correspondant aux différentes situations mentionnées plus haut. La procédure de résolution est rappelée dans le synoptique de la **Figure 4**.

### 3.1 Cas où un seul mécanisme est actif

On détecte que la prédiction active un critère :

$$\begin{cases} F_{13}(\boldsymbol{\sigma}^e) = \sigma_1^e - \sigma_3^e + (\sigma_1^e + \sigma_3^e) s - 2c \cos \phi \geq 0 \\ \sigma_1^e \geq \sigma_2^e \geq \sigma_3^e \end{cases} \quad (13)$$

On a les expressions suivantes :

$$\mathbf{n}_G = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_G = 2 \left( \left( K + \frac{G}{3} \right) t + G \quad \left( K - \frac{2}{3} G \right) t \quad \left( K + \frac{G}{3} \right) t - G \right) \quad (15)$$

que l'on introduit dans l'équation (12), qui devient :

$$4 d \lambda \left[ G + \left( K + \frac{G}{3} \right) t s \right] = \sigma_1^e - \sigma_3^e + (\sigma_1^e + \sigma_3^e) s - 2c \cos \phi$$

D'où on déduit :

$$d \lambda = \frac{\langle F_{13}(\boldsymbol{\sigma}^e) \rangle_+}{4 \left[ G + \left( K + \frac{G}{3} \right) t s \right]} \quad (16)$$

où  $\langle \cdot \rangle_+$  désigne la partie positive d'une grandeur. On obtient finalement :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^+ \\ \sigma_2^+ \\ \sigma_3^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_3^e \end{pmatrix} - \frac{\langle F_{13}(\sigma^e) \rangle_+}{2G + 2\left(K + \frac{G}{3}\right)ts} \begin{pmatrix} \left(K + \frac{G}{3}\right)t + G \\ \left(K - \frac{2}{3}G\right)t \\ \left(K + \frac{G}{3}\right)t - G \end{pmatrix} \quad (17)$$

Si on décompose le taux de déformation plastique en une partie déviatorique  $d\varepsilon_v^p = \text{trace}(d\varepsilon^p)$  et une partie sphérique  $d\varepsilon^p = d\varepsilon^p - \frac{d\varepsilon_v^p}{3}\mathbf{1}$ , on a :

$$\begin{cases} d\varepsilon_v^p = 2t d\lambda \\ d\varepsilon^p = d\lambda \begin{pmatrix} \frac{t}{3} + 1 & & \\ & -\frac{2t}{3} & \\ & & \frac{t}{3} - 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (18)$$

## 3.2 Cas où deux mécanismes sont actifs

### 3.2.1 Formulation de la solution

On vérifie que  $\sigma^+$  obtenue à partir de l'étape précédente (17) vérifie toujours :

$$\sigma_1^+ \geq \sigma_2^+ \geq \sigma_3^+$$

Si ce n'est pas le cas, alors il convient d'activer deux mécanismes de la façon suivante :

$$\begin{cases} \sigma_2^+ \geq \sigma_1^+ \geq \sigma_3^+ \Rightarrow F_{13} \text{ et } F_{23} \text{ actifs [LEFT]} \\ \sigma_1^+ \geq \sigma_3^+ \geq \sigma_2^+ \Rightarrow F_{13} \text{ et } F_{12} \text{ actifs [RIGHT]} \end{cases} \quad (19)$$

La définition des mécanismes LEFT et RIGHT est purement conventionnelle, et obéit à la logique géométrique représentée dans la **Figure 2**.

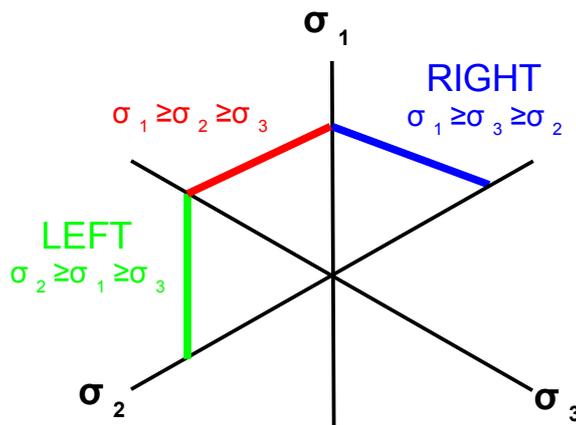


Figure 2: Définition des mécanismes LEFT et RIGHT.

On a les expressions suivantes :

$$\mathbf{n}_G^{13} = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_G^{12} = \begin{pmatrix} t+1 & t-1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_G^{23} = \begin{pmatrix} 0 & t+1 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_G^{13} = 2 \left( \left( K + \frac{G}{3} \right) t + G & \left( K - \frac{2}{3} G \right) t & \left( K + \frac{G}{3} \right) t - G \right) \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_G^{12} = 2 \left( \left( K + \frac{G}{3} \right) t + G & \left( K + \frac{G}{3} \right) t - G & \left( K - \frac{2}{3} G \right) t \right) \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_G^{23} = 2 \left( \left( K - \frac{2}{3} G \right) t & \left( K + \frac{G}{3} \right) t + G & \left( K + \frac{G}{3} \right) t - G \right) \end{cases}$$

que l'on introduit dans l'équation (12), qui selon les différents cas donne un système d'équation à résoudre :

$$\begin{aligned} \text{[ LEFT ]} &\Rightarrow \begin{cases} 4d\lambda^{13} \left[ G + \left( K + \frac{G}{3} \right) t s \right] + 2d\lambda^{23} \left[ G(1-t-s) + \left( 2K - \frac{G}{3} \right) t s \right] = F_{13}(\boldsymbol{\sigma}^e) \\ 2d\lambda^{13} \left[ G(1-t-s) + \left( 2K - \frac{G}{3} \right) t s \right] + 4d\lambda^{23} \left[ G + \left( K + \frac{G}{3} \right) t s \right] = F_{23}(\boldsymbol{\sigma}^e) \end{cases} \\ \text{[ RIGHT ]} &\Rightarrow \begin{cases} 4d\lambda^{13} \left[ G + \left( K + \frac{G}{3} \right) t s \right] + 2d\lambda^{12} \left[ G(1+t+s) + \left( 2K - \frac{G}{3} \right) t s \right] = F_{13}(\boldsymbol{\sigma}^e) \\ 2d\lambda^{13} \left[ G(1+t+s) + \left( 2K - \frac{G}{3} \right) t s \right] + 4d\lambda^{12} \left[ G + \left( K + \frac{G}{3} \right) t s \right] = F_{12}(\boldsymbol{\sigma}^e) \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

Pour la mise en œuvre algorithmique, il est plus agréable de réécrire (20) comme suit :

$$\begin{cases} A d \lambda^1 + B^{side} d \lambda^2 = F_1(\boldsymbol{\sigma}^e) \\ B^{side} d \lambda^1 + A d \lambda^2 = F_2(\boldsymbol{\sigma}^e) \end{cases} \quad (21)$$

avec :

$$d \lambda^1 = d \lambda^{13} \quad d \lambda^2 = \begin{cases} d \lambda^{23} & \text{[ LEFT ]} \\ d \lambda^{12} & \text{[ RIGHT ]} \end{cases}$$

$$F_1 = F_{13} \quad F_2 = \begin{cases} F_{23} & \text{[ LEFT ]} \\ F_{12} & \text{[ RIGHT ]} \end{cases}$$

$$A = 4 \left[ G + \left( K + \frac{G}{3} \right) t s \right] \quad B^{side} = \begin{cases} 2 \left[ G(1-t-s) + \left( 2K - \frac{G}{3} \right) t s \right] & \text{if } side = \text{LEFT} \\ 2 \left[ G(1+t+s) + \left( 2K - \frac{G}{3} \right) t s \right] & \text{if } side = \text{RIGHT} \end{cases} \quad (22)$$

La solution du système d'équations (21) existe si et seulement si son déterminant est non nul, soit :

$$\det = \begin{vmatrix} A & B^{side} \\ B^{side} & A \end{vmatrix} = A^2 - B^{side2} \neq 0 \quad (23)$$

On peut montrer que cela n'arrive jamais pour des valeurs "physiques" des paramètres  $K$ ,  $G$ ,  $\phi$  et  $\psi$ .

On a alors comme solutions :

$$\begin{cases} d\lambda^1 = \frac{AF_1(\boldsymbol{\sigma}^e) - B^{side} F_2(\boldsymbol{\sigma}^e)}{det} \\ d\lambda^2 = \frac{AF_2(\boldsymbol{\sigma}^e) - B^{side} F_1(\boldsymbol{\sigma}^e)}{det} \end{cases} \quad (24)$$

On obtient finalement :

$$[\text{LEFT}] \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^+ \\ \sigma_2^+ \\ \sigma_3^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_3^e \end{pmatrix} - 2d\lambda^{13} \begin{pmatrix} \left(K + \frac{G}{3}\right)t + G \\ \left(K - \frac{2}{3}G\right)t \\ \left(K + \frac{G}{3}\right)t - G \end{pmatrix} - 2d\lambda^{23} \begin{pmatrix} \left(K - \frac{2}{3}G\right)t \\ \left(K + \frac{G}{3}\right)t + G \\ \left(K + \frac{G}{3}\right)t - G \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$[\text{RIGHT}] \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^+ \\ \sigma_2^+ \\ \sigma_3^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_3^e \end{pmatrix} - 2d\lambda^{13} \begin{pmatrix} \left(K + \frac{G}{3}\right)t + G \\ \left(K - \frac{2}{3}G\right)t \\ \left(K + \frac{G}{3}\right)t - G \end{pmatrix} - 2d\lambda^{12} \begin{pmatrix} \left(K + \frac{G}{3}\right)t + G \\ \left(K + \frac{G}{3}\right)t - G \\ \left(K - \frac{2}{3}G\right)t \end{pmatrix}$$

ou encore, en simplifiant l'écriture :

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{\sigma}^e - 2d\lambda^1 \mathbf{v}_1^1 - 2d\lambda^2 \mathbf{v}_1^2 \quad (26)$$

avec  $d\lambda^1 = d\lambda^{13}$   $d\lambda^2 = \begin{cases} d\lambda^{23} [\text{LEFT}] \\ d\lambda^{12} [\text{RIGHT}] \end{cases}$  et

$$\mathbf{v}_1^1 = \begin{pmatrix} \left(K + \frac{G}{3}\right)t + G \\ \left(K - \frac{2}{3}G\right)t \\ \left(K + \frac{G}{3}\right)t - G \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_1^2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} \left(K - \frac{2}{3}G\right)t & \left(K + \frac{G}{3}\right)t + G & \left(K + \frac{G}{3}\right)t - G \end{pmatrix} [\text{LEFT}] \\ \begin{pmatrix} \left(K + \frac{G}{3}\right)t + G & \left(K + \frac{G}{3}\right)t - G & \left(K - \frac{2}{3}G\right)t \end{pmatrix} [\text{RIGHT}] \end{cases} \quad (27)$$

De la même façon, le taux de déformation plastique s'écrit :

$$\begin{cases} d\varepsilon_v^p = 2t(d\lambda^1 + d\lambda^2) \\ d\mathbf{e}^p = d\lambda^1 \begin{pmatrix} \frac{t}{3} + 1 & -\frac{2t}{3} & \frac{t}{3} - 1 \end{pmatrix} + d\lambda^2 \begin{pmatrix} -\frac{2t}{3} & \frac{t}{3} + 1 & \frac{t}{3} - 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (28)$$

### 3.2.2 Choix du deuxième mécanisme LEFT ou RIGHT

On propose un critère simple et purement géométrique pour déterminer à coup sûr si le deuxième mécanisme, au cas où il serait activé, se trouve à gauche (LEFT) ou à droite (RIGHT).

On définit le vecteur  $\mathbf{t}_G$  perpendiculaire à la direction d'écoulement comme représenté dans la **Figure 3**, de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ -2 \\ t+1 \end{pmatrix} = \mathbf{t}_G \perp \mathbf{n}_G = \mathbf{n}_G^{13} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

La droite passant par 0 et parallèle à  $\mathbf{n}_G$ , représentée en pointillés, caractérise les états de contraintes tels que  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t}_G = 0$ .

On a donc le choix suivant :

- Si  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t}_G > 0$  et qu'un deuxième mécanisme doit être actif, ce mécanisme est nécessairement situé à droite, soit le mécanisme RIGHT ;
- De la même façon, si  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t}_G < 0$  et qu'un deuxième mécanisme doit être actif, ce mécanisme est nécessairement situé à gauche, soit le mécanisme LEFT ;

Le critère à évaluer sur la prédiction  $\boldsymbol{\sigma}^e$  est donc le suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \mathbf{t}_G > 0 & \Rightarrow \text{RIGHT} \\ \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \mathbf{t}_G < 0 & \Rightarrow \text{LEFT} \end{cases} \quad (30)$$

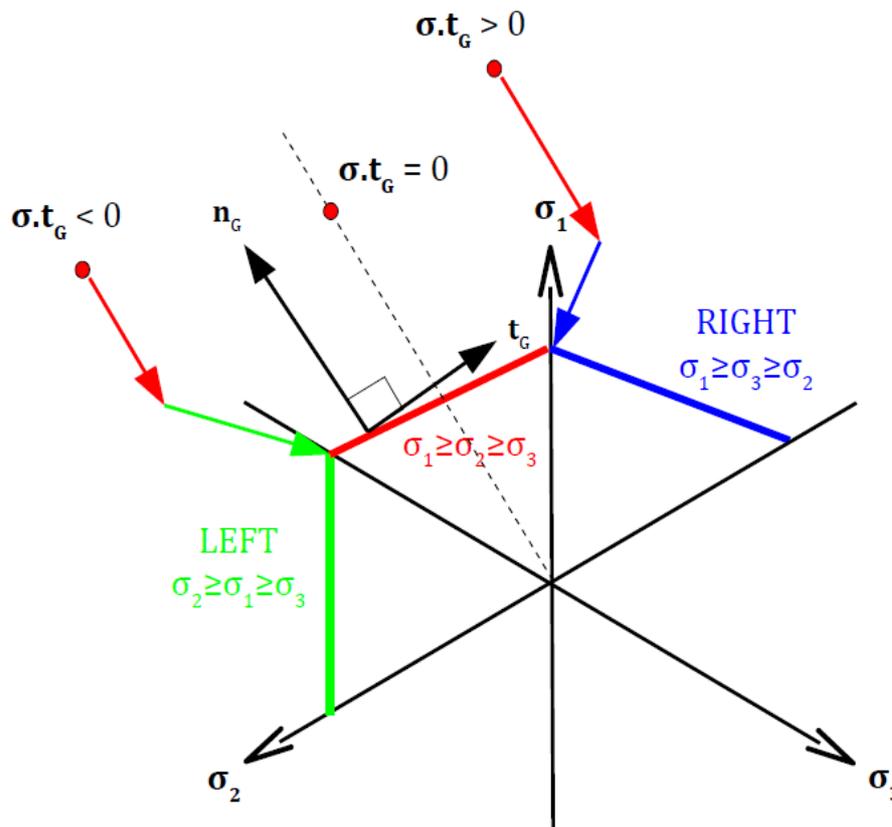


Figure 3: Critère de sélection des mécanismes LEFT et RIGHT.

### 3.3 Cas de la projection au sommet du cône

On vérifie que  $\boldsymbol{\sigma}^+$  obtenue à partir de l'étape précédente (25) vérifie toujours :

$$\sigma_1^+ \geq \sigma_2^+ \geq \sigma_3^+$$

Si ce n'est pas le cas, alors il convient d'effectuer une projection au sommet du cône d'équation :

$$p_c = c \cot \phi \quad (31)$$

On impose donc :

$$\begin{cases} p^+ = p^e - K d \varepsilon_v^p := c \cot \phi \\ \sigma^+ := p^+ \mathbf{1} \end{cases} \quad (32)$$

De la même façon, le taux de déformation plastique s'écrit :

$$\begin{cases} d \varepsilon_v^p = \frac{1}{K} (p^e - c \cot \phi) \\ d e^p = \mathbf{0} \end{cases} \quad (33)$$

Pas de temps numéro  $n$

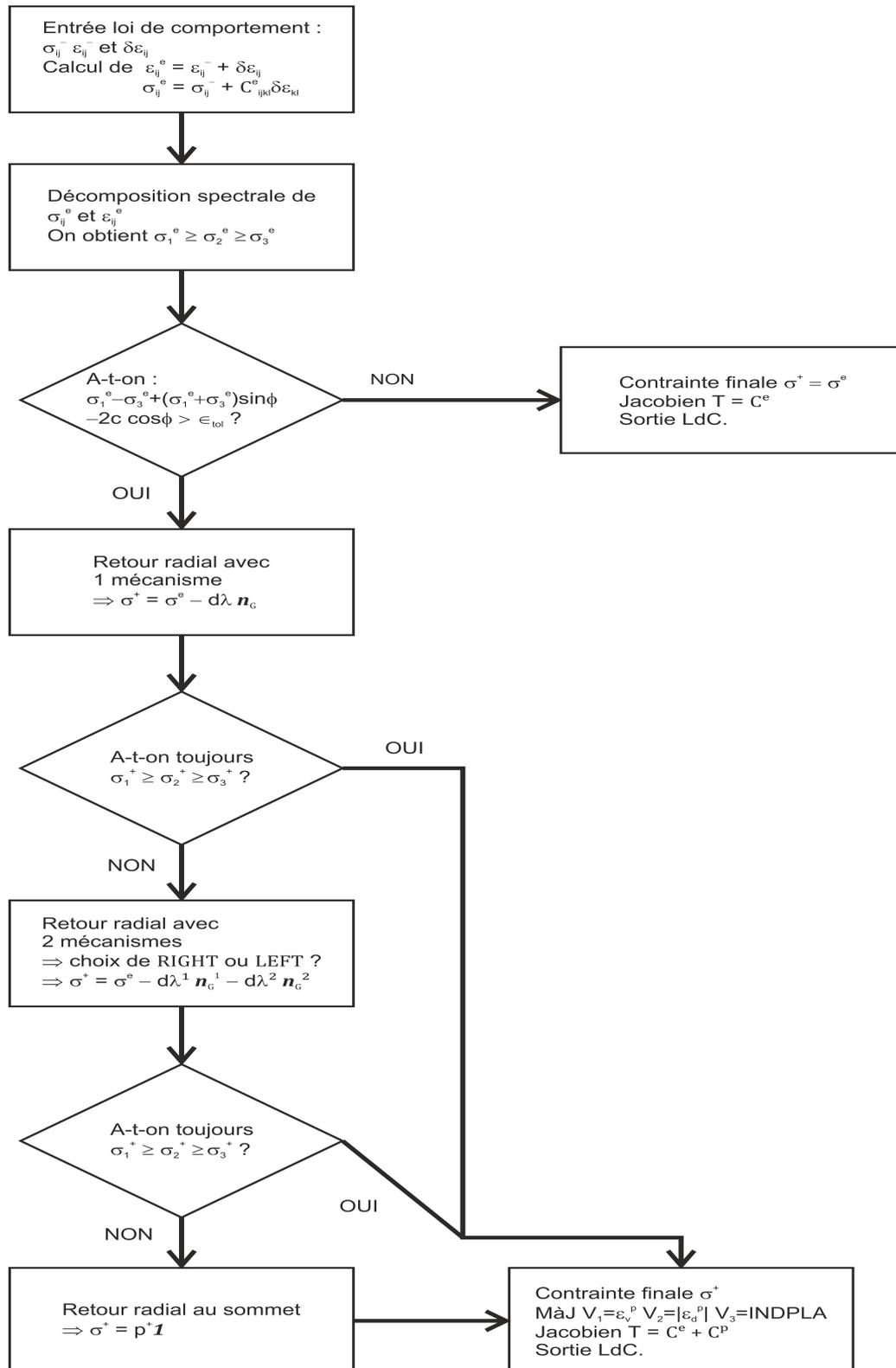


Figure 4: Synoptique de résolution de la loi de Mohr-Coulomb.

## 4 Expression de la matrice tangente consistante dans la base principale

### 4.1 Cas où un seul mécanisme est actif

La matrice tangente cohérente  $T$  dans la base principale est obtenue en dérivant l'équation (17), ce qui donne :

$$d\sigma^+ = C \cdot d\varepsilon - \frac{2dF_{13}(\sigma^e)}{A} \begin{pmatrix} \left(K + \frac{G}{3}\right)t + G \\ \left(K - \frac{2}{3}G\right)t \\ \left(K + \frac{G}{3}\right)t - G \end{pmatrix} = C \cdot d\varepsilon - \frac{2dF_{13}(\sigma^e)}{A} \mathbf{v}_t \quad (34)$$

Sachant que :

$$dF_{13}(\sigma^e) = d\sigma_1^e - d\sigma_3^e + (d\sigma_1^e + d\sigma_3^e)s = 2 \begin{pmatrix} \left(K + \frac{G}{3}\right)s + G \\ \left(K - \frac{2}{3}G\right)s \\ \left(K + \frac{G}{3}\right)s - G \end{pmatrix} \cdot d\varepsilon = 2\mathbf{v}_s \cdot d\varepsilon \quad (35)$$

On obtient :

$$d\sigma^+ = \left( C - \frac{4}{A} \underbrace{\mathbf{v}_t \otimes \mathbf{v}_s}_D \right) \cdot d\varepsilon \quad (36)$$

$T$

où  $A$  est donné par l'équation (22).

### 4.2 Cas où deux mécanismes sont actifs

De la même façon, la matrice tangente cohérente  $T$  est obtenue en dérivant les équations (24) et (26), ce qui donne :

$$d\sigma^+ = \left( C - \frac{4}{\det} \underbrace{\left( \mathbf{v}_t^1 \otimes \mathbf{v}_s^1 + \mathbf{v}_t^2 \otimes \mathbf{v}_s^2 - \frac{B^{side}}{A} (\mathbf{v}_t^1 \otimes \mathbf{v}_s^2 + \mathbf{v}_t^2 \otimes \mathbf{v}_s^1) \right)}_D \right) \cdot d\varepsilon \quad (37)$$

$T$

où  $A$ ,  $B^{side}$  sont donnés par l'équation (22),  $\det$  par l'équation (23) et  $\mathbf{v}_{[s,t]}^{[1,2]}$  par l'équation (27).

### 4.3 Cas de la projection au sommet du cône

D'après l'équation (32), on a trivialement  $T = \mathbf{0}$ .

## 5 Expression de la matrice tangente consistante dans la base globale

Le paragraphe §14 permet de construire la matrice tangente consistante dans la base principale, notée  $T$ . Il convient désormais de ramener cette matrice dans la base globale (cartésienne), que l'on notera  $\bar{T}$ .

### Remarque importante :

Il est à noter que la construction de cette matrice tangente consistante est une étape cruciale à la fois pour la robustesse et la performance de l'algorithme :

- Premièrement, il est parfaitement connu qu'une telle matrice permet un taux de convergence quadratique pour le processus de Newton ;
- Deuxièmement, cette matrice rend compte de la rotation des directions principales au cours d'un incrément. Sans elle, la formulation de la loi de Mohr-Coulomb en termes de contraintes principales décrite au paragraphe §6 ne serait pas complète, puisque les contraintes principales, maintenues fixes au cours de l'intégration locale de la loi (§7), ne pourraient pas tourner au niveau global de la structure.

Dans ce paragraphe, on décrit en détails la méthode permettant de construire  $\bar{T}$  à partir de  $T$ .

### 5.1 Quelques résultats sur les tenseurs symétriques isotropes d'ordre 2

On définit par  $S^3$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 dans l'espace vectoriel de dimension  $n=3$ , et les tenseurs  $Y \in S^3$  et  $X \in S^3$  tels que :

$$Y(X) : S^3 \rightarrow S^3$$

La fonction tensorielle  $Y(X)$  est dite isotrope si :  $R \cdot Y(X) \cdot R^t = Y(R \cdot X \cdot R^t)$  quelle que soit la rotation  $R$ .

L'hypothèse d'isotropie implique que  $Y$  et  $X$  sont coaxiaux, c'est-à-dire qu'ils possèdent les mêmes directions principales  $d_{\alpha=1,2,3}$ . On note :

$$X = \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha} \left( \underset{E_{\alpha}}{\mathbb{1}} \otimes d_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha} E_{\alpha} \quad (38)$$

$$Y(X) = \sum_{\alpha=1}^3 y_{\alpha} (d_{\alpha} \otimes d_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^3 y_{\alpha} E_{\alpha}$$

où  $y_{\alpha} = y_{\alpha}(x_1, x_2, x_3)$  et  $x_{\alpha}$  représentent les valeurs propres de  $Y$  et  $X$ , respectivement.

### 5.2 Dérivée d'une fonction tensorielle isotrope d'ordre 2

On suppose que la fonction tensorielle isotrope  $Y(X)$  est différentiable par rapport à  $X$ , et on définit sa dérivée  $D$  telle que :

$$D(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dY(X)}{dX} \quad (39)$$

Appliquée à l'équation (38), on obtient l'expression suivante :

$$D(X) = \sum_{\alpha=1}^3 \left( E_{\alpha} \otimes \frac{dy_{\alpha}}{dX} + y_{\alpha} \frac{dE_{\alpha}}{dX} \right) = \sum_{\alpha=1}^3 \left( y_{\alpha} \frac{dE_{\alpha}}{dX} + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} E_{\alpha} \otimes \frac{dx_{\beta}}{dX} \right) \quad (40)$$

## 5.2.1 Cas bidimensionnel de type contraintes planes (C\_PLAN)

En dimension deux (cas C\_PLAN), l'équation caractéristique  $\det(\mathbf{X} - x_\alpha \mathbf{I}) = 0$  donne une équation quadratique des valeurs propres  $x_{\alpha=1,2}$  de  $\mathbf{X}$  du type suivant :

$$x_\alpha^2 - I_1 x_\alpha + I_2 = 0 \quad \alpha = 1, 2 \quad (41)$$

avec :

$$\begin{cases} I_1 = \text{trace}(\mathbf{X}) = X_{11} + X_{22} \\ I_2 = \det(\mathbf{X}) = X_{11} X_{22} - X_{12} X_{21} \end{cases} \quad (42)$$

La résolution du problème spectral donne aisément les solutions suivantes pour les valeurs propres :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{I_1 + \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2} \\ x_2 = \frac{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2} \end{cases} \quad (43)$$

et les vecteurs propres, tenant compte de la multiplicité des valeurs propres :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\alpha = \frac{\mathbf{X} + (x_\alpha - I_1) \mathbf{I}}{2x_\alpha - I_1} & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ \mathbf{E}_1 = \mathbf{I} & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases} \quad (44)$$

En particulier, Carlson et Hoger montrent que si  $x_1 \neq x_2$ , on a :

$$\frac{d x_\alpha}{d \mathbf{X}} = \mathbf{E}_\alpha \quad (45)$$

En utilisant les équations (43), (44) et (45) dans (40), on obtient l'expression de la dérivée  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$ , tenant compte de la multiplicité des valeurs propres :

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} [\mathbf{I}_S - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2] + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} \mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{E}_\beta & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{I}_S + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases} \quad (46)$$

avec la matrice identité  $\mathbf{I}$  :

$$(\mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (47)$$

la matrice de transposition  $(\mathbf{I}_t)_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk}$  et la matrice de symétrisation  $\mathbf{I}_S$ , telles que :

$$(\mathbf{I}_S)_{ijkl} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \mathbf{I}_t) = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (48)$$

**Remarque :**

On remarque que le terme  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} [I_S - E_1 \otimes E_1 - E_2 \otimes E_2]$  dans la dérivée  $D(X)$  de la première équation de (46) exprime la rotation des directions principales dans le plan.

## 5.2.2 Cas bidimensionnel de type déformations planes (D\_PLAN) et axisymétrique (AXIS)

La direction hors-plan  $\alpha=3$  étant fixe, l'expression de la dérivée  $D(X)$  s'obtient à partir du cas précédent. En effet, en isolant le terme  $\alpha=3$  dans l'équation (40), on a l'expression suivante :

$$D(X) = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^2 \left( y_{\alpha} \frac{dE_{\alpha}}{dX} + \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} E_{\alpha} \otimes \frac{dx_{\beta}}{dX} \right)}_{D_{2D}(X)} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x_3} E_{\alpha} \otimes \frac{dx_3}{dX} + \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial y_3}{\partial x_{\beta}} E_3 \otimes \frac{dx_{\beta}}{dX}}_{D_3(X)} \quad (49)$$

où  $D_{2D}(X)$  est donnée par l'équation (46).

Le terme complémentaire  $D_3(X)$  s'écrit, en tenant compte de la multiplicité des valeurs propres, de la façon suivante :

$$D_3(X) = \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x_3} E_{\alpha} \otimes E_3 + \frac{\partial y_3}{\partial x_{\alpha}} E_3 \otimes E_{\alpha} \right) + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} E_3 \otimes E_3 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_3} I_p \otimes E_3 + \frac{\partial y_3}{\partial x_1} E_3 \otimes I_p + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} E_3 \otimes E_3 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases} \quad (50)$$

où  $I_p = \begin{cases} \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) & \text{si } i, j, k, l \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est la matrice de la projection orthogonale de  $I_S$  dans le plan  $(e_x, e_y)$ .

## 5.2.3 Cas tridimensionnel

En dimension trois, l'équation caractéristique  $\det(X - x_{\alpha} I) = 0$  donne une équation cubique des valeurs propres  $x_{\alpha=1,2,3}$  de  $X$  du type suivant :

$$x_{\alpha}^3 - I_1 x_{\alpha}^2 + I_2 x_{\alpha} - I_3 = 0 \quad \alpha=1,2,3 \quad (51)$$

avec :

$$\begin{cases} I_1 = \text{trace}(X) \\ I_2 = \frac{1}{2} [\text{trace}(X)^2 - \text{trace}(X^2)] \\ I_3 = \det(X) \end{cases} \quad (52)$$

La résolution du problème spectral donne aisément les solutions suivantes pour les valeurs propres :

$$\begin{cases} x_1 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \\ x_2 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \\ x_3 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta-2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \end{cases} \quad (53)$$

où  $Q$  et  $\theta$  sont donnés par :

$$Q = \frac{I_1^2 - 3I_2}{9}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right) \quad (54)$$

avec  $R = \frac{-2I_1^3 + 9I_1I_2 - 27I_3}{54}$

et les vecteurs propres, en tenant compte de la multiplicité des valeurs propres :

$$\begin{cases} E_\alpha = \frac{x_\alpha}{2x_\alpha^3 - I_1x_\alpha^2 + I_3} \left[ X^2 + (x_\alpha - I_1)X + \frac{I_3}{x_\alpha}I \right] & \text{si } x_1 \neq x_2 \neq x_3 \\ E_\beta = I - E_\alpha & \text{si } x_\alpha \neq x_\beta \\ E_1 = I & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 \end{cases} \quad (55)$$

Dans la deuxième équation de (55),  $E_\alpha$  est calculée à l'aide la première équation.

Sans donner les étapes intermédiaires de calcul, la dérivée  $D(X)$ , en tenant compte de la multiplicité des valeurs propres, s'écrit finalement :

$$D(X) = \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{y_\alpha}{(x_\alpha - x_\beta)(x_\alpha - x_\gamma)} \left[ \frac{dX^2}{dX} - (x_\beta + x_\gamma)I_S \right. \\ \left. - (2x_\alpha - x_\beta - x_\gamma)E_\alpha \otimes E_\alpha - (x_\beta - x_\gamma)(E_\beta \otimes E_\beta - E_\gamma \otimes E_\gamma) \right] & \text{si } x_1 \neq x_2 \neq x_3 \\ \quad + \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \frac{\partial y_a}{\partial x_b} E_a \otimes E_b & \\ s_1 \frac{dX^2}{dX} - s_2 I_S - s_3 X \otimes X + s_4 X \otimes I + s_5 I \otimes X - s_6 I \otimes I & \text{si } x_\alpha \neq x_\beta = x_\gamma \\ \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) I_S + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} I \otimes I & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 \end{cases} \quad (56)$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma)$  correspond à une permutation cyclique de  $(1, 2, 3)$ .  $I$  et  $I_S$  sont donnés par les équations (47) et (48), respectivement. En remarquant que  $X$  est un tenseur symétrique, il faut prendre garde à appliquer l'opérateur de dérivation symétrique pour l'évaluation de  $\frac{dX^2}{dX}$ , ce qui donne la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d \mathbf{X}^2}{d \mathbf{X}} \right)_{ijkl} &= \frac{d(X_{im} X_{mj})}{d X_{kl}} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km}) X_{mj} + \frac{X_{im}}{2} (\delta_{mk} \delta_{jl} + \delta_{ml} \delta_{kj}) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{ik} X_{lj} + \delta_{il} X_{kj} + \delta_{jl} X_{ik} + \delta_{kj} X_{il}) \end{aligned} \quad (57)$$

Enfin, les expressions de  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2} + \frac{1}{x_\alpha - x_\gamma} \left( \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \\ s_2 &= 2 x_\gamma \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2} + \frac{x_\alpha + x_\gamma}{x_\alpha - x_\gamma} \left( \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \\ s_3 &= 2 \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^3} + \frac{1}{(x_\alpha - x_\gamma)^2} \left( \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \\ s_4 &= 2 x_\gamma \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^3} + \frac{1}{x_\alpha - x_\gamma} \left( \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} \right) + \frac{x_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2} \left( \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \\ s_5 &= 2 x_\gamma \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^3} + \frac{1}{x_\alpha - x_\gamma} \left( \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} \right) + \frac{x_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2} \left( \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) \\ s_6 &= 2 x_\gamma^2 \frac{y_\alpha - y_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^3} + \frac{x_\alpha x_\gamma}{(x_\alpha - x_\gamma)^2} \left( \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} \right) - \frac{x_\gamma^2}{(x_\alpha - x_\gamma)^2} \left( \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\gamma} \right) - \frac{x_\alpha + x_\gamma}{x_\alpha - x_\gamma} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} \end{aligned} \quad (58)$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma)$  correspond à une permutation cyclique de  $(1, 2, 3)$ .

## Remarque :

On remarque que le terme (tout sauf trivial) :

$$\sum_{\alpha=1}^3 \frac{y_\alpha}{(x_\alpha - x_\beta)(x_\alpha - x_\gamma)} \left[ \frac{d \mathbf{X}^2}{d \mathbf{X}} - (x_\beta + x_\gamma) \mathbf{I}_S - (2x_\alpha - x_\beta - x_\gamma) \mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{E}_\alpha - (x_\beta - x_\gamma) (\mathbf{E}_\beta \otimes \mathbf{E}_\beta - \mathbf{E}_\gamma \otimes \mathbf{E}_\gamma) \right]$$

dans la dérivée  $\mathbf{D}(\mathbf{X})$  de la première équation de (56) exprime la rotation des directions principales dans l'espace tridimensionnelle.

## 5.2.4 Application au calcul de la matrice tangente consistante de la loi de Mohr-Coulomb

La transposition des formules précédentes à la mise en œuvre numérique mérite quelques précisions.

On a tout d'abord les correspondances suivantes :

- $\mathbf{X} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pred}$  et  $x_\alpha = \varepsilon_\alpha^{pred}$  ;
- $\mathbf{Y} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^+$  et  $y_\alpha = \sigma_\alpha^+$  ;
- $\mathbf{E}_\alpha = \tilde{\mathbf{d}}_\alpha^{pred} \otimes \tilde{\mathbf{d}}_\alpha^{pred}$  ;
- $(\mathbf{T})_{\alpha\beta} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$  est la matrice tangente consistante dans la base principale calculée au paragraphe §14 ;

La notation  $^{pred}$  indique que l'on travaille avec des grandeurs « prédites » données en entrée par le processus de Newton, la notation  $^+$  avec des grandeurs issues de la résolution locale de la loi de comportement, et la notation  $\tilde{\phantom{x}}$  avec la base de Voigt. On notera que les directions principales prédites  $\tilde{\mathbf{d}}_\alpha^{pred}$

sont figées au cours de la résolution locale, ce qui est cohérent avec l'hypothèse d'isotropie adoptée (voir les explications du paragraphe §15).

Disposant de toutes ces informations à l'issue de la résolution locale de la loi de comportement, on en déduit la matrice tangente consistante  $\bar{T} = \bar{D}$  exprimée dans la base de projection  $\bar{b}$  définie au paragraphe §3, à l'aide des équations :

- (46) dans le cas bidimensionnel en contraintes planes (C\_PLAN) ;
- (50) dans le cas bidimensionnel en déformation plane (D\_PLAN) ou axisymétrique (AXIS) ;
- (56) dans le cas tridimensionnel (3D) ;

La seconde information importante concerne la convention d'écriture des différents tenseurs. En effet, par souci de généralité, la notation utilisée pour les tenseurs dans tout le paragraphe §15 est la notation classique, faisant apparaître des tenseurs jusqu'à l'ordre 4. Cette écriture est impropre à la résolution numérique, où l'on préfère utiliser des notations condensées rendues possibles par le fait que l'on travaille avec des tenseurs symétriques d'ordre 2 (contraintes et déformations le sont toujours). On distingue deux formes de notations condensées correspondant à deux bases de projection (voir §3) :

- La base orthonormée  $\bar{b}$  des tenseurs symétriques d'ordre 2. C'est dans cette base que sont données les contraintes et les déformations à l'entrée et à la sortie de la résolution locale du comportement ;
- La base dite de Voigt  $\tilde{b}$ , beaucoup plus commode à utiliser lors de la résolution numérique locale du comportement car elle évite d'avoir à manipuler des coefficients en  $\sqrt{2}$  lors des opérations matricielles ;

Le schéma de résolution est résumé dans la Figure 5.

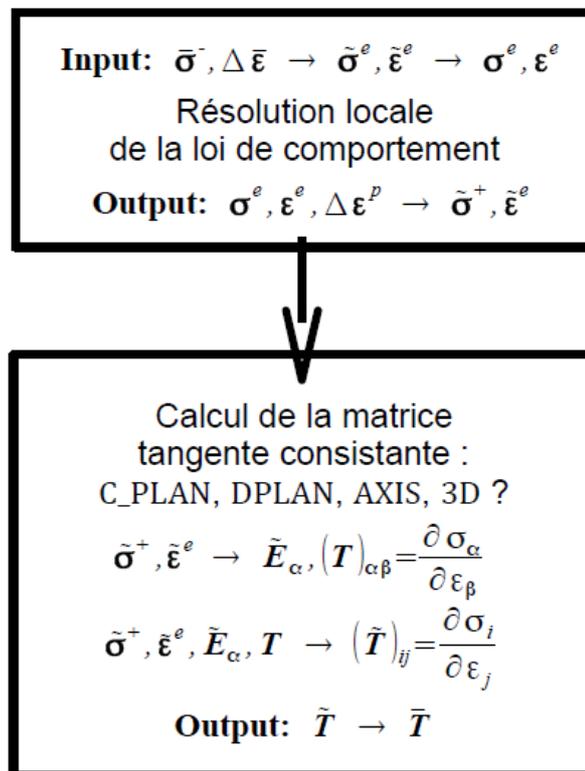


Figure 5: Processus de résolution de la loi de Mohr-Coulomb.  
Mise en évidence de l'écriture dans les différentes bases de projection.

## 6 Bibliographie

- [1] **Jiang Hua**, Xie Y. "A note on the Mohr-Coulomb and Drucker-Prager strenght criteria", Mechanics Research Communications, **38**, pp, 309-314, 2011
- [2] **Fotios E. Karaoulanis** "Nonsmooth multisurface plasticity in principal stress space", 6<sup>th</sup> GRACM International Congress on Computational Mechanics, Thessaloniki, 2008
- [3] **Pankaj**, Bićanić N. "Detection of multiple active yield conditions for Mohr-Coulomb elasto-plasticity", Computers and Structures, **62**, pp, 51-61, 1997
- [4] **S. W. Sloan**, Booker J.R. "Removal of singularities in Tresca and Mohr-Coulomb yield functions", Communications in Applied Numerical Methods, **2**, pp, 173-179, 1986
- [5] **Ronaldo I. Borja**, Sama K.M., Sanz P.F. "On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **192**, pp, 1227-1258, 2003
- [6] **X. Wang**, Wang L.B., Xu L.M. "Formulation of the return mapping algorithm for elastoplastic soil models", Computers and Geotechnics, **31**, pp, 315-338, 2004