Réponse harmonique

Résumé

Ce document présente les bases théoriques du calcul du régime permanent de la réponse d'un système mécanique complexe, à comportement linéaire, soumis à une sollicitation dynamique harmonique. Le calcul porte indifféremment directement sur le système modélisé en éléments finis, ou bien représenté par une base modale ; dans ce dernier cas si la base modale est le produit de la technique de sous-structuration on se référera au document [R4.06.03].

Table des matières

1 Introduction

Dans les problèmes harmoniques, le système étudié est soumis à une excitation variant comme le produit d'une fonction quelconque de l'espace par une fonction sinusoïdale du temps.
Rechercher la réponse consiste à calculer le champ des grandeurs représentées par les ddls de la modélisation en éléments finis du système. Quand le système a un comportement linéaire la réponse du champ des grandeurs observées tend rapidement (du fait de l'extinction de sa composante transitoire par dissipation interne) vers un régime permanent : le champ résultant varie finalement harmoniquement comme l'excitation. C'est ce régime permanent de la réponse qu'on se propose de calculer.

Notations générales :

t	:	temps
P	:	Point courant du modèle
ω	:	Pulsation ($rad.s^{-1}$)
j	:	Imaginaire pur unitaire $\left(j^2=-1\right)$
$\mathbf{M}$	:	Matrice de masse issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{K}$	:	Matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{C}$	:	Matrice d'amortissement issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{q}$	:	Vecteur des degrés de liberté issus de la modélisation éléments finis
$\mathbf{f}_{\text{ext}}$	:	Vecteur des forces extérieures au système
$\boldsymbol{\Phi}$	:	Matrice des vecteurs de la base des sous-structures
$\boldsymbol{\eta}$	:	Vecteur des degrés de liberté généralisés

2 Equation harmonique

Nous établissons l'équation dynamique dans le cas d'une sollicitation harmonique pour trois sortes de systèmes mécaniques :

les structures pures (sans fluide),
les fluides purs (sans structure) à comportement 'acoustique linéaire',
les systèmes mixtes structures et fluides en interaction fluide-structure.

2.1 Equation harmonique des structures

Le comportement vibratoire d'une structure pure résulte des forces extérieures qui lui sont appliquées. La grandeur à calculer est le déplacement en tout point P du modèle.

2.1.1 Calcul direct

Dans le cas du calcul direct sur le modèle en éléments finis nous pouvons écrire :

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}\;\mathbf{u}=\mathbf{f}_{ext}(P,t) \qquad \text{éq 2.1.1-1}$$

où :

$\mathbf{M}$	est la matrice (réelle) de masse issue de la modélisation éléments finis de S ,
$\mathbf{C}$	est la matrice (réelle) d'amortissement issue de la modélisation éléments finis de S ,
$\mathbf{K}$	est la matrice (réelle) de rigidité issue de la modélisation éléments finis de S ,
$\mathbf{f}_{ext}(P,t)$	est le vecteur (complexe) de champ des forces extérieures appliquées à S ,
$\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ et $\ddot{\mathbf{u}}$	sont les vecteurs (complexes) déplacement, vitesse et accélération, fonctions de P et t , issus de la modélisation éléments finis.

Dans un problème harmonique, on impose un chargement dynamique, spatialement quelconque, mais sinusoïdal dans le temps. On s'intéresse alors a la réponse stabilisée du système, sans tenir compte de la partie transitoire.

Le champ des forces extérieures s'écrit :

$$\mathbf{f}_{ext}(P,t)=\{\mathbf{f}_{ext}(P)\}e^{j\omega t}$$

Le champ des déplacements s'écrit :

$$\mathbf{u}(P,t)=\{\mathbf{u}(P)\}e^{j\omega t}$$

Les champs de vitesse et d'accélération s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{u}}(P,t)=j\omega\{\mathbf{u}(P)\}e^{j\omega t}$$
$$\ddot{\mathbf{u}}(P,t)=-\omega^2\{\mathbf{u}(P)\}e^{j\omega t}$$

Finalement la structure S vérifie l'équation suivante :

$$(\mathbf{K}+j\omega\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{M})\{u\}=\{\mathbf{f}_{ext}(P)\}$$ éq 2.1.1-2

Cas particulier : si l'amortissement est de type **hystérétique** « global » l'équation [éq 2.1.1-1] devient :

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}(1+j\eta)\mathbf{u}=\mathbf{f}_{ext}(P,t)$$ éq 2.1.1-3

où η est un coefficient de perte global (cf. [R5.05.04]).
Alors l'équation [éq 2.1.1-2] est remplacée par :

$$(\mathbf{K_c}-\omega^2\mathbf{M})\{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{f}_{ext}(P)\}$$ éq 2.1.1-4

où :

$\mathbf{M}$	est la matrice (réelle) de masse issue de la modélisation éléments finis de S ,
$\mathbf{K_c}=\mathbf{K}+j\eta\mathbf{K}$	est une matrice de rigidité *complexe* .

2.1.2 Calcul sur base modale

Le calcul de la réponse harmonique par la méthode de synthèse modale consiste a rechercher le champ de déplacement inconnu, issu de la modélisation éléments finis, sur un espace approprié, de dimension réduite (transformation de Ritz).
On se référera aux documents [R4.06.02] et [R4.06.03].
Si on utilise plutôt cette méthode l'équation [éq 2.1.1-2] est projetée sur la base modale de S et on aboutit à l'équation harmonique suivante :

$$(\overline{\mathbf{K}}+j\omega\overline{C}-\omega^2\overline{\mathbf{M}})\{\eta\}=\{\overline{\mathbf{f}}_{ext}\}$$ éq 2.1.2-1

où :

$\overline{\mathbf{M}}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}$	est la matrice (réelle) de masse généralisée de S ,
$\bar{\mathbf{C}}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}$	est la matrice (réelle) d'amortissement généralisé de S ,
$\overline{\mathbf{k}}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\,\boldsymbol{\Phi}$	est la matrice (réelle) de rigidité généralisée de S ,
$\{\overline{\mathbf{f}}_{ext}\}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{f}_{ext}\}$	est le vecteur (complexe) des forces extérieures harmoniques généralisées appliquées à S ,
$\boldsymbol{\Phi}$	est la matrice (réelle) des vecteurs modaux de la base de Ritz de S ,
$\{\boldsymbol{\eta}(P)\}$	est le vecteur (complexe) des déplacements harmoniques généralisés.

Une fois $\{\boldsymbol{\eta}(P)\}$ déterminé par éq 2.1.2-1 on fait une restitution sur base physique (cf. [R4.06.02]).

2.2 Equation harmonique des fluides acoustiques

Le document [R4.02.01] décrit la modélisation par éléments finis d'un système fluide (sans transport) ayant un comportement acoustique linéaire.
Le système fluide F subit une sollicitation harmonique de vitesse acoustique sur une partie de sa frontière. La réponse harmonique est décrite par l'équation suivante [éq 2.2-1], où la grandeur à calculer est la pression acoustique en tout point P du modèle.

$$(\mathbf{K}+j\omega\,\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{M})\{\mathbf{p}(P)\}=-j\omega\,\{\mathbf{v}_{\mathbf{n}}(P)\} \qquad \text{éq 2.2-1}$$

où :

$\mathbf{M}$	est la matrice (complexe) de « masse » acoustique issue de la modélisation éléments finis de F ,
$\mathbf{C}$	est la matrice (complexe) d' « amortissement » acoustique issue de la modélisation éléments finis de F , et en l'espèce du bord $\partial_z F$ où l'on applique une impédance acoustique,
$\mathbf{K}$	est la matrice (complexe) de « rigidité » acoustique issue de la modélisation éléments finis de F ,
$\mathbf{v}_{\mathbf{n}}(P,t)=\{\mathbf{v}_{\mathbf{n}}(P)\}e^{j\omega t}$	Où $\{\mathbf{V}_{\mathbf{n}}(P)\}$ est le vecteur (complexe) de champ des vitesses acoustiques normales appliquées à la frontière $\partial_v F$ de F où l'on applique des vitesses acoustiques,
$\mathbf{p}(P,t)=\{\mathbf{p}(P)\}e^{j\omega t}$	Où $\{\mathbf{p}(P)\}$ est le vecteur (complexe) des pressions acoustiques issus de la modélisation éléments finis de F .

2.3 Equation harmonique des systèmes fluides-structures

Le document [R4.02.02] décrit la modélisation par éléments finis d'un système $F+S$ constitué d'une partie fluide (sans transport) F en interaction avec une partie structure S (interaction en $F\cup S$). Fluide et structure ont un comportement linéaire.
Le système fluide F subit une sollicitation harmonique de vitesse acoustique normale sur une partie de sa frontière. La réponse harmonique est décrite par l'équation suivante [éq 2.3-1], où les grandeurs à calculer sont :

la pression acoustique en tout point P du fluide F ,
le déplacement en tout point P de la structure S ,
auxiliairement le potentiel ϕ de déplacement en tout point P du fluide F ,

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}-j\omega^3\mathbf{I})\begin{Bmatrix}\mathbf{u}(P)\\ \mathbf{p}(P)\\ \phi(P)\end{Bmatrix}=+j\omega\{\mathbf{v_n}(P)\}$$ éq 2.3-1

où :

$\mathbf{M}$	est la matrice (réelle) de « masse » fluide-structure issue de la modélisation éléments finis des domaines F et S
$\mathbf{I}$	est la matrice (réelle) d' « impédance » fluide issue de la modélisation éléments finis du bord $\partial_z F$ du domaine F où l'on applique une impédance
$\mathbf{K}$	est la matrice (réelle) de « rigidité » fluide-structure issue de la modélisation éléments finis des domaines F et S
$\mathbf{v_n}(P,t)=\{\mathbf{v_n}(P)\}e^{j\omega t}$	Où $\mathbf{v_n}(P)$ est le vecteur (réel) du champ des vitesses acoustiques normales appliquées à la frontière $\partial_v F$ de F
$\mathbf{u}(P,t)=\{\mathbf{u}(P)\}e^{j\omega t}$	est le vecteur (complexe) du champ de déplacement dans la structure S
$\mathbf{p}(P,t)=\{\mathbf{p}(P)\}e^{j\omega t}$	est le vecteur (complexe) du champ de pression acoustique dans le fluide F
$\phi(P,t)=\{\phi(P)\}e^{j\omega t}$	est le vecteur (complexe) du champ de potentiel de déplacement dans le fluide F

2.4 Equation harmonique générale

Dans le but de prendre en compte tous les cas d'équations harmoniques l'opérateur `DYNA_LINE_HARM` de *Code_Aster* résout l'équation harmonique générale suivante (cf. [U4.53.11]) :

$$(-j\omega^3\mathbf{I}-\omega^2\mathbf{M}+j\omega\mathbf{C}+\mathbf{K})\{\mathbf{q}\}=\left\{\sum_{i=1}^{k}h_i(f)\cdot\omega^{n_i}\cdot e^{j\pi\frac{\phi_i}{180}}\cdot\mathbf{g_i}(P)\right\}$$ éq 2.4-1

où :

$\mathbf{I}$	Matrice d' « impédance » fluide éventuelle issue de la modélisation éléments finis,
$\mathbf{M}$	Matrice de « masse » issue de la modélisation éléments finis,
$\mathbf{C}$	Matrice d' « amortissement » issue de la modélisation éléments finis,
$\mathbf{K}$	Matrice de « rigidité » issue de la modélisation éléments finis,
$\{\mathbf{q}(P)\}$	Vecteur des degrés de liberté issus de la modélisation éléments finis,
$\{\mathbf{g_i}(P)\}$	Vecteur champ aux noeuds correspondant à une ou plusieurs charges de force ou vitesse acoustique ou potentiel ou mouvement imposé,
$h_i(f)$	Fonction réelle ou complexe de la fréquence f ,
$\omega=2\mathrm{pf}$	Pulsation
n_i	Puissance de la pulsation quand le chargement est fonction de la pulsation,
ϕ_i	Phase en degrés de chaque composante de l'excitation par rapport à une référence de phase.

A titre d'exemple si on prend le cas d'un système de fluide modélisé en acoustique, sans degrés de liberté imposés, simplement sollicité sur une partie de sa frontière par un champ de vitesse normale $\mathbf{v_n}(P,t)=\{\mathbf{v_n}(P)\}e^{j\omega t}$, les termes de l'équation [**éq 2.4-1**] deviennent :

$\mathbf{I}$	*inexistante* ,
$\mathbf{M}$	Matrice de masse issue de la modélisation éléments finis acoustique,
$\mathbf{C}$	*Eventuellement* matrice d'amortissement issue de la modélisation éléments finis acoustique si impédance sur frontière,
$\mathbf{K}$	Matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis acoustique,
$\{\mathbf{q}(P)\}$	$=\{\mathbf{p}(P)\}$, vecteur des pressions aux noeuds,
$\{\mathbf{g_i}(P)\}$	$=\{\mathbf{v_n}(P)\}$, vecteur champ de vitesse normale aux faces (éléments finis)
$h_i(f)$	$=-1.$ (constante),
$\omega=2\mathrm{pf}$	Pulsation,
n_i	$=1$
ϕ_i	$=0$

Remarque :

*Outre la solution de l'équation harmonique [**éq 2.4-1**], Code_Aster permet de calculer les dérivées de cette solution par rapport au chargement $\{\mathbf{g_i}(P)\}$ ou à des paramètres de masse, raideur ou amortissement ($\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$). Les équations dont ces dérivées sont solutions et les développements théoriques relatifs sont dans [R4.03.04].*

3 Bibliographie

1) R. DAUTRAY, J-L. LIONS, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", Tome 2, Masson, 1985.

2) G. DHATT, G. TOUZOT, "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A., Paris, 1984.

4 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6	F.STIFKENS EDF-R&D/AMA	Texte initial