
Loi de comportement de l'assemblage ASSE_CORN

Résumé :

Ce document décrit le comportement non linéaire des assemblages non linéaires de cornières de pylônes modélisés par des éléments discrets `DIS_TR`. Cette loi de comportement est affectée sur les éléments discrets au moyen de la relation `ASSE_CORN` appelée par les opérateurs de résolution de problèmes non linéaires `STAT_NON_LINE` [R5.03.01] ou `DYNA_NON_LINE` [R5.05.05].

La loi représente à la fois le comportement en traction de l'assemblage et la relation moment-rotation autour de l'axe des boulons perpendiculaire à l'assemblage. Les autres directions de chargement présentent un comportement élastique linéaire décrit par des caractéristiques classiques de rigidité.

On distingue dans la loi de comportement deux phases associées à deux mécanismes : la première représentant le frottement et le glissement des boulons jusqu'à la butée, et la seconde représentant la plastification de l'assemblage jusqu'à la ruine. Les lois de type plastique décrivant chacune de ces phases ont même allure et présentent une concavité à leur raccordement qui rend la convergence problématique et nécessite un traitement numérique particulier dans les options de calcul auxquelles fait appel la méthode itérative de Newton.

Table des matières

1 Notations.....	3
2 Modèle physique du comportement unidirectionnel de l'assemblage.....	5
3 Relation de comportement des mécanismes.....	6
3.1 Comportement unidirectionnel.....	6
3.2 Comportement bidimensionnel incrémental.....	7
4 Implantation dans le Code_Aster.....	10
4.1 Formulation en grandeurs réduites en chargement.....	11
4.1.1 Opérateur Knr.....	11
4.1.2 Opérateur Kor.....	12
4.2 Formulation en grandeurs réduites en déchargement.....	13
4.3 Opérateurs tangents Kn et Ko.....	13
4.4 Traitement numérique du raccordement entre les mécanismes de la loi d'assemblage.....	14
4.5 Variables de la loi	15
4.6 paramètres de la loi.....	15
5 Références bibliographiques.....	16
6 Description des versions du document.....	16

1 Notations

SLF	Surface Limite de Frottement
M_y	Moment dans l'assemblage autour de l'axe y
\bar{N}_1	Effort limite de glissement de l'assemblage sur l'axe x
\bar{M}_1	Moment limite de glissement de l'assemblage sur l'axe y
SLU	Surface Limite Ultime
\bar{N}_2	Effort limite ultime de l'assemblage sur l'axe x
\bar{M}_2	Moment limite ultime de l'assemblage sur l'axe y
\bar{N}	Effort limite
\bar{M}	Moment limite
\bar{U}_1	Déplacement limite du mécanisme 1 sur l'axe x
$\bar{\theta}_1$	Rotation limite du mécanisme 1 sur l'axe y
\bar{U}_2	Déplacement limite du mécanisme 2 sur l'axe x
$\bar{\theta}_2$	Rotation limite du mécanisme 2 sur l'axe y
U	Déplacement de l'assemblage sur l'axe x
θ	Rotation de l'assemblage sur l'axe y
n	Effort réduit $n = Nx/\bar{N}$
m	Moment réduit $m = My/\bar{M}$
U_r	Déplacement réduit $U_r = U/\bar{U}$
θ_r	Rotation réduite $\theta_r = \theta/\bar{\theta}$
\bar{U}	Déplacement limite sur l'axe x
$\bar{\theta}$	Rotation limite sur l'axe y
$h(x)$	Fonction scalaire
a	Paramètre de non linéarité
\bar{d}	Constante scalaire
\underline{d}	Vecteur déplacement généralisé réduit
\underline{f}	Vecteur effort généralisé réduit
p	Variable interne scalaire
f_{eq}	Effort généralisé équivalent réduit scalaire
F	Surface de chargement
$R(x)$	Fonction scalaire $R(x) = h^{-1}(x)$
\underline{D}	Vecteur déplacement généralisé
\underline{E}	Vecteur effort généralisé

$[\bar{D}]$	Matrice déplacement généralisé limite
$[\bar{F}]$	Matrice effort généralisé limite
X^+	Valeur de X à l'instant $t + dt$
X^-	Valeur de X à l'instant t
e	Excentricité de chargement $e = M_y / N_x$
e_r	Excentricité de chargement réduite $e_r = m / n$
ε	Signe de n
$[]$	Matrice
$\{\}$	Vecteur colonne
$\langle \rangle$	Vecteur ligne
K_o	Opérateur tangent à l'instant t
K_n	Opérateur tangent à l'instant $t + dt$
K_{or}, K_{nr}	Opérateurs tangents réduits

2 Modèle physique du comportement unidirectionnel de l'assemblage

L'assemblage d'une cornière sur l'aile d'une autre ou sur une plaque (gousset ou couvre-joint) par des boulons est schématisé par la [Figure 2-a].

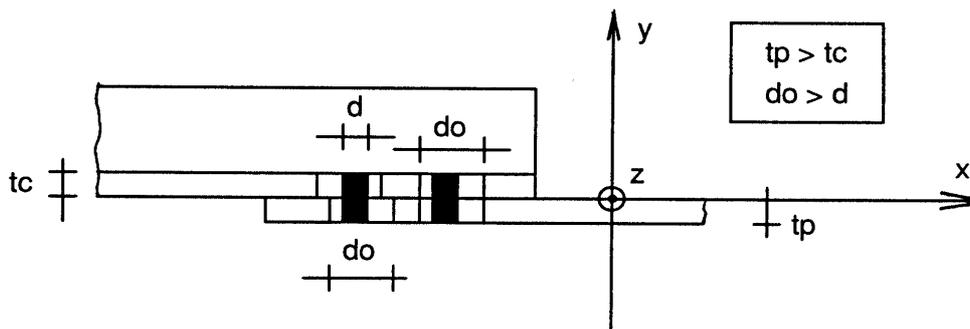


Figure 2-a : repère local de la liaison ; l'axe x est confondu avec l'axe de la barre et l'axe y est confondu avec l'axe des boulons

Le comportement unidirectionnel de l'assemblage est modélisé pour le chargement en traction ou en flexion.

La modélisation retenue du comportement unidirectionnel en chargement de l'assemblage soumis à un effort normal ou un moment autour de y est représentée par la [Figure 2-b].

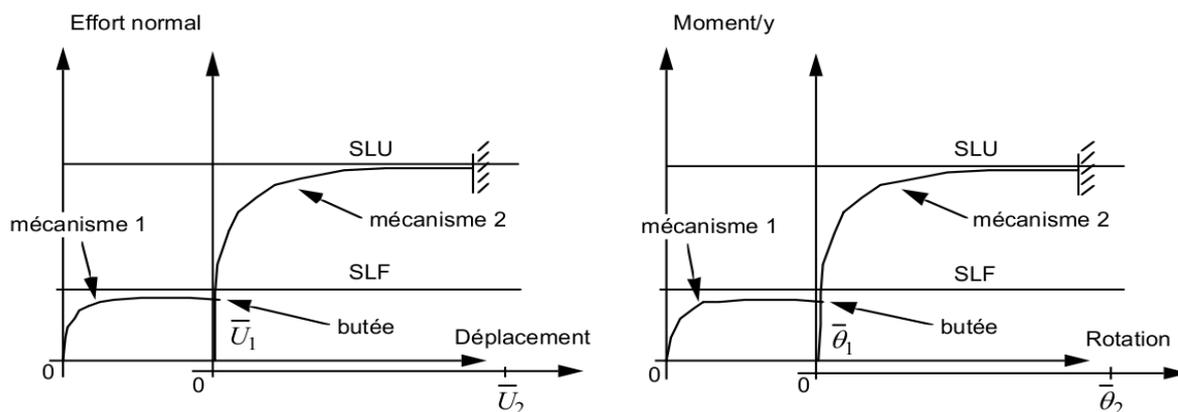


Figure 2-b : mécanismes d'assemblage en effort normal et moment

On distingue deux phases du comportement associées à deux mécanismes :

- mécanisme 1 : frottement et glissement jusqu'à la butée (début du cisaillement des boulons).
- mécanisme 2 : plastification de l'assemblage jusqu'à la ruine par cisaillement des boulons ou déchirement des pinces.

La surface limite de frottement (SLF) est la courbe correspondant à l'apparition du glissement dans les espaces $(N_x - U_x)$ et $(M_y - \theta_y)$. Le frottement est décrit par la loi de Coulomb.

La surface limite ultime (SLU) est la courbe correspondant à la ruine de l'assemblage dans les espaces $(N_x - U_x)$ et $(M_y - \theta_y)$. La ruine peut être due, selon la conception de l'assemblage, au cisaillement des boulons ou au déchirement des pinces.

Les essais sur une même géométrie mais avec des couples de serrage des boulons différents montrent que la raideur tangente du mécanisme 2 au point de butée diminue quand la SLF se rapproche de la SLU.

Ceci justifie la modélisation physique retenue pour l'assemblage des deux mécanismes [Figure 2-b].

3 Relation de comportement des mécanismes

Le comportement des mécanismes 1 et 2 est semblable. Il est non linéaire entre un comportement initial tangent rigide et un comportement limite asymptotique.

Il est décrit par deux paramètres essentiels : le paramètre de non linéarité et le paramètre surface limite.

La butée (mécanisme 1) ou la ruine (mécanisme 2) sont décrits par un critère cinématique associé.

3.1 Comportement unidirectionnel

Nous avons dit au [§2] que les comportements unidirectionnels en effort normal et en moment autour de y sont semblables [Figure 2-b].

Ils peuvent être décrits par la même relation si on utilise les grandeurs adimensionnelles :

$$1) \text{ forces réduites : } n = \frac{N_x}{N} \text{ et } m = \frac{M_y}{M}$$

$$2) \text{ déplacements réduits : } U_r = \frac{U}{U} \text{ et } \theta_r = \frac{\theta}{\theta}$$

La [Figure 3.1-a] représente sous forme adimensionnelle le comportement unidirectionnel. Analytiquement, il peut s'écrire (c'est un choix) :

$$U_r = h(n) \text{ ou } \theta_r = h(m)$$

$$\text{avec } h(x) = \frac{1}{d} \frac{x^{a+1}}{1-x^a}$$

$$\bar{d} = \frac{\bar{n}^{a+1}}{1-\bar{n}^a}$$

a est le paramètre scalaire de non linéarité. \bar{n} et a sont identifiés sur les essais unidirectionnels. \bar{n} qui prend en compte la variabilité des essais prend généralement la valeur 0.95.

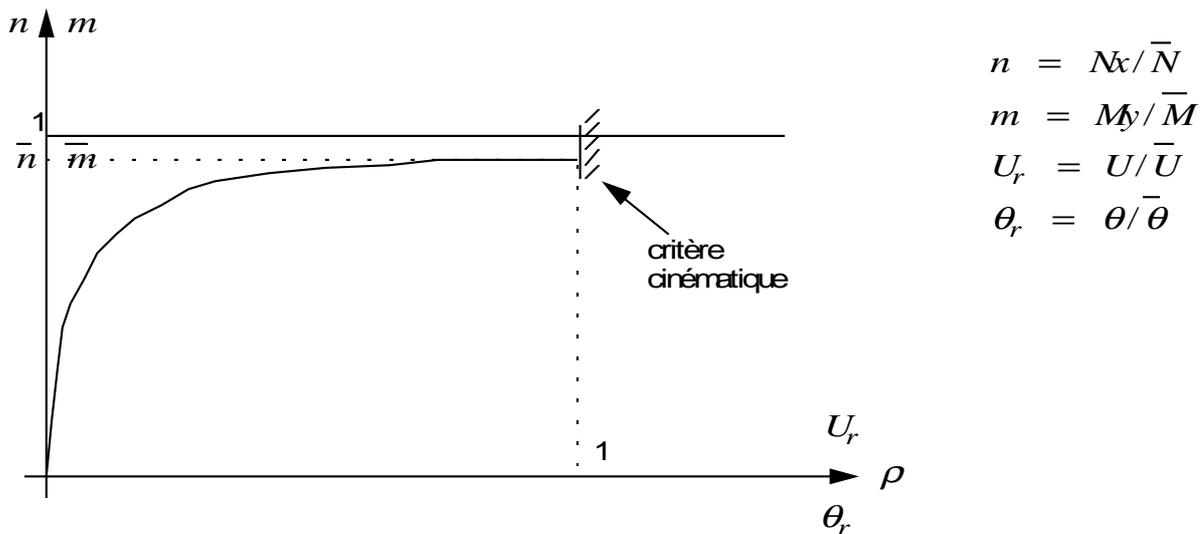


Figure 3.1-a : relation de comportement d'assemblage

On remarque que $h(\bar{n})=1$ ou $h(\bar{m})=1$, c'est-à-dire : $U_r=1$ ou $\theta_r=1$, ou encore : $U=\bar{U}$ ou $\theta=\bar{\theta}$.

Le critère cinématique unidirectionnel est donc vérifié pour $n=\bar{n}$ ou $m=\bar{m}$.

3.2 Comportement bidimensionnel incrémental

Le couplage à la limite est défini par la surface limite :

$$\left(\frac{N_x}{\bar{N}}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{\bar{M}}\right)^2 = 1$$

Le comportement unidirectionnel en variables réduites est décrit par la relation du [§3.1] :

$$d = h(f)$$

où \underline{d} est le vecteur déplacements réduits $\begin{pmatrix} U_r \\ \theta_r \end{pmatrix}$
 \underline{f} est le vecteur forces réduites $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$

En comportement bidimensionnel, l'isotropie est traduite par un modèle à une variable interne **scalaire** p telle que :

$$p = h(feq) \text{ en chargement}$$

où feq est la force réduite équivalente (scalaire).

feq est définie telle que :

$$\underline{F} = feq * \overline{F}^*$$

où \underline{F} est le point courant de chargement $\begin{pmatrix} N_x \\ M_y \end{pmatrix}$
 \overline{F}^* est le chargement limite associé à \underline{F} $\begin{pmatrix} \overline{N}_x^* \\ \overline{M}_y^* \end{pmatrix}$

L'expression de feq se déduit de l'expression de la surface limite. L'appartenance de \overline{F}^* à la surface limite s'écrit :

$$\left(\frac{\overline{N}_x^*}{\overline{N}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{M}_y^*}{\overline{M}}\right)^2 = 1$$

Par la définition de feq , on peut écrire :

$$\left(\frac{N_x}{feq \overline{N}}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{feq \overline{M}}\right)^2 = 1$$

c'est-à-dire en fonction des forces réduites n et m :

$$\left(\frac{n}{feq}\right)^2 + \left(\frac{m}{feq}\right)^2 = 1$$

$$\text{d'où } feq = \sqrt{n^2 + m^2}$$

On définit alors la surface de chargement F , homothétique à la surface limite, par :

$$F: \quad feq - R(p) = 0 \\ \text{où } R(p) = h^{-1}(p)$$

Pour un formalisme similaire à celui de la plasticité à écrouissage isotrope [bib2], on obtient la relation de comportement continue exprimée en grandeurs réduites :

$$\underline{d} = p \frac{\partial F}{\partial \underline{f}} = p \frac{\underline{f}}{feq}$$

$$p = 0 \quad \text{si } feq - R(p) < 0$$

$$p = h'(feq) \quad \text{si } feq - R(p) = 0$$

La relation de comportement de type rigide - plastique sans élasticité s'écrit finalement :

$$\underline{D} = \frac{p}{feq} [\underline{D}] [\underline{F}]^{-1} \underline{E}$$

où $\underline{D} = \begin{pmatrix} U \\ \theta \end{pmatrix}$ et $\underline{E} = \begin{pmatrix} N_x \\ M_y \end{pmatrix}$

$$[\underline{D}] = \begin{bmatrix} \bar{U} & 0 \\ 0 & \bar{\theta} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\underline{F}] = \begin{bmatrix} \bar{N} & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix}$$

La relation de comportement incrémental en grandeurs réduites s'obtient par intégration de la relation continue entre t (variables -) et $t + dt$ (variables +).

En chargement, Δp vérifie $F = 0$ à $t + dt$:

$$feq^+ = R(p^- + \Delta p) \quad \text{éq 2.2-1}$$

En introduisant la relation de comportement,

$$\Delta \underline{d} = \Delta p \frac{\underline{f}^+}{feq^+} \quad \text{éq 2.2-2}$$

on déduit la valeur de Δp ,

$$\Delta p = \|\Delta \underline{d} \cdot \Delta \underline{d}\| = \sqrt{\Delta U_r^2 + \Delta \theta_r^2}$$

et on calcule la valeur de feq^+ par [éq 2.2-1]. La relation de comportement [éq 2.2-2] donne les efforts réduits :

$$n^+ = \frac{\Delta U_r}{\Delta p} R(p^- + \Delta p)$$

$$m^+ = \frac{\Delta \theta_r}{\Delta p} R(p^- + \Delta p)$$

En déchargement, $\Delta p = 0$ et on a par [éq 2.2-2] :

$$\Delta \underline{d} = 0$$

4 Implantation dans Code_Aster

La relation de comportement ASSE_CORN est affectée à des éléments discrets de modélisation DIS_TR à 2 nœuds confondus. Cette relation est appelée par les opérateurs de résolution de problèmes non linéaires STAT_NON_LINE [R5.03.01] ou DYNA_NON_LINE [R5.05.05].

Les axes locaux de ces éléments x , y , z sont définis comme sur la [Figure 2-a].

L'intégration de cette relation de comportement des assemblages dans l'opérateur STAT_NON_LINE de Code_Aster nécessite la formulation des opérateurs tangents K_o et K_n [bib3].

- 1) K_o est la rigidité tangente au début du pas de temps, instant t .
- 2) K_n est la rigidité tangente à la fin du pas de temps, instant $t+dt$.

L'illustration des opérateurs K_o et K_n est donnée par la [Figure 4-a].

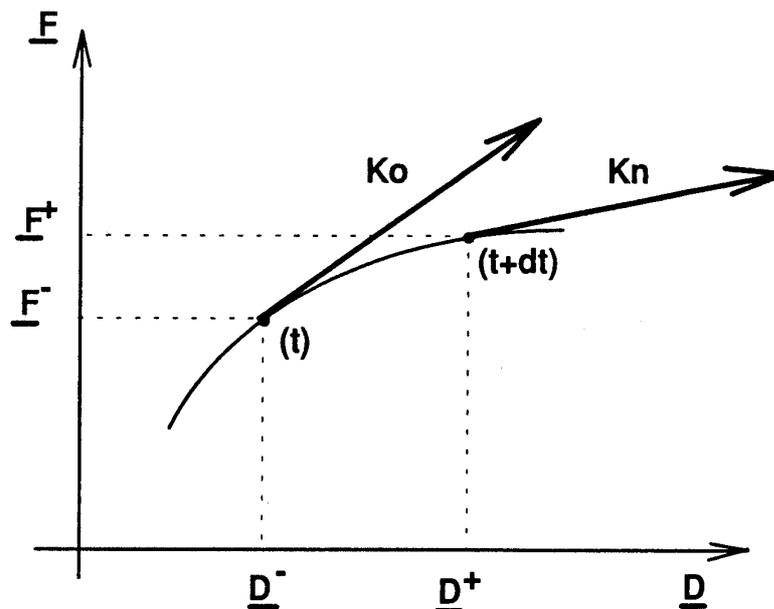


Figure 4-a : définition des opérateurs K_o et K_n

4.1 Formulation en grandeurs réduites en chargement

4.1.1 Opérateur K_{nr}

Nous avons vu au [§3.2] que la relation de comportement s'écrit :

$$f^+ = \frac{\Delta d}{\Delta p} R(p^+ + \Delta p)$$

avec $\Delta p = \|\Delta \underline{d}\| = \sqrt{\Delta U_r^2 + \Delta \theta_r^2}$

L'opérateur K_{nr} est défini par :

$$K_{nr} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial d_j} \right] \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

Il s'écrit :

$$K_{nr} = \frac{\Delta p [Id] - [\Delta \underline{d}] \cdot \left\langle \frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta d_j} \right\rangle^+}{\Delta p^2} R(p^+) + [\Delta \underline{d}] \cdot \left\langle \frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta d_j} \right\rangle^+ \frac{R'(p^+)}{\Delta p}$$

Le calcul donne alors :

$$\left\langle \frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta d_j} \right\rangle^+ = \left(\frac{\Delta U_r}{\Delta p}, \frac{\Delta \theta_r}{\Delta p} \right)$$

$$[\Delta \underline{d}] \cdot \left\langle \frac{\partial \Delta p}{\partial \Delta d_j} \right\rangle^+ = \begin{bmatrix} \frac{\Delta U_r^2}{\Delta p} & \frac{\Delta U_r \Delta \theta_r}{\Delta p} \\ \frac{\Delta U_r \Delta \theta_r}{\Delta p} & \frac{\Delta \theta_r^2}{\Delta p} \end{bmatrix}$$

et avec $\underline{a} = 1$ (seul cas traité actuellement), on a : $h(x) = \frac{1}{d} \frac{x^2}{1-x}$

$$R(p) = h^{-1}(p) = \frac{1}{2} \left(-\bar{d} p + \sqrt{\bar{d}^2 p^2 + 4 \bar{d} p} \right)$$

$$R'(p) = \frac{1}{h'(R(p))} = \frac{\bar{d} [1 - R(p)]^2}{R(p) [2 - R(p)]}$$

4.1.2 Opérateur K_{or}

Pour les comportements élasto-plastiques, l'opérateur K_o à $t=0$ est égal à la rigidité de la structure élastique. Dans notre cas, le comportement initial tangent est rigide. L'opérateur K_{or} se définit alors par le passage à la limite quand p tend vers 0 de l'opérateur K_{nr} . On obtient :

$$R'(p) = \frac{R(p)}{p}$$

$$\text{d'où } K_{or} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{R(p)}{p} [Id]$$

Or $R(p) < 1 \quad \forall p$ et si on suppose que l'utilisateur donne, pour le premier pas de chargement, des valeurs telles que $\Delta p > 10^{-4}$, on peut retenir en pratique :

$$K_{or_{t=0}} = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 10^4 \end{bmatrix}$$

Cette valeur par défaut est modifiable (cf §5).
Ces propos sont illustrés par la [Figure 4.1.2-a].

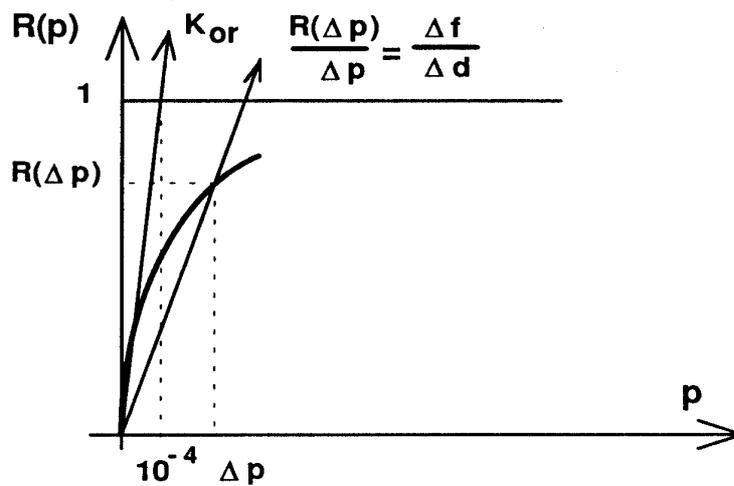


Figure 4.1.2-a : opérateur K_o à $t = 0$

A l'instant t courant, l'opérateur K_{or} est égal à l'opérateur K_{nr} du pas précédent défini par le [§4.1.1].

4.4 Traitement numérique du raccordement entre les mécanismes de la loi d'assemblage

Au cours de la résolution de chacun des pas de chargement par la méthode itérative de Newton, on doit calculer à chaque itération la tangente à la courbe d'équilibre force-déplacement de la loi de comportement. Le problème est que le raccordement entre les mécanismes de la loi d'assemblage, sur la loi de comportement, présente une concavité positive (cf. [Figure 2-b]) qui rend la convergence problématique quand, au cours d'un pas de chargement, on passe d'un mécanisme à l'autre.

Dans la sous-routine TE0041 qui calcule, pour chaque incrément de charge, la matrice élémentaire de rigidité tangentielle d'un élément fini discret à 2 nœuds possédant des degrés de liberté en translation et en rotation, il s'est avéré nécessaire pour converger, de calculer une raideur sécante dirigée de l'état initial d'effort et de déplacement nuls vers l'état, à la fin du pas de chargement, constitué par l'effort imposé et le déplacement correspondant sur la courbe d'équilibre de la loi de comportement. Il a fallu pour cela, ce qui était inhabituel au niveau de cette option, connaître le numéro d'itération interne du procédé numérique calculant le pas de chargement, puis estimer l'effort imposé à l'élément à la fin de ce pas.

En effet, si on note F^+ l'effort imposé au niveau d'un élément (a priori inconnu puisqu'on ne connaît que les efforts assemblés), U^+ le déplacement correspondant sur la courbe d'équilibre, et pour l'itération i , les valeurs respectives $U(i), F(i), K_s(i)$ du déplacement, de l'effort et de la matrice sécante – faisant office de matrice tangente – calculés à la fin de l'itération, on connaît seulement en entrée de la sous-routine précitée U^i , et les valeurs au début du pas de charge $F(0)$ et $U(0)$, car on n'a pas stocké les valeurs à l'itération précédente $i-1$. Dans l'expression du résidu calculé en fin d'itération $i-1$: $F^+ - F(i-1) = K_s(i-1) \cdot (U(i) - U(i-1))$, on ne connaît donc plus que $U(i)$ à l'itération i , sauf dans le cas particulier $i=1$ où l'on a :

$$F^+ - F(0) = K_s(0) \cdot (U(1) - U(0))$$

F^+ y est la seule valeur inconnue au départ et se déduit des autres. On en déduit également le déplacement U^+ en fin de pas d'après la relation d'équilibre :

$$\dot{p} \cdot [n, m] = R(p) \cdot \left[\dot{U}_r, \dot{\Theta}_r \right], \text{ d'où la raideur sécante } K_s(1) = F^+ / U^+.$$

Le problème est que dans cette première itération, le déplacement $U(1)$ imposé est différent du déplacement final à calculer U^+ en équilibre avec F^+ désormais connu (au test d'équilibre près du pas de chargement précédent). L'effort calculé à la fin de cette itération $F(1)$ doit donc être également différent de F^+ et tel que $F(1) = K_s(1) \cdot U(1)$ de façon qu'à partir du couple $U(1)$ et $F(1)$, on pointe avec la sécante $K_s(1)$ sur le couple U^+ et F^+ . On obtient ainsi au début de l'itération 2 un déplacement $U(2)$ très proche de U^+ et on peut alors calculer par la relation d'équilibre $F(2)$ très proche également de F^+ ainsi que la raideur sécante $K_s(2) = F(2) / U(2)$.

Si on a convergé exactement au pas de charge précédent, 2 itérations internes suffisent à converger exactement, sinon il faut quelques itérations supplémentaires pour satisfaire le test d'équilibre sur le résidu.

La méthode dite de « sécante dirigée » est schématisée sur la [Figure 4.3-a] où on a les correspondances suivantes :

$$U^i = U(i)$$

$$K_i(U^i) = K_s(i)$$

pour une loi de comportement $LC(U^i) = F(i)$.

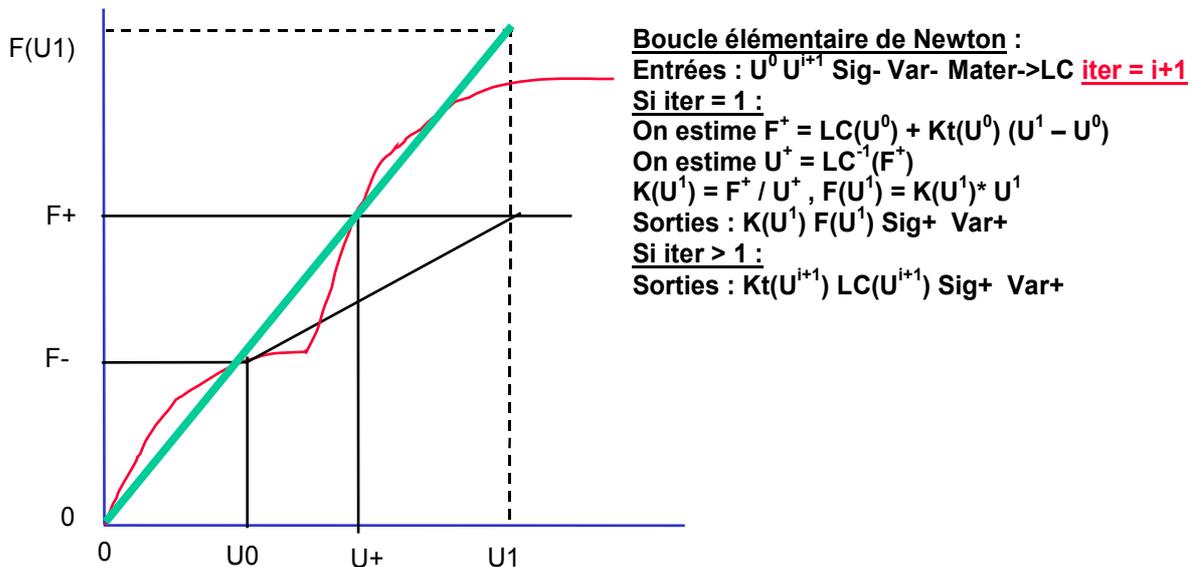


Figure 4.3-a : méthode de sécante dirigée

On voit donc maintenant pourquoi il fallait dans l'option calculée par la subroutine précitée connaître le numéro d'itération interne i afin de distinguer le cas particulier $i = 1$.
 Variables et paramètres de la loi de comportement

4.5 Variables de la loi

La loi de comportement comporte 7 variables internes par point de calcul :

- 1) $V1$ est le déplacement réduit équivalent p maximal atteint en mécanisme 1,
- 2) $V2$ est le déplacement réduit équivalent p maximal atteint en mécanisme 2,
- 3) $V3$ est un indicateur qui vaut 1 ou 2 selon que l'on soit respectivement sur la surface limite du mécanisme 1 ou 2, et 0 si l'on est sous cette surface limite (après décharge par exemple),
- 4) $V4$ et $V5$ sont respectivement la force et le moment maximaux atteints en mécanisme 2 avant décharge,
- 5) $V6$ et $V7$ sont respectivement le déplacement et la rotation origines du mécanisme 1, qui peuvent être non nuls quand après décharge en mécanisme 2, le chargement change de signe pour repasser en mécanisme 1.

4.6 paramètres de la loi

Les paramètres de la loi de comportement sont entrés comme données sous le mot clé ASSE_CORN de la commande DEFI_MATERIAU [U4.43.01] :

- NU_1 : on entre derrière ce mot clé la valeur du paramètre \bar{N}_1 du mécanisme 1,
- MU_1 : on entre derrière ce mot clé la valeur du paramètre \bar{M}_1 du mécanisme 1,
- DXU_1 : on entre derrière ce mot clé la valeur du paramètre \bar{U}_1 du mécanisme 1,
- DRYU_1 : on entre derrière ce mot clé la valeur du paramètre $\bar{\theta}_1$ du mécanisme 1,
- C_1 : on entre derrière ce mot clé la valeur commune aux paramètres \bar{n} et \bar{m} du mécanisme 1,
- NU_2 : on entre derrière ce mot clé la valeur du paramètre \bar{N}_2 du mécanisme 2,

- MU_2 : on entre derrière ce mot clé la valeur du paramètre \bar{M}_2 du mécanisme 2,
- DXU_2 : on entre derrière ce mot clé la valeur du paramètre \bar{U}_2 du mécanisme 2,
- DRYU_2 : on entre derrière ce mot clé la valeur du paramètre $\bar{\theta}_2$ du mécanisme 2,
- C_2 : on entre derrière ce mot clé la valeur commune aux paramètres \bar{n} et \bar{m} du mécanisme 2,
- KY, KZ, KRX, KRZ prennent les valeurs des caractéristiques de comportement linéaire dans les directions locales « respectivement,
- RP_0 : on entre derrière ce mot clé une valeur possible de K_{or} (10^4 par défaut).

Remarque : Le paramètre α n'est pas accessible à l'utilisateur. Il est fixé à la valeur $\alpha = 1$.

5 Références bibliographiques

- 1) P. PENSERINI : « Modélisation des assemblages boulonnés dans les pylônes en treillis » Note EDF/R&D HM-77/93/287
- 2) P. PENSERINI : « Caractérisation et modélisation du comportement des liaisons structure métallique-fondation » Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 1991
- 3) J. P. LEFEBVRE, P. MIALON : « Algorithme non linéaire quasi-statique du Code_Aster » Note EDF/R&D HI-75/7832

6 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6	J.M.PROIX-R&D/AMA	Texte initial
8.4	G. DEVESA, J.L. FLEJOU, P. PENSERINI EDF-R&D/AMA EDF/LME	