

## Loi d'endommagement d'un matériau élastique fragile

---

### Résumé :

Ce document décrit le modèle de comportement élastique fragile `ENDO_FRAGILE` disponible en statique et en dynamique. L'endommagement est modélisé de manière scalaire ; les chargements en compression et en traction ne sont pas distingués. Outre le modèle local, la formulation non locale à déformation régularisée est également supportée pour contrôler les phénomènes de localisation. La formulation non locale à gradient d'endommagement est remplacée par la loi `ENDO_SCALAIRE` [R5.03.25]

## 1 Domaine d'application

La loi ENDO\_FRAGILE vise à modéliser de la manière la plus simple possible un comportement élastique fragile. Le matériau est élastique isotrope. Sa rigidité peut décroître de manière irréversible lorsque l'énergie de déformation devient importante, sans distinguer la traction de la compression. Cette perte de rigidité est mesurée par une variable interne scalaire appelée endommagement qui évolue de 0 (matériau sain) à 1 (matériau totalement endommagé, c'est-à-dire sans rigidité). En outre, la contrainte ne peut dépasser un seuil qui décroît lui aussi avec le niveau d'endommagement pour atteindre 0 lorsque le matériau est totalement endommagé. On se reportera à [bib1] pour une description de ce type de phénoménologie.

La propriété de décroissance du seuil en contrainte avec le niveau d'endommagement est appelée adoucissement et entraîne généralement une perte d'ellipticité des équations du problème. Il en résulte une localisation des déformations et de l'endommagement dans des bandes dont l'épaisseur est directement contrôlée par la taille des éléments finis. Pour pallier cette déficience du modèle une formulation non locale est proposée, elle s'appuie sur une régularisation des déformations et activée par la modélisation \*\_GRAD\_EPSI [R5.04.02]. La largeur des bandes de localisation est contrôlée par un paramètre matériau, renseigné dans l'opérateur DEFI\_MATERIAU sous le mot-clé LONG\_CARA du mot-clé facteur NON\_LOCAL [U4.43.01]. Cependant, l'obtention d'un problème physique à nouveau bien posé n'est obtenu qu'au prix d'un surcoût important en temps calcul. Par ailleurs, il faut bien remarquer que seules les relations de comportement sont altérées et non les équations d'équilibre. Par conséquent, les contraintes conservent leur sens usuel. Pour la modélisation fondée sur l'introduction du gradient de l'endommagement et activée par la modélisation \*\_GRAD\_VARI [R5.04.01], se référer à la loi ENDO\_SCALAIRE [R5.03.25].

Enfin, que l'on active ou non ces formulations non locales, le caractère adoucissant du comportement entraîne également l'apparition d'instabilités, physiques ou parasites, qui se traduisent par des snap-backs sur la réponse globale et rendent le pilotage du chargement indispensable en statique. Le pilotage de type PRED\_ELAS [R5.03.80] apparaît alors comme le mode de contrôle du niveau de chargement le plus approprié.

## 2 Loi de comportement locale

### 2.1 Relations de comportement

L'état du matériau est caractérisé par la déformation  $\varepsilon$  et l'endommagement  $d$  compris entre 0 et 1. La relation contrainte – déformation est élastique, la rigidité est affectée de manière linéaire par l'endommagement :

$$\sigma = (1 - d) E : \varepsilon \quad \text{éq 2.1-1}$$

avec  $E$  le tenseur de Hooke. Par ailleurs, l'évolution de l'endommagement, toujours croissante, est gouvernée par la fonction seuil suivante :

$$f(\varepsilon, d) = \frac{1}{2} \varepsilon : E : \varepsilon - k(d) \quad \text{où } k(d) = w^y \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma - d} \right)^2 \quad \text{éq 2.1-2}$$

Les coefficients  $w^y$  et  $\gamma$ , tous deux positifs, sont des paramètres du modèle. La condition de cohérence détermine alors totalement le taux d'endommagement  $\dot{d}$  :

$$f(\varepsilon, d) \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad \dot{d} f(\varepsilon, d) = 0 \quad \text{éq 2.1-3}$$

Les équations [éq 2.1-1] à [éq 2.1-3] suffisent à décrire entièrement la loi de comportement ENDO\_FRAGILE, effectivement très simple. On peut également remarquer qu'elle s'insère dans le formalisme proposé par Marigo [bib2].

## 2.2 Identification des paramètres du modèle

Les paramètres de cette loi de comportement sont au nombre de quatre. D'une part, le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  qui déterminent le tenseur de Hooke par :

$$\mathbf{E}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \text{Id} \quad \text{éq 2.2-1}$$

D'autre part,  $w^y$  et  $\gamma$  qui définissent le comportement adoucissant. Ils sont déterminés par un essai de traction simple, cf. [Figure 2.2-a]. Pour simplifier l'entrée des données du modèle, on renseigne non pas  $w^y$  et  $\gamma$  mais directement le module tangent  $E^T$  et la contrainte au pic  $\sigma^y$  sous le mot-clé facteur ECRO\_LINE ou ECRO\_LINE\_FO de l'opérateur DEFI\_MATERIAU. Quant à  $E$  et  $\nu$ , ils sont donnés classiquement sous le mot-clé facteur ELAS ou ELAS\_FO.

A toutes fins utiles, voici également les expressions de la déformation à rupture  $\varepsilon^R$  dans cet essai de traction simple, ainsi que l'énergie volumique  $k^0$  consommée pour endommager totalement un point matériel, cette dernière expression étant valable quelle que soit l'histoire de chargement :

$$\varepsilon^R = \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E^T} \right) \sigma^y \quad k^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E^T} \right) \sigma^y{}^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^R \sigma^y = w^y \frac{1+\gamma}{\gamma} \quad \text{éq 2.2-2}$$

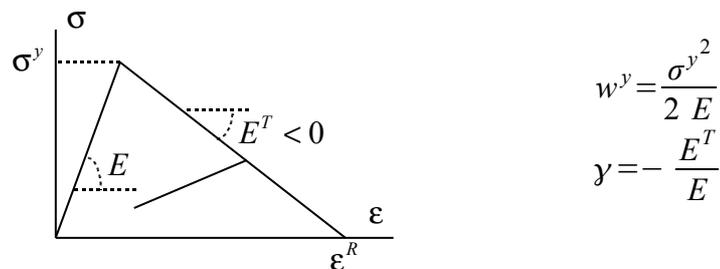


Figure 2.2-a : Simulation d'un essai de traction simple

## 2.3 Intégration de la loi de comportement

La discrétisation temporelle des équations [éq 2.1-1] à [éq 2.1-3] sur un pas de temps  $[t^- t]$  est réalisée par un schéma d'Euler implicite. Pour toute fonction du temps  $q$ , on note  $q^- = q(t^-)$  et  $q = q(t)$ . Intégrer en temps la loi de comportement signifie alors déterminer l'état de contrainte et d'endommagement solution du système non linéaire suivant, où la déformation  $\varepsilon$  et l'état du matériau au début du pas de temps  $(\varepsilon^-, d^-)$  sont donnés :

$$\sigma = (1 - d) E \cdot \epsilon \quad \text{éq 2.3-1}$$

$$f(\epsilon, d) \leq 0 \quad d - d^- \geq 0 \quad (d - d^-) f(\epsilon, d) = 0 \quad \text{éq 2.3-2}$$

Une méthode de résolution a été proposée par [bib3]. Elle commence par examiner la solution sans évolution de l'endommagement (aussi appelée essai élastique) puis, si nécessaire, procède à une correction pour vérifier la condition de cohérence. Dans le cas présent, l'existence et l'unicité de la solution garantissent le bon fonctionnement de la méthode. Considérons l'essai élastique :

$$d = d^- \text{ solution si } f^{\text{el}}(\epsilon) = f(\epsilon, d^-) \leq 0 \quad \text{éq 2.3-3}$$

Dans le cas contraire, l'endommagement est obtenu en résolvant  $f(\epsilon, d) = 0$  :

$$d = (1 + \gamma) \left( 1 - \sqrt{\frac{w \cdot \gamma}{w}} \right) \text{ où } w = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E \cdot \epsilon \quad \text{éq 2.3-4}$$

Quant à la contrainte, elle est donnée par [éq 2.3-1] dans tous les cas.

Il reste encore à s'assurer que l'endommagement ne dépasse pas la valeur 1. En fait, lorsque  $d = 1$ , la rigidité du point matériel considéré s'annule. Dans la mesure où aucune technique de suppression des éléments finis « cassés » n'est mise en œuvre (technique éventuellement délicate lorsque les éléments finis possèdent plusieurs points de Gauss), des pivots nuls peuvent apparaître dans la matrice de rigidité. C'est pourquoi on introduit un seuil numérique  $d_c$  au-delà duquel on considère une rigidité résiduelle élastique pour la matrice tangente, les équations de comportement restant inchangées.

Pour préserver un conditionnement raisonnable de la matrice de rigidité, on choisit

$$d_c = 1 - 10^{-5} \quad \text{éq 2.3-5}$$

Un indicateur  $\chi$ , rangé dans la deuxième variable interne, précise alors le comportement pendant le pas de temps courant :

$\chi = 0$  comportement élastique (énergie de déformation inférieure au seuil)

$\chi = 1$  évolution de l'endommagement

$\chi = 2$  (endommagement saturé) ( $d = 1$ ).

## 2.4 Description des variables internes

Les variables internes sont au nombre de deux :

VI(1) endommagement  $d$

VI(2) indicateur  $\chi$

## 3 Formulation avec gradient d'endommagement

La formulation en gradient d'endommagement n'est plus disponible (à partir de la version 10.2 d'Aster), Se référer à la loi de comportement ENDO\_SCALAIRE [R5.03.25], qui remplace ENDO\_FRAGILE pour la modélisation GRAD\_VARI et ceci principalement pour des raisons de robustesse de calculs.

## 4 Formulation avec déformation régularisée

### 4.1 Formulation continue en temps

L'approche à déformation régularisée [R5.04.02] permet elle aussi de contrôler les phénomènes de localisation et apparaît à ce titre comme une alternative à la formulation avec gradient d'endommagement. Mais à la différence de cette dernière, cette formulation présente l'avantage de recourir aux algorithmes standard pour les problèmes non linéaires. En effet, la seule différence par rapport à la loi de comportement locale réside dans la donnée de deux déformations au lieu d'une, la déformation locale  $\varepsilon$  qui intervient dans la relation contrainte – déformation et la déformation régularisée  $\bar{\varepsilon}$  qui pilote l'évolution de l'endommagement. Celle-ci se déduit de la déformation locale par résolution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} - L_c^2 \Delta \bar{\varepsilon} = \varepsilon & \text{dans la structure} \\ \nabla \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur le bord de normale } \mathbf{n} \end{cases} \quad \text{éq 4.1-1}$$

où la longueur caractéristique  $L_c$  est à nouveau renseignée sous le mot-clé `LONG_CARA` de `DEFI MATERIAU`. Finalement, la relation de comportement s'écrit de la manière suivante, où la fonction seuil  $f$  a déjà été définie en [éq 2.1-2] :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{éq 4.1-2}$$

$$f(\bar{\varepsilon}, d) \leq 0 \quad \dot{d} \geq 0 \quad \dot{d} f(\bar{\varepsilon}, d) = 0 \quad \text{éq 4.1-3}$$

## 4.2 Intégration de la loi de comportement

Un des avantages avancés pour la formulation non locale à déformation régularisée est le peu de modifications qu'elle entraîne dans la construction de la loi de comportement. En effet, l'intégration des variables internes est totalement pilotée par la déformation régularisée  $\bar{\varepsilon}$ . On retrouve ainsi les expressions de la loi locale :

$$\begin{cases} \text{si } f^{el}(\bar{\varepsilon}) = f(\bar{\varepsilon}, d) \leq 0 & d = d^- \\ \text{si } f^{el}(\bar{\varepsilon}) = f(\bar{\varepsilon}, d) > 0 & d = (1 + \gamma) \left( 1 - \sqrt{\frac{w^y}{\bar{w}}} \right) \end{cases} \quad \text{avec } \bar{w} = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} \cdot \bar{\varepsilon} \quad \text{éq 4.2-1}$$

La contrainte est alors obtenue directement par la relation [éq 4.1-2]. En outre, on introduit un endommagement critique [éq 2.3-5], comme dans le cas local, pour préserver une rigidité résiduelle.

## 4.3 Variables internes

Il s'agit des mêmes variables internes que pour la loi locale :

$$\begin{aligned} VI(1) & \text{ endommagement } d \\ VI(2) & \text{ indicateur } \chi \end{aligned}$$

## 5 Pilotage par prédiction élastique

Le pilotage de type `PRED_ELAS` standard contrôle l'intensité du chargement pour satisfaire une certaine équation liée à la valeur de la fonction seuil  $f^{el}$  lors de l'essai élastique [bib5]. Par conséquent, seuls les points où l'endommagement n'est pas saturé sont pris en compte. L'algorithme qui prend en charge ce mode de pilotage, cf. [R5.03.80], requiert la résolution en chacun de ces points de Gauss de l'équation scalaire suivante dans laquelle  $\Delta \tau$  est une donnée et  $\eta$  l'inconnue :

$$f^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{impo}} + \eta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{pilo}}, a^-) = \Delta \tau \quad \text{éq 3-1}$$

Notons que cette équation est modifiée pour le pilotage `PRED_ELAS` en `ENDO_SCALAIRE` afin d'avoir le paramètre  $\Delta \tau$  qui correspond à l'incrément d'endommagement que l'on cherche à obtenir pour au moins un point de la structure. On ne cherche alors plus un paramètre de pilotage  $\eta$  qui fasse sortir le critère d'une valeur  $\Delta \tau$  avec l'endommagement issu du pas de temps précédent (cf. Eq 3-1), mais un paramètre  $\eta$  qui nous ramène sur le critère avec un endommagement augmenté de  $\Delta \tau$  :

$$f^{el}(\varepsilon_{\text{impo}} + \eta \varepsilon_{\text{pilo}}, a^-) = \Delta \tau \Rightarrow f^{el}(\varepsilon_{\text{impo}} + \eta \varepsilon_{\text{pilo}}, a^- + \Delta \tau) = 0 \quad \text{éq 3-2}$$

où  $\Delta t$  correspond à l'incrément de temps défini dans la liste d'instant du calcul et `COEF_MULT` est le coefficient spécifié par le mot-clé `COEF_MULT` de l'option `PILOTAGE` dans l'opérateur `STAT_NON_LINE` [U4.51.03].

## 6 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
5.0	E. LORENTZ EDF-R&D/AMA	Texte initial
10.0	K. KAZYMYRENKO EDF-R&D/AMA	Prise en compte de la loi <code>ENDO_SCALAIRE</code>

## 7 Bibliographie

1. LEMAITRE J., CHABOCHE J.L. : Mécanique des matériaux solides. Dunod : Paris, 1988.
2. MARIGO J.J. : Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. Compte-rendu de l'Académie des Sciences, Paris 1981 ; série II, 292(19) : 1309-1312.
3. SIMO J.C., TAYLOR R.L. : Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1985 ; 48 : 101-118.
4. LORENTZ E., ANDRIEUX S. : A variational formulation for nonlocal damage models. International Journal of Plasticity 1999 ; 15 : 119-138.
5. LORENTZ E., BADEL P. : A load control method for damage finite element simulations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, submitted 2002.