Relations cinématiques linéaires de type RBE3

Résumé :

Ce document décrit la manière dont les relations cinématiques linéaires de type RBE3 sont calculées.

Table des Matières

1 Introduction..3
2 Notations..3
3 Définitions..3
4 Expression des relations cinématiques..3
5 Restriction des relations à certaines composantes..4
5.1 Composantes sur les nœuds esclaves...4
5.2 Composantes sur le nœud maître..4

1 Introduction

1.1 Principe général

Une relation cinématique linéaire de type RBE3 implique un nœud dit maître à plusieurs nœud dits esclaves. La relation a pour effet de distribuer la masse et les charges vues par le nœud maître sur les nœuds esclaves. Cette distribution se fait de manière à ce que la résultante des torseurs d'efforts sur les nœuds impliqués soit nulle.

1.2 Notations

X_M : coordonnées du nœud maître

X_i : coordonnées du i -ème nœud esclave ($1 \le i \le n$)

$\xi_i = X_i - X_M$: coordonnées relatives du i -ème nœud esclave

ω_i : coefficient du i -ème nœud esclave

$T_i = \begin{bmatrix} F_i \\ M_i \end{bmatrix}$: torseur d'effort au i -ème nœud, qui contient donc les forces $F_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix}$ et les moments $M_i = \begin{bmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}$ vus par ce nœud

On notera M^T la transposée de la matrice M

Par ailleurs, on considère que les nœuds portent par défaut les composantes de déplacements et de rotation, soit 6 degrés de liberté par nœud.

2 Définitions

Le calcul des relations nécessite une mise à l'échelle des composantes de rotations, afin que les relations créées ne soient pas modifiées lors d'un changement d'échelle du problème. Pour cela, on définit la longueur caractéristique suivante :

$$L_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|}{n}$$

et les matrices (diagonales), coefficient pour le i-ème nœud esclave:

$$W_i = \begin{bmatrix} \omega_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_i L_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_i L_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_i L_c^2 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, les calculs nécessitent l'introduction des matrices qui permettent d'expliciter les formules de changement de point de réduction pour des torseurs. On rappelle que le torseur d'efforts du nœud maître réduit sur le nœud esclave i s'écrit :

$$T_i=\begin{bmatrix} F_i \\ M_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_M \\ \xi_i \wedge M_M \end{bmatrix}=S_i T_M$$

On définit ainsi la matrice S_i :

$$S_i=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (\xi_i)_z & -(\xi_i)_y \\ 0 & 1 & 0 & -(\xi_i)_z & 0 & (\xi_i)_x \\ 0 & 0 & 1 & (\xi_i)_y & -(\xi_i)_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Expression des relations cinématiques

3.1 Obtention des relations cinématiques

Le raisonnement est mené sur la transmission des efforts entre le nœud maître et les nœuds esclaves. Dans un premier temps, on considère que toutes les composantes du nœud maître et toutes les composantes des nœuds esclaves sont impliquées dans la relation (la section 5 aborde la restriction des relations à certaines composantes).
Soit T_M le torseur d'effort du nœud maître que l'on cherche à répartir sur T_i, torseurs d'efforts sur les nœuds esclaves.
La forme suivante de répartition est adoptée pour chaque T_i :
$T_i=W_i S_i X T_M$
où la matrice X est inconnue et sert à répartir les efforts sur les nœuds esclaves. Elle est déterminée en calculant la résultante des torseurs d'effort sur les nœuds esclaves et en imposant qu'elle soit égale au torseur au nœud maître :
$$T_M=\sum_{i=1}^{n} S_i^T T_i=\sum_{i=1}^{n} S_i^T W_i S_i X T_M$$

On obtient donc :
$X=(S^T W S)^{-1}$ où S est l'assemblage des S_i et W est l'assemblage des W_i.

On note que la matrice X doit être inversible. Ceci est assuré par un choix pertinent des degrés de liberté maître et esclave.

On note maintenant $B_i=W_i S_i X$. De la relation $T_i=B_i T_M$, on déduit par dualité les relations cinématiques à imposer sur les degrés de liberté de déplacement :
$u_i=(B_i)^T u_M$

3.2 Dimension des matrices

On note $NDDLES$ le nombre total des degrés de liberté esclaves. Les matrices que l'on manipule ont les dimensions suivantes :
–Matrice W (assemblage des W_i) : $NDDLES$ lignes, $NDDLES$ colonnes
–Matrice S (assemblage des S_i) : $NDDLES$ lignes, 6 colonnes
–Matrice $S^T W S$: 6 lignes, 6 colonnes
–Matrice X : 6 lignes, 6 colonnes
–Matrice B : $NDDLES$ lignes, 6 colonnes

4 Restriction des relations à certaines composantes

4.1 Composantes sur les nœuds esclaves

Pour restreindre les composantes sur les nœuds esclaves aux composantes voulues, seules les lignes des matrices S_i correspondant aux composantes voulues sont conservées (ces matrices deviennent dès lors des matrices rectangulaires et non plus carrées).
Les matrices W_i restent carrées car on supprime les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté esclaves non impliqués dans la relation linéaire.

4.2 Composantes sur le nœud maître

Pour restreindre les composantes sur le nœud maître aux composantes voulues, seules les lignes des matrices B_i correspondant aux composantes voulues sont conservées.