

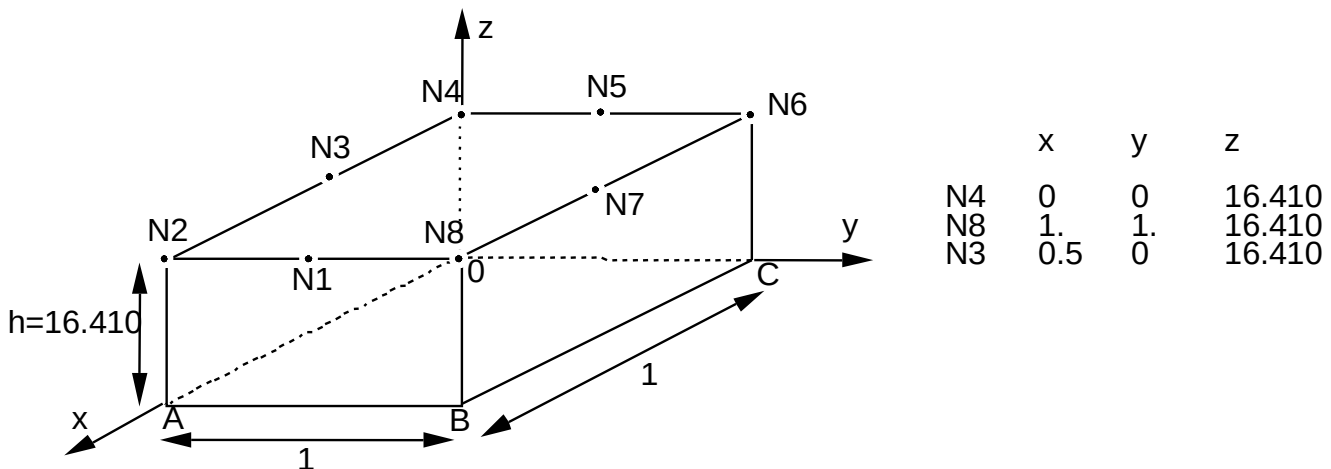
HPLV101 - Homogénéisation d'un matériau homogène

Résumé :

Ce test éprouve, dans une situation triviale où le matériau est homogène, la résolution des problèmes thermiques et mécaniques stationnaires, avec des chargements correspondant à un gradient de température et à une déformation imposée, voisins de ceux correspondant aux problèmes élémentaires de la méthode d'homogénéisation périodique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

Modélisation A

$E = 1.0 \text{ MPa}$

$\nu=0.3$

$$k = 1.0 \text{ W / (m. } ^\circ\text{C)}$$

$$C_p = 0 \text{ J}/(^{\circ}\text{C}.\text{m}^3)$$

Modélisation B

$$E_L = 1.0 \text{ MPa}$$

$$E_t = 0.9 \text{ MPa}$$

$$E_N = 0.8 \text{ MPa}$$

$v_{LT}=0.1$

$v_{LN}=0.25$

$$v_{TN}=0.33333333$$

$$k = 1.0 \text{ W / (m. } ^\circ \text{C)}$$

$$C_p = 0 \text{ J/(}^\circ\text{C.m}^3\text{)}$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Mécanique 3D :

Plan $z=0$:	$dz=0$	pour le chargement membranaire ;
	$dx=0, dy=0$	pour le chargement de flexion
Plans $y=0, y=1$:	$dy=0$	
Plans $x=0, x=1$:	$dx=0$	
Nœud : O	$dz=0$	(pour le seul chargement de flexion)

Chargement :

$$\begin{aligned} \text{déformation membranaire: } \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{flexion uniforme imposée: } \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} \frac{z}{z_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$z_0 = 1 \text{ m}$$

- Mécanique 2D, contraintes planes :

Axe : $x=0$ $dx=0$ (ces conditions ne correspondent pas à l'application de la
Nœud : O $dy=0$ méthode d'homogénéisation).

$$\text{Chargement : déformation } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ uniforme imposée}$$

- Thermique 3D et 2D :

Plan $x=0$ $temp=0$ (cette condition ne correspond pas à l'application de la
méthode d'homogénéisation).

Chargement : gradient $\mathbf{G} = (-1, 0, 0)$ uniforme imposé.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

- En thermique : on résout le problème thermique stationnaire :

$$\int_{\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta = \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta, \quad \forall \theta \in V, \quad \text{avec } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Les conditions aux limites choisies ici ne sont pas celles nécessaires à la méthode d'homogénéisation : on trouverait en effet $T = 0$ partout.

La solution est alors (vérifiant les conditions définies en [§1.3]) : $T(x, y, z) = -x$

L'énergie potentielle est alors à l'équilibre : $W^{th} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla T = -\frac{1}{2} |\Omega|$ ici

- En mécanique : on résout le problème d'élastostatique :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in W,$$

pour les cas :

chargement 3D membranaire	chargement 3D de flexion	chargement 2D contraintes planes
$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{z}{z_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les solutions sont :

- en 3D, chargement **membranaire** et élasticité isotrope: $\mathbf{u}(x, y, z) = \left(0, 0, -\frac{\nu z}{(1-\nu)}\right)$

l'énergie potentielle à l'équilibre est :

$$W^{pot} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) = -\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} (\lambda + 2\mu)$$

- en 3D, chargement **membranaire** et élasticité orthotrope: $\mathbf{u}(x, y, z) = (0, 0, -\beta z)$ avec $\beta = \frac{C_{13}}{C_{33}}$

soit $\beta = \frac{\frac{E_N}{E_L}(\nu_{LN} + \nu_{LT}\nu_{TN})}{1 - \frac{E_N}{E_T}\nu_{TN}^2}$ car le repère local n'est pas confondu avec le repère global (les angles nautiques valant tous 90°).

$$W^{pot} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) = -\beta^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} C_{33}$$

$$\text{où } C_{33} = \frac{1 - \nu_{NT}\nu_{TN}}{E_T E_N \Delta} \text{ et } \Delta = \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL} - \nu_{LN}\nu_{NL} - \nu_{TN}\nu_{NT} - 2\nu_{LT}\nu_{TN}\nu_{NL}}{E_L E_T E_N}$$

- en 3D, chargement de **flexion** : $\mathbf{u}(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{+ \nu z^2}{2z_0(1-\nu)} \right)$;

$$W^{pot} = - \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right)^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{h^2}{3z_0^2}$$

- en 3D, chargement **de flexion** et élasticité orthotrope: $\mathbf{u}(x, y, z) = \left(0, 0, -\beta \frac{z}{L} \right)$ avec $\beta = \frac{C_{13}}{C_{33}}$

$$\text{soit } \beta = \frac{\frac{E_N}{E_L} (\nu_{LN} + \nu_{LT}\nu_{TN})}{1 - \frac{E_N}{E_T} \nu_{TN}^2} \text{ car le repère local n'est pas confondu avec le repère global (les angles nautiques valant tous } 90^\circ).$$

$$W^{pot} = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = -\beta^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} C_{33} \frac{h^2}{3z_0^2}$$

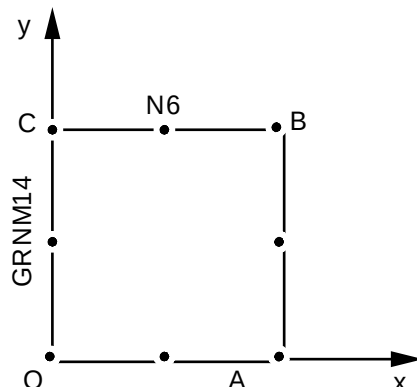
$$\text{où } C_{33} = \frac{1 - \nu_{NT}\nu_{TN}}{E_T E_N \Delta} \text{ et } \Delta = \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL} - \nu_{LN}\nu_{NL} - \nu_{TN}\nu_{NT} - 2\nu_{LT}\nu_{TN}\nu_{NL}}{E_L E_T E_N}$$

- en 2D, chargement plan : $\mathbf{u}(x, y) = (-x, 0)$;

$$W^{pot} = \frac{-|\Omega|}{2(1-\nu^2)}$$

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



Conditions aux limites et chargement :

Thermique : GROUP_NO : GRNM14 : TEMP : 0.0
 PRE_GRAD_TEMP : FLUX_X : -1.0

Mécanique : GROUP_NO : GRNM14 : DX : 0.0
(contraintes planes)
 NOEUD : O DY : 0.0
 PRE_EPSI : EPXX : -1.0

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8

3.3 Valeurs testées

Point	Grandeur	Référence
<i>CMP</i>		
<i>A</i>	<i>TEMP</i>	-1.0000
<i>A</i>	<i>DX</i>	-1.0000
<i>N6</i>	<i>DX</i>	-0.5000

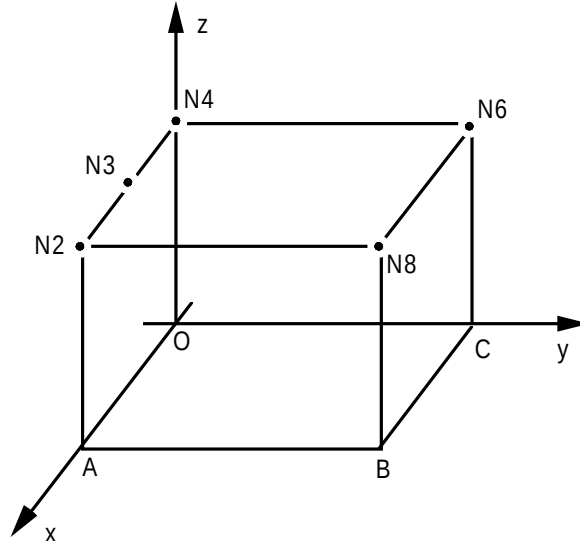
Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence
<i>MI</i>	Thermique	-0.500000000
<i>MI</i>	Mécanique	-0.549450550

3.4 Remarques

Code_Aster fournit la valeur de l'énergie de déformation, égale à l'opposé de l'énergie potentielle à l'équilibre (cas élastique).

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



Nom des mailles des faces :	ZEGAL0	YEGAL0	YEGAL1	XEGAL0	XEGAL1
Sommets :	BCOA	OAN2N4	BCN6N8	CON4N6	ABN8N2

Conditions aux limites :

```

ZERO : DEFI_CONSTANTE (VALE : 0.0) ;
FCT1:DEFI_FONCTION(Nom_para:'Z',VALE: (0.0 0.0 1.0 1.0));
Thermique :
GROUP_NO : XEGAL0 : TEMP : 0.0
PRE_GRAD_TEMP : FLUX_X : -1.0
Mécanique :
GROUP_NO : YEGAL0 : DY = 0.0
              XEGAL1 : DX = 0.0
              YEGAL1 : DY = 0.0
              XEGAL0 : DZ = 0.0
Cas membranaire :
GROUP_NO : ZEGAL0 : DZ = 0.0
PRE_EPSI : EPXX : -1.0
Cas flexion :
GROUP_NO : ZEGAL0 : DX = ZERO,  DY = ZERO
NOEUD : 0                      DZ = ZERO
PRE_EPSI :                      EPXX : FCT1
    
```

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20
Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

4.3 Valeurs testées

En élasticité isotrope

Cas	Grandeur	Point	Référence
Thermique	temp	N8	-1.000000
	temp	N3	-0.500000
Mécanique	dz	N4	-7.03285714
membrane	dz	N8	-7.03285714
Mécanique	dz	N4	57.70459285

flexion	dz	$N8$	57.70459285
---------	------	------	-------------

Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence
MI	Thermique	-8.20500
MI	Mécanique	-2.0287088
	Membrane	-1.8210238 10 ²
	Flexion	

En élasticité orthotrope

Cas	Grandeur	Point	Référence
Thermique	$temp$	$N8$	-1.000000
	$temp$	$N3$	-0.500000
Mécanique	dz	$N4$	- 6.63044894
	dz	$N8$	- 6.63044894
Mécanique	dz	$N4$	54.40283358
	flexion	$N8$	54.40283358

Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence
MI	Thermique	-8.20500

5 Synthèse des résultats

Les résultats sont exacts à des erreurs d'arrondi près, puisque les solutions cherchées font partie de l'espace des éléments finis choisis pour la modélisation.