

---

## SSNV186 – LBB condition et contact frottant avec X-FEM

---

### Résumé

Ce test a pour but de valider la prise en compte du contact (par la méthode continue [bib1]) sur les lèvres de la fissure dans le cadre de la méthode X-FEM [bib2], lorsque la LBB condition [bib3] [bib4] n'est pas respectée.

Le contact/frottement est traité par un algorithme de Lagrangien augmenté pour les modélisations A à H et par un algorithme pénalisé pour les modélisations I à K.

Ce test met en jeu un bloc parallélépipédique en compression. L'interface le traversant est représentée par une level set. L'interface est droite, non-penchée et traverse complètement les éléments.

## 1 Problème de référence

---

Des oscillations des pressions de contact peuvent apparaître dans certains cas, notamment pour des structures où l'interface coupe des pentaèdres, sous un chargement non-uniforme.

Cela est dû au non-respect de la LBB condition [bib3] [bib4]. Ce phénomène d'oscillations est comparable à celui rencontré en incompressibilité [bib5]. Physiquement, dans le cas du contact, cela revient à vouloir imposer le contact en trop de points de l'interface (sur-contrainte), rendant le système hyperstatique. Pour le relâcher, il faut restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange, comme cela est fait dans [bib6] pour les conditions de Dirichlet avec X-FEM. De tels algorithmes présentent des segments P0, qui ralentissent la convergence. Un bon algorithme doit minimiser l'apparition de tels segments. L'algorithme proposé par Moës [bib6] pour réduire les oscillations est adapté au cas 3D (algorithme version 1). Cet algorithme a fait l'objet d'une amélioration pour le rendre plus physique et plus efficace (algorithme version 2). Une comparaison des deux versions est effectuée.

Il est à noter que ces oscillations parasites ne sont pas reproductibles dans la version actuelle de Code\_Aster : l'un des deux algorithmes est systématiquement choisi (le 2 est utilisé par défaut), et même une surcharge du code pour n'en utiliser aucun amènerait un pivot nul. Nous les illustrons dans cette documentation par des résultats issus d'une autre formulation (formulation aux arêtes [bib7]), aujourd'hui résorbée.

Pour des hexaèdres ou des quadrangles coupés horizontalement, il n'y a pas de segments P0.

### 1.1 Géométrie

La structure est un parallélépipède droit à base carrée et sain. Les dimensions du bloc sont :  $LX = 5m$ ,  $LY = 20m$  et  $LZ = 20m$ . Il ne comporte aucune fissure [Figure 1.1-1].

L'interface est introduite par des fonctions de niveaux (level sets) directement dans le fichier de commandes à l'aide de l'opérateur `DEFI_FISS_XFEM` [U4.82.08]. L'interface est présente au sein de la structure par le biais de sa représentation par les level sets. La level set normale ( $LSN$ ) permet de définir une interface plane non-penchée qui traverse complètement les éléments, par l'équation suivante :

$$LSN = Z - 17.5$$

éq 1.1-1

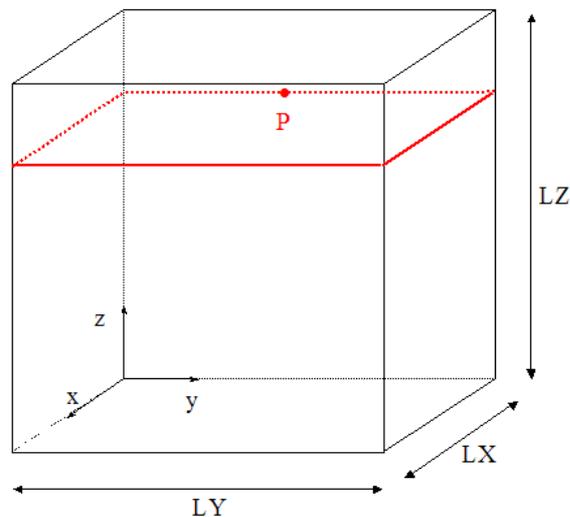


Figure 1.1-1 : Géométrie et positionnement de l'interface

## 1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young :  $E = 1000 \text{ Pa}$ .

Coefficient de Poisson :  $\nu = 0$ .

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

La face inférieure est encastree.

La face supérieure est soumise à une pression parabolique ayant pour expression :

$$pression = \left( 100 - \frac{(Y-10)^2}{2} \right) \frac{E}{10^6} \text{ Pa} \quad \text{éq 1.3-1}$$

Les déplacements suivant les axes  $x$  et  $y$  sont bloqués pour les nœuds de la surface supérieure.

## 1.4 Bibliographie

1. Massin P., Ben Dhia H., Zarroug M. : Éléments de contacts dérivés d'une formulation hybride continue, Manuel de référence du Code\_Aster, [R5.03.52]
2. Massin P., Geniaut S. : Méthode X-FEM, Manuel de référence du Code\_Aster, [R7.02.12]
3. Babuška I. : The finite element method with lagrangian multipliers, Numerische Math 20, 179-192, 1973
4. Barbosa H., Hugues T. : Finite element method with lagrange multipliers on the boundary. Circumventing the Babuška-Brezzi condition, Comp. Meth. Applied Mech Engrg. 85 (1), 109-128, 1991
5. Chapelle D., Bathe K. J. : The Inf-sup test, Computers & Structures 47 (4/5), 537-545, 1993

6. Moës N., Béchet E., Tourbier M. : Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 2006, Vol. 67(12), 1641-1699.

7. Géniaut S., Massin P., Moës N., A stable 3D contact formulation using X-FEM, *European Journal of Computational Mechanics*, Vol.16, n°2, Pages 259-276 , 2007.

## 2 Modélisation A : hexaèdres (version 2)

Dans cette modélisation, le maillage considéré ne comporte que des hexaèdres. Cette modélisation sert de référence pour les autres, car ce cas ne présente pas de segments P0. En effet, dans le cas des hexaèdres coupés par une interface parallèlement aux faces, le nombre de pressions de contact (une par arête coupée) est compatible avec la discrétisation du champ de déplacement [bib1] [bib2].

### 2.1 Caractéristiques du maillage

Le problème est invariant suivant l'axe  $Ox$ . Afin de limiter le temps de calcul, le maillage considéré ici ne comporte qu'un seul élément suivant cet axe. La structure est alors modélisée par un maillage régulier composé de  $1 \times 20 \times 20$  HEXA8 voir [Figure 2.1-1].

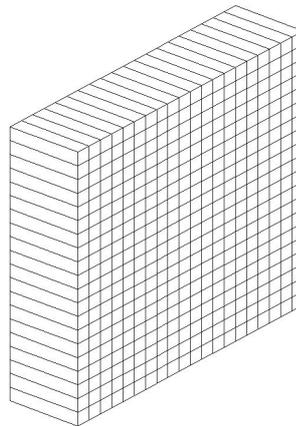


Figure 2.1-1 : Maillage d'hexaèdres

Ce maillage est composé d'éléments finis linéaires. Dans le cadre de la méthode continue [bib1] avec X-FEM [bib2], les inconnues de contact sont portées par les nœuds sommets.

### 2.2 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact. Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives.

### 2.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la pression de contact au point  $P$  de coordonnées  $(0, 10, 17.5)$ . Cette valeur sert de référence pour les autres modélisations.

$$\lambda = -9.52844 \cdot 10^{-2} Pa$$

## 3 Modélisation D : pentaèdres (version 2)

### 3.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation B.

### 3.2 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact.  
Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives.  
L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°2.

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la pression de contact au point  $P$  de coordonnées  $(0, 10, 17.5)$ .

Identification	Référence	Aster	% différence
Point $P$	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.518810^{-2}$	0.10

### 3.4 Commentaires

Cette modélisation montre que l'algorithme version 2 permet de réduire de manière efficace les oscillations. On observe que l'algorithme version 2 a tendance à introduire des approximations  $PI$  par morceaux des pressions de contact sur l'interface, ce qui le rend plus précis que la version1 (voir aussi la [Figure 5.2-1] et la [Figure 5.2-2]).

## 4 Modélisation E : tétraèdres (algorithme version 1)

Ce test met en jeu un maillage libre composé de tétraèdres. Afin de réduire le nombre d'éléments et donc le temps de calcul, la longueur de la structure suivant l'axe  $Ox$  est  $LX = 1 m$ .

### 4.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage considéré est un maillage libre réalisé avec GMSH. Il est constitué de 3629 TETRA4. La [Figure 4.1-1] représente le maillage dans le plan  $Oyz$ . L'interface  $y$  est tracée uniquement à des fins de visualisation.

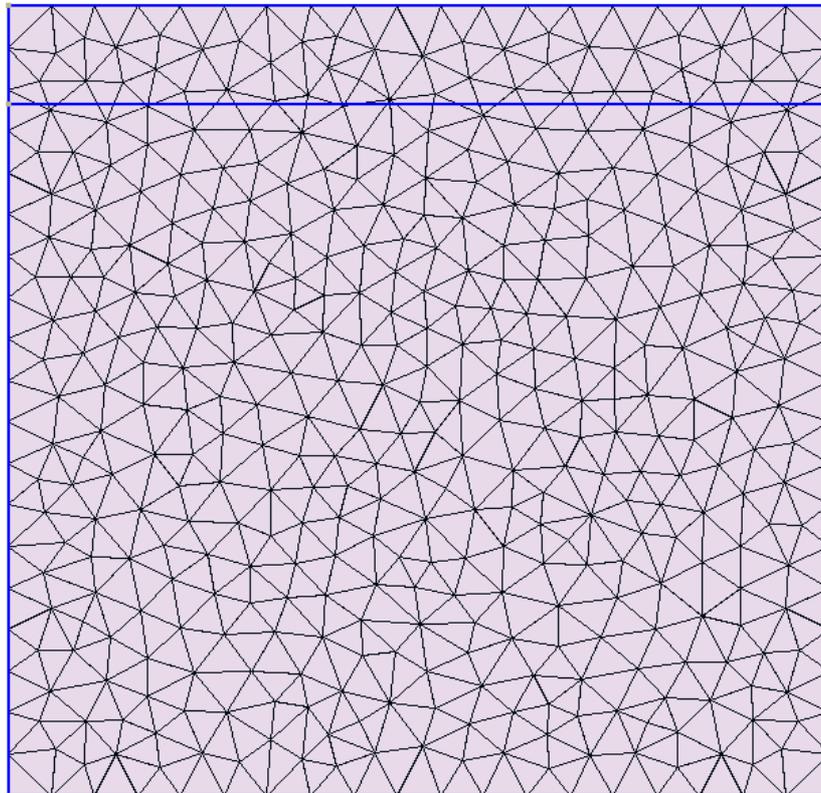


Figure 4.1-1 : Maillage libre

### 4.2 Conditions aux limites et chargements

La face inférieure est encastrée.

La face supérieure est soumise à une pression uniforme :

$$pression = 100 \frac{E}{10^6} Pa \quad \text{éq 4.2-1}$$

Les déplacements suivant les axes  $x$  et  $y$  sont bloqués pour les nœuds de la surface supérieure.

## 4.3 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact. Le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives mais le frottement n'est pas pris en compte. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°1.

## 4.4 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur des pressions de contact pour tous les points de l'interface. La solution analytique est tout simplement :

$$\lambda = \sigma_{zz} = - \text{pression} \quad \text{éq 4.4-1}$$

Identification	Référence	Aster	% différence
MAX (LAGS_C)	-0.1	0.0979	-2.08
MIN (LAGS_C)	-0.1	-0.1016	1.62

Pour tester tous les points de contact en une seule fois, on teste le minimum et le maximum de la colonne.

## 4.5 Commentaires

Ce test permet de valider la robustesse de l'algorithme de restriction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange de pression, dans un cas de maillage libre en 3D. Même sur une structure soumise à pression constante, l'algorithme est indispensable car des oscillations des pressions de contact peuvent apparaître (c'est le cas ici si l'algorithme n'est pas activé).

## 5 Synthèses des résultats 3D

### 5.1 Résumé

Dans le cadre de la méthode X-FEM, on a montré que, sans traitement particulier, une structure maillée avec des pentaèdres soumis à un chargement non-uniforme peut présenter de fortes oscillations des pressions de contact, comme le montre la deuxième courbe de la [Figure 5.2-1], réalisée avec une formulation différente [bib7], à présent résorbée dans Code\_Aster, pour laquelle l'absence d'algorithme de restriction n'entraînait pas de pivot nul. La même structure maillée avec des hexaèdres soumis au même chargement ne présente pas de telles oscillations (modélisation A servant de référence).

On a proposé deux algorithmes permettant de réduire significativement ces oscillations. Le premier (troisième courbe de la [Figure 5.2-1]) semble moins précis que le second (modélisation D).

De plus même sous chargement uniforme, des oscillations peuvent apparaître et il est indispensable d'utiliser un algorithme de réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange de pression (modélisation E).

### 5.2 Courbes de comparaison

La [Figure 5.2-1] rassemble les courbes des pressions de contact le long de l'axe  $Oy$  pour les 4 premières modélisations présentées. On remarque que les oscillations pour la modélisation B sont si fortes qu'en certains points la valeur de la pression de contact devient positive, ce qui voudrait dire qu'il y a décollement de l'interface. Les deux algorithmes permettent une réduction visible des oscillations, et on retrouve la courbe de référence obtenue avec le maillage d'hexaèdres.

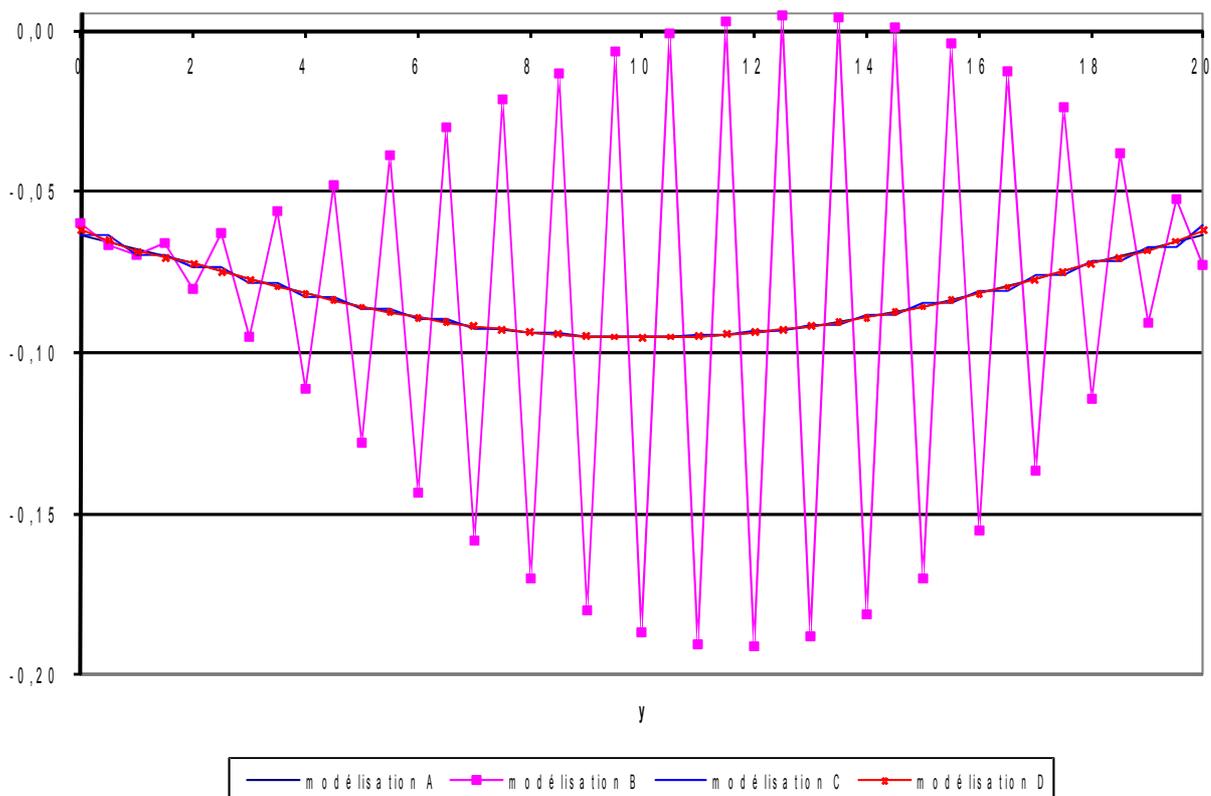


Figure 5.2-1 : Comparaison des pressions de contact suivant les modélisations

La [Figure 5.2-2] compare en détails les effets des deux algorithmes. On remarque que le premier implique souvent des pressions de contact constantes par morceaux, alors que le second tend à linéariser les pressions. Il est évident que de telles différences s'amenuisent en raffinant le maillage.

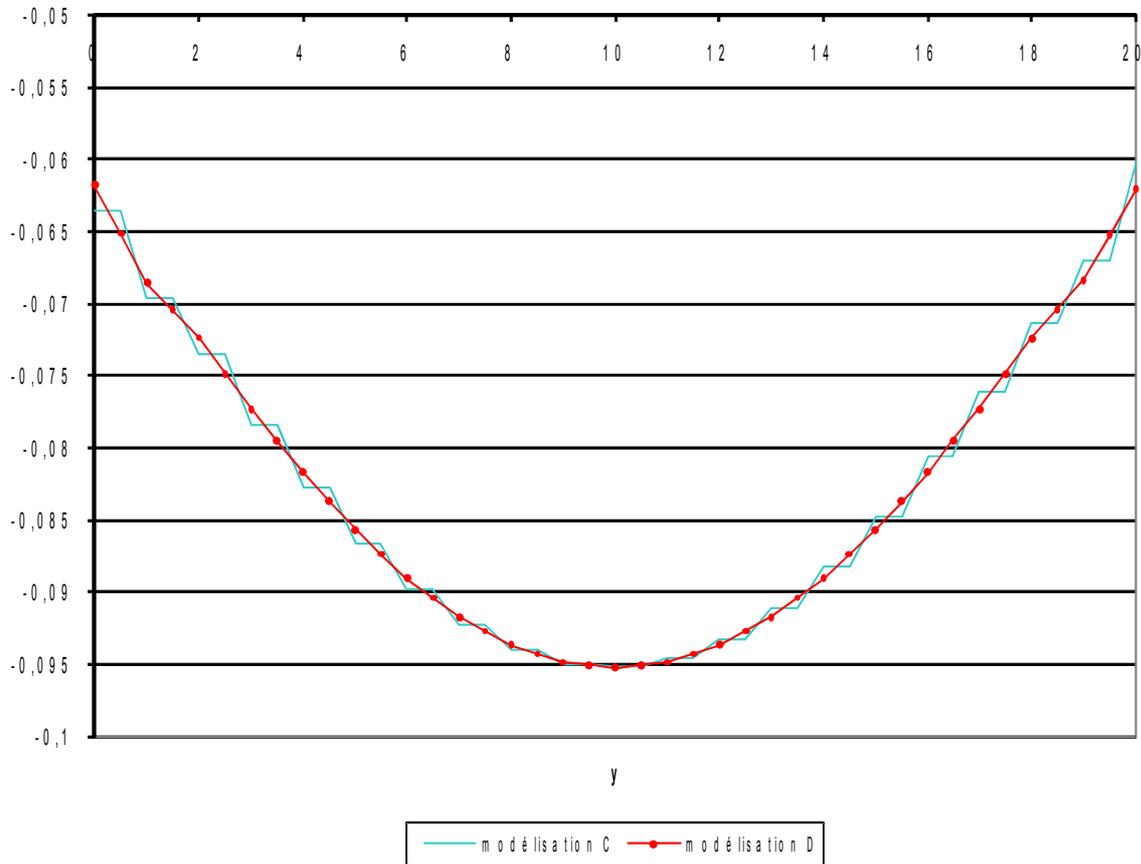


Figure 5.2-2 : Comparaison des 2 algorithmes

## 6 Modélisation F : quadrangles 2D

Cette modélisation est l'équivalent en 2D de la modélisation A (référence). Ce cas ne présente pas d'oscillations des pressions de contact. Tout comme dans la modélisation A, les quadrangles sont coupés par une interface parallèlement aux arêtes. Il n'y a alors pas de segments P0.

### 6.1 Caractéristiques du maillage

La structure est alors modélisée par un maillage régulier composé de  $20 \times 20$  QUAD4 (Voir [Figure 6.1-1]).

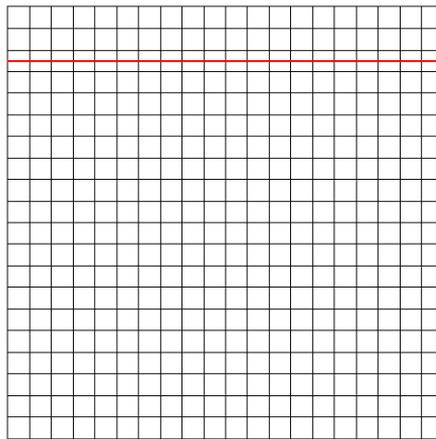


Figure 6.1-1 : Maillage de quadrangles

### 6.2 Fonctionnalités testées

Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le numéro 2.

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la pression de contact au point  $P$  de coordonnées  $(10, 17.5)$ .

Identification	Référence	Aster	% différence
Point $P$	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$2.41 \cdot 10^{-4}$

### 6.4 Commentaires

Ce cas test permet de retrouver les valeurs de référence des pressions de contacts calculées dans la modélisation A, et de vérifier que dans le cas de quadrangles coupés parallèlement à leurs faces, ces pressions de contacts ne présentent pas de segments P0 (voir [Figure 9.2-1]).

## 7 Modélisation G : triangles (algorithme version 1)

### 7.1 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage régulier composé de triangles. Le test est l'équivalent en 2D de la modélisation B (Voir [Figure 7.1-1]).

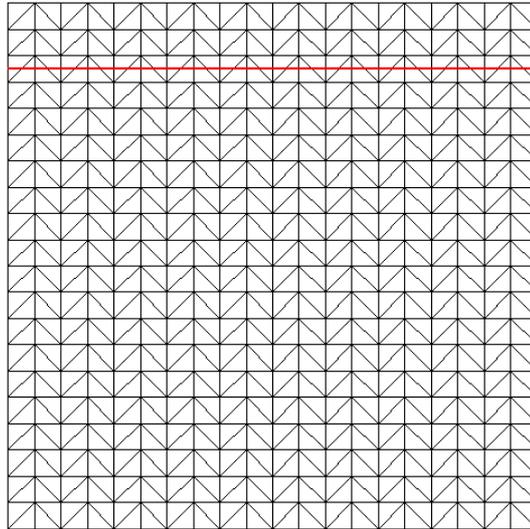


Figure 7.1-1 : Maillage de triangles

### 7.2 Fonctionnalités testées

Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°1.

### 7.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la pression de contact au point  $P$  de coordonnées  $(10,17.5)$ .

Identification	Référence	Aster	% différence
Point $P$	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.59082 \cdot 10^{-2}$	0.655

### 7.4 Commentaires

Cette modélisation montre que l'algorithme mis en place permet de réduire efficacement les oscillations. (voir [Figure 9.2-1]).

## 8 Modélisation H : triangles (algorithme version 2)

---

### 8.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation G.

### 8.2 Fonctionnalités testées

Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°2.

### 8.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la pression de contact au point  $P$  de coordonnées  $(10,17.5)$ .

Identification	Référence	Aster	% différence
Point $P$	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.59082 \cdot 10^{-2}$	0.655

### 8.4 Commentaires

Cette modélisation montre qu'en 2D, l'algorithme version 2 a un comportement très proche de celui de la version 1. En effet, mis à part les premières pressions de contacts mesurées sur la gauche du maillage, les valeurs observées sont identiques, et les courbes obtenues avec les deux algorithmes se recouvrent presque intégralement. (voir [Figure 9.2-1]).

## 9 Synthèses des résultats 2D

### 9.1 Résumé

On a, dans un premier temps, vérifié que le comportement de la structure de référence (modélisation A) pouvait être retrouvé en 2D (modélisation F). Après avoir observé le phénomène d'oscillations en 2D, on a testé sur des cas en 2D les deux algorithmes qui permettent de réduire ces oscillations en 3D.

Les deux algorithmes testés dans les modélisations G et H donnent, en 2 dimensions, des résultats très proches, et permettent de réduire conséquemment les oscillations introduites par le maillage.

### 9.2 Courbes de comparaison

La [Figure 9.2-1] représente les courbes des pressions de contact le long de l'axe Ox pour les 3 modélisations en 2D présentées. On remarque que les courbes représentatives des deux algorithmes se recouvrent presque intégralement. Les deux algorithmes sont donc à peu près aussi efficaces l'un que l'autre en 2D. Ils permettent néanmoins de réduire efficacement les oscillations.

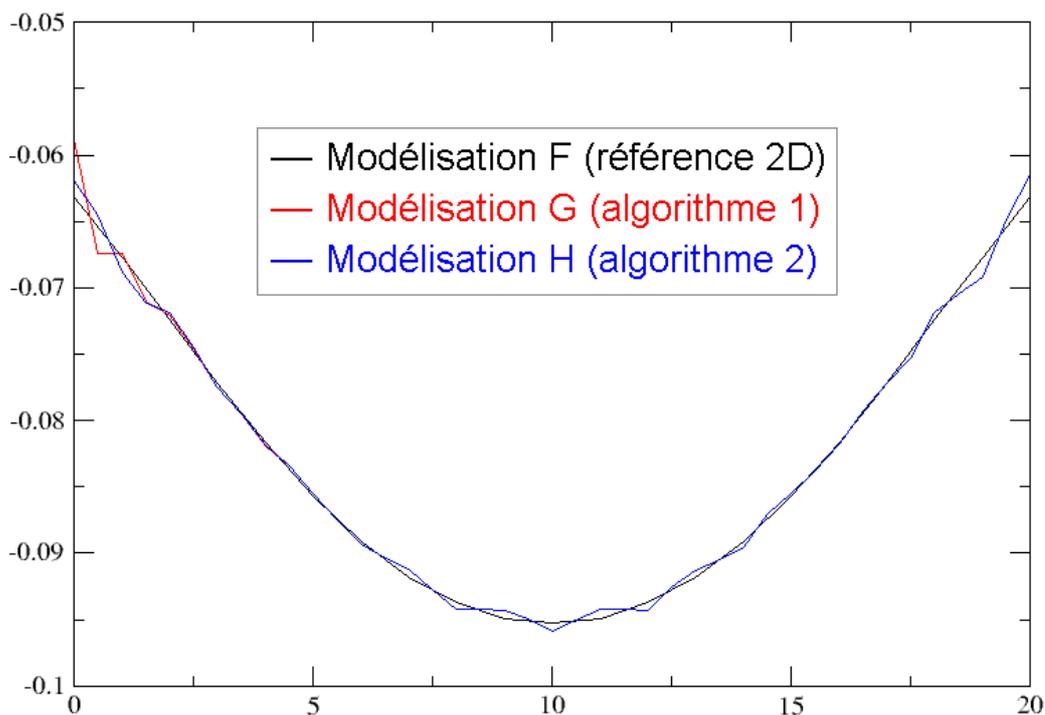


Figure 9.2-1 : Comparaison des pressions de contact suivant les modélisations 2D.

Il est à noter qu'un raffinement de maillage augmente évidemment la précision des résultats obtenus.

## 10 Modélisation I : pentaèdres (algorithme version 2), méthode pénalisée

---

### 10.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation B.

### 10.2 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact.  
Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives.  
L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°2.

### 10.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la pression de contact au point  $P$  de coordonnées  $(0, 10, 17.5)$ .

Identification	Référence	Aster	% différence
Point $P$	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.528856 \cdot 10^{-2}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$

### 10.4 Commentaires

On retrouve des résultats comparables à ceux de la modélisation B où l'algorithme de contact/frottement était le Lagrangien augmenté, et ce, sur toute la surface de contact (voir [Figure 26.2.1]).

## 11 Modélisation J : tétraèdres (algorithme version 1), méthode pénalisée

Ce test met en jeu un maillage libre composé de tétraèdres. Afin de réduire le nombre d'éléments et donc le temps de calcul, la longueur de la structure suivant l'axe  $Ox$  est  $LX = 1 m$ .

### 11.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation E.

### 11.2 Conditions aux limites et chargements

La face inférieure est encastree.

La face supérieure est soumise à une pression uniforme :

$$pression = 100 \frac{E}{10^6} Pa \quad \text{éq 11.2-1}$$

Les déplacements suivant les axes  $x$  et  $y$  sont bloqués pour les nœuds de la surface supérieure.

### 11.3 Fonctionnalités testées

On utilise le schéma d'intégration réduit à 4 points de Gauss par facette de contact.

Le contact est actif dès la première itération de contraintes actives.

L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°1.

On teste ici la méthode pénalisée pour traiter le contact/frottement.

### 11.4 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur des pressions de contact pour tous les points de l'interface. La solution analytique est tout simplement :

$$\lambda = \sigma_{zz} = -pression \quad \text{éq 11.4-1}$$

Identification	Référence	Aster	% différence
MAX (LAGS_C)	-0.1	-0.100000364	$3.6 \cdot 10^{-4}$
MIN (LAGS_C)	-0.1	-0.099999551	$4.5 \cdot 10^{-3}$

Pour tester tous les points de contact en une seule fois, on teste le MINIMUM et le MAXIMUM de la colonne.

### 11.5 Commentaires

On retrouve des résultats comparables à ceux de la modélisation E où l'algorithme de contact/frottement était le Lagrangien augmenté.

## 12 Modélisation K : triangles (algorithme version 1), méthode pénalisée

---

### 12.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage est identique à celui de la modélisation G.

### 12.2 Fonctionnalités testées

Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la première itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°1. On teste ici la méthode pénalisée pour traiter le contact/frottement.

### 12.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la pression de contact au point  $P$  de coordonnées (10, 17.5).

Identification	Référence	Aster	% différence
Point $P$	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$9.5574 \cdot 10^{-2}$	0.30

### 12.4 Commentaires

On retrouve des résultats comparables à ceux de la modélisation G où l'algorithme de contact/frottement était le Lagrangien augmenté, et ce, sur toute la surface de contact (voir [Figure 26.2.2]).

## 13 Synthèses des résultats en méthode pénalisée

### 13.1 Résumé

On a montré que la méthode pénalisée permettait de satisfaire la LBB condition au même titre que la méthode du Lagrangien augmenté.

### 13.2 Courbes de comparaison

Les Figures 26.2.1 et 26.2.2 montrent le profil de pression de contact le long de l'interface lorsqu'on utilise la méthode pénalisée et la méthode de Lagrangien augmenté. Les résultats des modélisations A et F sont donnés à titre de référence. On constate qu'il y a très peu d'écart entre les résultats des deux méthodes.

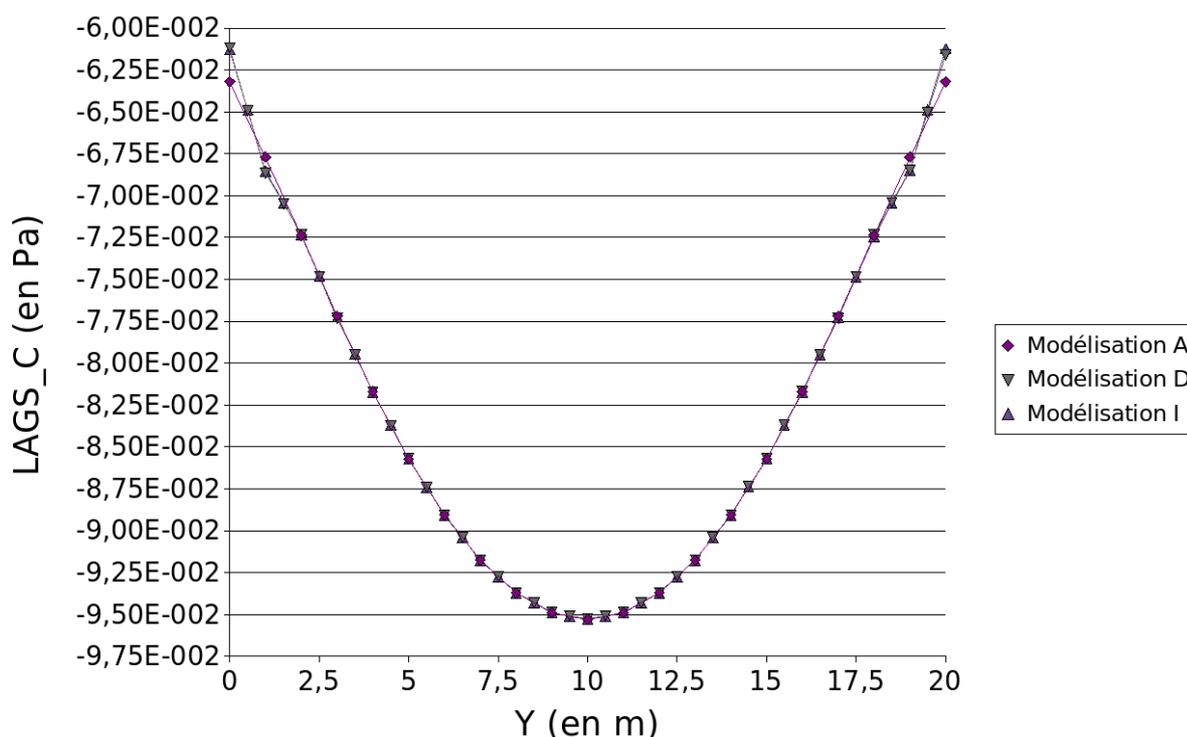


Figure 13.2-1: Comparaison de la méthode du Lagrangien augmenté et de la méthode pénalisée en 3D.

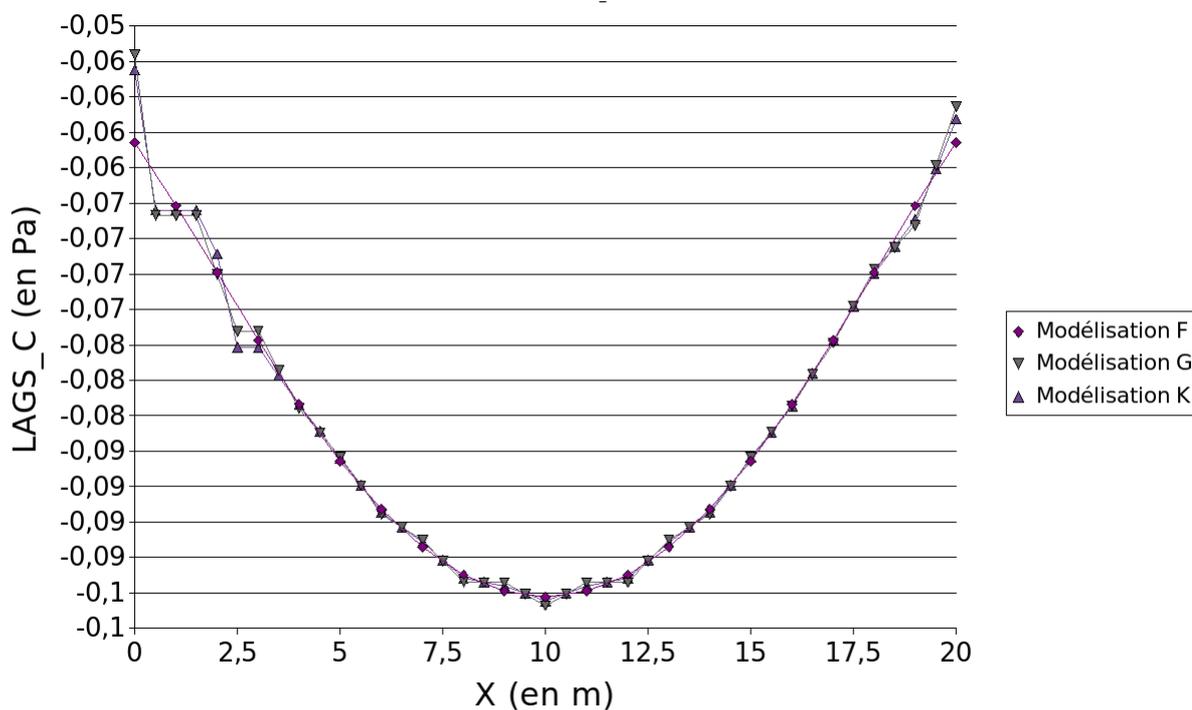


Figure 13.2-2: Comparaison de la méthode du Lagrangien augmenté et de la méthode pénalisée en 2D.

## 14 Modélisation L : pyramides (algorithme version 2)

### 14.1 Caractéristiques du maillage

Le maillage en éléments linéaires est constitué d'hexaèdres, de tétraèdres et de pyramides. La fissure illustrée en bleu sur la Figure 14.1-1 traverse une partie des pyramides et des tétraèdres en leur milieu.

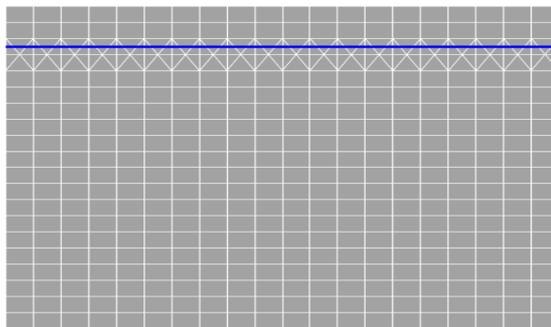


Figure 14.1-1: Maillage d'hexaèdres, de tétraèdres et de pyramides

### 14.2 Fonctionnalités testées

Le frottement est pris en compte et le contact est actif dès la première itération de contraintes actives. Les pressions de contact inconnues sont mises aux nœuds des éléments. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°2. On teste ici les éléments pyramide.

### 14.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la pression de contact au point  $P1$  et  $P2$  de coordonnées respectives  $(0,10,17.)$  et  $(0,10,18.)$ . Ces nœuds sont les sommets de l'arête passant par le point  $P$   $(0,10,17.5)$ .

Identification	Référence	Aster	% différence
Points $P1$ et $P2$	$-9.52844 \cdot 10^{-2}$	$-9.52640 \cdot 10^{-2}$	0.0351

### 14.4 Courbes de comparaison

La [Figure 14.4-1] représente les courbes des pressions de contact le long de l'axe  $Oy$  à  $x=0$  pour les modélisations A et L. On a pris les valeurs en  $z=17$  pour la modélisation M étant donné qu'il n'y a pas de point en  $z=17.5$  comme pour la modélisation A. On remarque tout de même que la courbe de la modélisation L suit bien la courbe de référence obtenue avec le maillage d'hexaèdres.

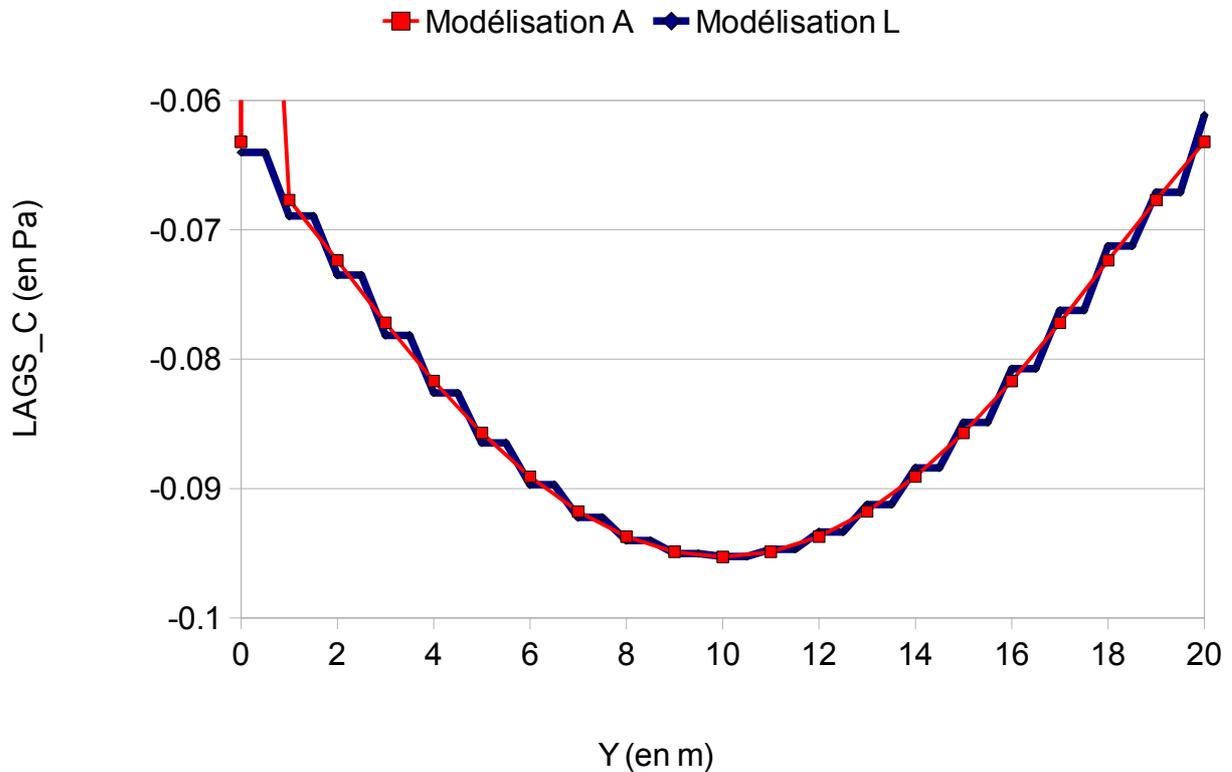


Figure 14.4-1: Comparaison des pressions de contact suivant les modélisations

## 14.5 Commentaires

On retrouve des résultats comparables à ceux de la modélisation A où l'ensemble du maillage de la structure contient des hexaèdres. L'introduction des pyramides dans le maillage au niveau de la surface de contact altère peu les résultats des pressions de contact.