

## SSNV122 - Rotation et traction suivieuse hyper-élastique d'un barreau

---

### Résumé :

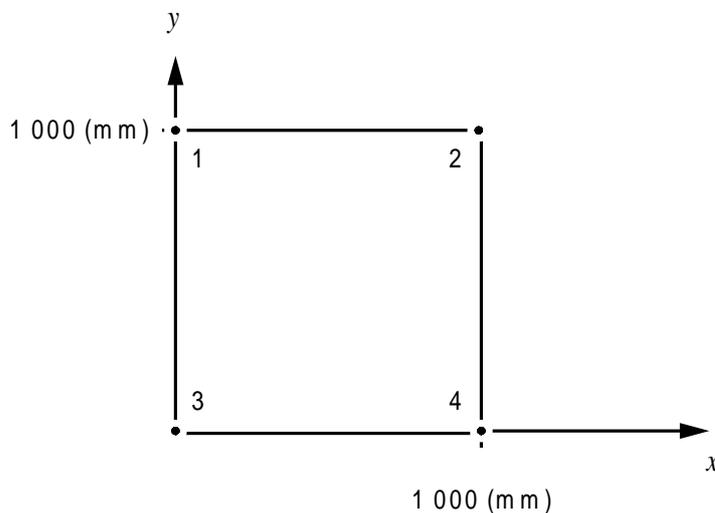
Ce test de mécanique quasi-statique consiste à faire tourner de 90° un barreau parallélépipédique et à le soumettre à une traction importante au moyen de forces suivieuses. On valide ainsi la cinématique des grandes déformations hyper-élastiques (commande `STAT_NON_LINE`, mot-clé `COMP_ELAS`), et donc en particulier les grandes rotations, pour une relation de comportement élastique linéaire, ainsi que la prise en compte de forces suivieuses (commande `STAT_NON_LINE` mot clé `TYPE_CHARGE : 'SUIV'`).

Le barreau est modélisé par un élément volumique (`HEXA8`, modélisation A).

Les résultats obtenus par *Code\_Aster* ne diffèrent pas de la solution théorique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



### 1.2 Propriétés de matériaux

Comportement hyper-élastique de SAINT VENANT - KIRCHHOFF :

$$\mathbf{S} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} + \frac{E}{1+\nu} \mathbf{E}$$

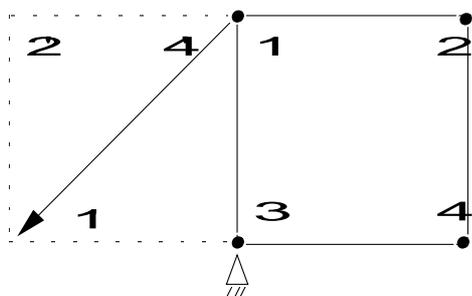
$$E = 200\,000. \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

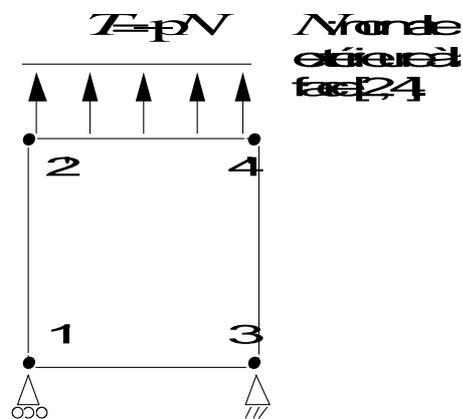
### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le chargement est appliqué en deux temps : tout d'abord, une rotation d'ensemble de la structure, suivie par une traction exercée par des forces suivese.

Rotation (0 < t < 1s)



Traction (1s < t < 2s)



## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Il s'agit d'un problème plan. On peut chercher la solution sous la forme d'une rotation rigide suivie d'une dilatation d'un facteur  $a$  dans une direction et  $b$  dans l'autre :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rotation}} \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traction}} \begin{pmatrix} b(-Y) \\ a X \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{soit } u = \begin{pmatrix} -X & -bY \\ AX & -Y \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Le gradient de la transformation et la déformation de Green-Lagrange sont alors :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } \begin{cases} e_x = \frac{a^2 - 1}{2} \\ e_y = \frac{b^2 - 1}{2} \end{cases}$$

La relation de comportement conduit à un tenseur de contraintes lagrangiennes diagonal (avec  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé) :

$$\begin{aligned} S_{xx} &= (\lambda + 2\mu) e_x + \lambda e_y \\ S_{yy} &= \lambda e_x + (\lambda + 2\mu) e_y \\ S_{zz} &= \lambda e_x + \lambda e_y \end{aligned} \quad \text{où } \begin{cases} \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

On en déduit le tenseur des contraintes de Cauchy, lui aussi diagonal :

$$\sigma_x = \frac{b}{a} S_y \quad \sigma_y = \frac{a}{b} S_x \quad \sigma_z = \frac{1}{ab} S_z$$

Enfin les conditions aux limites s'écrivent :

$$\sigma_x = 0 \quad (\text{bord libre}) \quad \sigma_y = -p \quad (\text{traction})$$

On peut en outre calculer les efforts exercés sur les faces :

$$\begin{aligned} [1, 3] \quad F_y &= -\sigma_y b S_{o[1,3]} \\ [3, 4] \quad F_x &= 0 \\ [1, 2, 3, 4] \quad F_z &= \begin{cases} -\sigma_z ab S_{o[1,2,3,4]} & \text{sur le côté inférieur de la face} \\ \sigma_z ab S_{o[1,2,3,4]} & \text{sur le côté supérieur de la face} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $S_{o[ ]}$  représentent les surfaces initiales des faces.

## 2.2 Résultats de référence

On adopte comme résultats de référence les déplacements, les déformations de Grenn-Lagrange, les contraintes de Cauchy et les forces exercées sur les faces  $[1,3]$ ,  $[3,4]$  et  $[1,2,3,4]$  en fin de chargement ( $t = 2s$ ).

On cherche  $p$  tel que la dilatation  $a = 1,1$

$$\text{soit } p = -26610.3 \text{ MPa} .$$

La dilatation  $b$  et les déplacements sont alors :

$$b = 0.9539 \quad e_x = 0.105 \quad e_y = -0.045$$

Les contraintes de Cauchy valent :

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 26610.3 \text{ MPa} \quad \sigma_z = 6597.6 \text{ MPa}$$

Enfin, les forces exercées sont :

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= -25384 S_{o[1,3]} \text{ N} \\ F_z &= -6.9228 \cdot 10^9 \text{ N} \quad (\text{côté inférieur}) \end{aligned}$$

## 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

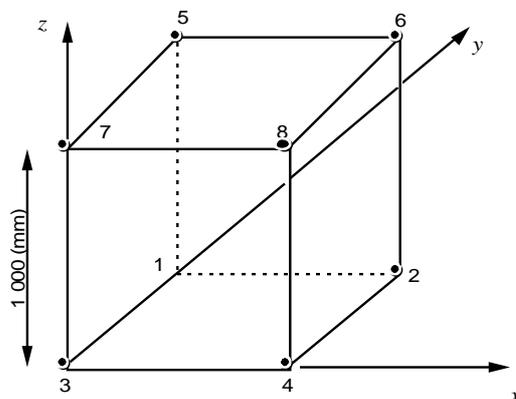
## 2.4 Références bibliographiques

- 1) Eric LORENTZ "Une relation de comportement hyperélastique non linéaire" Note interne EDF/DER HI-74/95/011/0

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille HEXA 8  
1 maille QUAD4



- phase de rotation rigide  $0 \leq t \leq 1$  s
  - [3,7]  $DX = 0$   $DY = 0$   $DZ = 0$
  - [1,5]  $DX = -1000 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$   $DY = -1000\left(1 - \cos\frac{\pi t}{2}\right)$   $DZ = 0$
  - [2,6]  $DZ = 0$
  - [4,8]  $DZ = 0$
- phase de traction :  $1s \leq t \leq 2s$ 
  - conditions aux limites (TYPE\_CHARGE : 'DIDI')
    - [3,7]  $\Delta DX = 0$   $\Delta DY = 0$   $DZ = 0$
    - [1,5]  $\Delta DY = 0$   $DZ = 0$
    - [2,6]  $DZ = 0$
    - [4,8]  $DZ = 0$
  - chargement : pression (négative) sur la face [2,4,8,6]  
(PRES\_REP) : maille [2,4,8,6] (QUAD4) :  $PRES = -26610.3(t-1)$ .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8      Nombre de mailles : 2  
1 HEXA8  
1 QUAD4

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs sont testées en fin de chargement ( $t = 2s$ )

Identification	Référence	Aster	% différence
Déplacement DX (NO2)	-1953.94	-1953.92	0
Déplacement DY (NO2)	100.	100.	0
Contraintes SIXX (PG1)	0	$8.10^{-10}$	

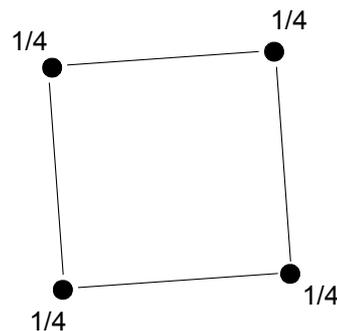
Contraintes SIYY (PG1)	26610.3	26610.3	0
Contraintes SIZZ (PG1)	6597.6	6597.6	0
Contraintes SIXY (PG1)	0	$\square 10^{-26}$	
Contraintes SIXZ (PG1)	0	$\square 10^{-11}$	
Contraintes SIYZ (PG1)	0	$\square 10^{-10}$	
<hr/>			
Déformation EPXX (PG1)	0.105	0.105	0
Déformation EPHY (PG1)	-0.045	-0.045	0
Déformation EPZZ (PG1)	0	$\square 10^{-16}$	
Déformation EPXY (PG1)	0	$\square 10^{-14}$	
Déformation EPXZ (PG1)	0	$\square 10^{-14}$	
Déformation EPYZ (PG1)	0	$\square 10^{-16}$	
<hr/>			
Réaction nodale DX (NO3)	0	$\square 10^{-3}$	
Réaction nodale DY (NO3)	$-6.3462 \cdot 10^9$	$-6.3461 \cdot 10^9$	-0.001
Réaction nodale DZ (NO3)	$-1.7307 \cdot 10^9$	$-1.7307 \cdot 10^9$	0.004

## 3.4 Remarques

### Calcul de la force nodale :

La force appliquée  $F$  sur une face décrite par une maille linéaire se répartit par :

$$F_{noeud} = \frac{1}{4} F$$



## 4 Synthèse des résultats

---

Il apparaît à l'issue de ce test que la solution numérique coïncide remarquablement avec la solution analytique. On remarquera cependant que la forte non linéarité due aux grandes rotations nécessite une discrétisation en temps relativement fine, sans être pénalisante sur la précision puisque, contrairement à une relation de comportement incrémentale, les erreurs ne se cumulent pas d'un pas de temps sur l'autre.