

## SSNP159 – Energie élastique en grandes déformations plastiques d'un barreau en traction

### Résumé :

Ce test mécanique quasi-statique consiste soumettre à une traction simple un barreau de section rectangulaire ( 3D ) ou cylindrique ( 2D axisymétrique). L'objet est de valider le calcul des énergies élastiques dans trois formalismes de déformation : 'PETIT', 'GDEF\_LOG' et 'SIMO\_MIEHE', avec la commande `POST_ELEM`.

Le barreau est modélisé par un élément volumique (HEXA20, modélisation A) ou quadrangulaire (QUAD4, pour une modélisation axisymétrique, modélisation B).

La solution est analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

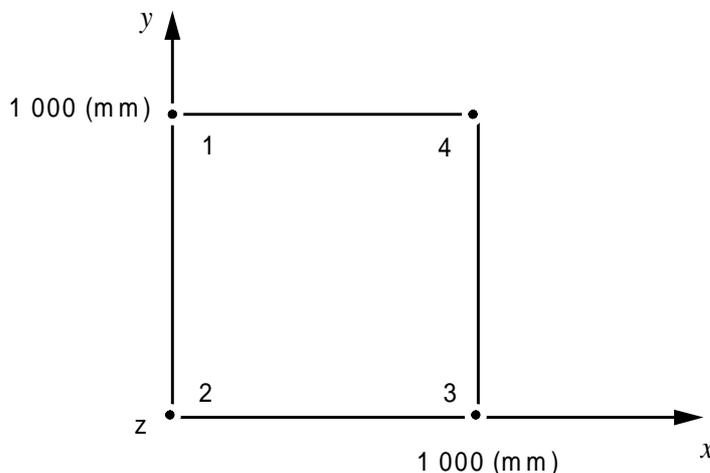


Figure 1.1-1: Géométrie de référence

### 1.2 Propriétés du matériau

Le matériau obéit à une loi de comportement en grandes déformations plastique avec écrouissage isotrope linéaire.

La courbe de traction est donnée dans le plan déformation logarithmique - contrainte rationnelle.

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} \cdot \frac{l}{l_0}$$

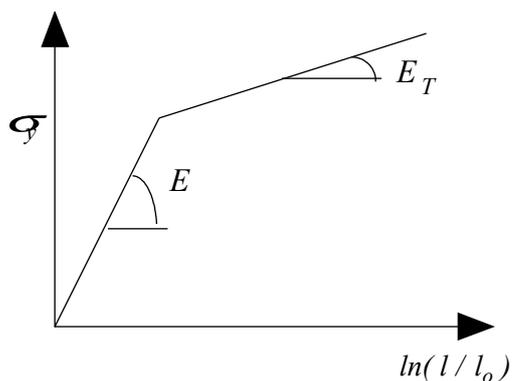


Figure 1.2-1: Courbe de traction

$$\begin{aligned} \nu &= 0,3 \\ E &= 200000 \text{ MPa} \\ E_T &= 2000 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 1000 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$l_0$  et  $l$  sont, respectivement, la longueur initiale et la longueur actuelle de la partie utile de l'éprouvette.

$S_0$  et  $S$  sont, respectivement, la surface initiale et actuelle.

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le barreau, de longueur initiale  $l_0$ , bloqué dans la direction  $Ox$  sur la face [1,2] à un déplacement mécanique de traction  $u^{meca}$  variant linéairement en temps sur la face [3,4] :

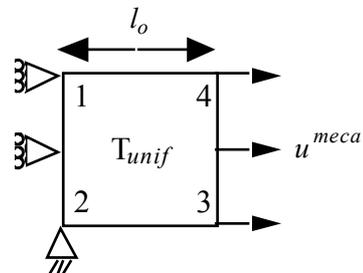


Figure 1.3-1: Conditions limites et chargement

## 2 Solution de référence

La solution analytique de SIMO\_MIEHE permet de définir le chargement à appliquer pour obtenir une contrainte de Kirchhoff de 1500MPa . Ce chargement est ensuite appliqué aux autres modèles.

### 2.1 Résultat générique aux formalismes

Pour un essai de traction uniaxial suivant la direction  $x$  , les tenseurs de contrainte de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  et de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  sont de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Les tenseurs gradients de la transformation  $\mathbf{F}$  et  $\bar{\mathbf{F}}$  s'expriment :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F_y & 0 \\ 0 & 0 & F_y \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} = \begin{bmatrix} \bar{F} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{F}_y & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F}_y \end{bmatrix}$$

Le déplacement vérifie :

$$F = 1 + \frac{u^{meca}}{l_0}$$

La fonction d'écroissage isotrope linéaire s'écrit :

$$R(p) = \frac{E E_T}{E - E_T}$$

### 2.2 Résultats pour Simo\_Miehe

Le tenseur isochore de déformations plastiques  $\mathbf{G}^P$  est de la forme :

$$\mathbf{G}^P = \begin{bmatrix} G^P & 0 & 0 \\ 0 & G_y^P & 0 \\ 0 & 0 & G_y^P \end{bmatrix}, \text{ avec } G_y^P = \frac{1}{\sqrt{G^P}} \text{ car } \det(\mathbf{G}^P) = 1$$

La loi de comportement (partie hydrostatique) s'écrit :

$$tr(\boldsymbol{\tau}) = \frac{3K}{2} (J^2 - 1) \Rightarrow J^2 = \frac{2\tau}{3K} + 1$$

La fonction seuil de plasticité s'écrit :

$$f = 0 = \tau - R(p) - \sigma_y \Rightarrow p = \frac{E - E_T}{E E_T} (\tau - \sigma_y)$$

La loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\bar{\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{G}}^P \cdot \bar{\mathbf{F}}^T = -3 \dot{p} \frac{1}{\tau_{eq}} dev(\boldsymbol{\tau}) \cdot (\bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{G}^P \cdot \bar{\mathbf{F}}^T)$$

En prenant la première composante, on obtient :

$$\frac{\dot{G}^P}{G^P} = -2 \dot{p} \Rightarrow G^P = e^{-2p} \text{ car } G^P(0) = 1$$

Pour conclure le problème, on utilise la première composante de la partie déviatorique de la contrainte :

$$\text{dev}(\boldsymbol{\tau}) = \mu \text{dev}(\bar{\mathbf{b}}^e) \Rightarrow \tau = \mu (\bar{F}^2 G^P - \bar{F}_y^2 G_y^P) \Rightarrow \bar{F}^3 - \bar{F} \frac{\tau}{\mu G^P} - \frac{1}{(G^P)^{(3/2)}} = 0 ,$$

$$\text{car } \bar{\mathbf{b}}^e = \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{G}^P \cdot \bar{\mathbf{F}}^T$$

L'énergie élastique s'écrit alors :

$$\psi_{SM}^{elas} = \frac{K}{2} \left[ \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right] + \frac{\mu}{2} [\text{tr } \bar{\mathbf{b}}^e - 3] = \frac{K}{2} \left[ \frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right] + \frac{\mu}{2} \left[ \bar{F}^2 G^P + \frac{2}{\bar{F} \sqrt{G^P}} - 3 \right]$$

Pour une contrainte de Kirchhoff de 1500MPa, peut alors successivement déterminer :

$$\begin{aligned} J &= 1,003 \\ \sigma &= 1495 \text{ MPa} \\ p &= 0,2475 \\ G^P &= 0,6096 \\ \bar{F} &= 1,289 \\ F &= 1,290 \\ u^{meca} &= 290 \text{ mm} \\ \psi_{SM}^{elas} &= 5,63 \text{ MPa au point matériel.} \end{aligned}$$

Le déplacement appliqué pour les deux modélisations et les 3 formalismes sera donc  $u^{meca} = 290 \text{ mm}$ .

## 2.3 Résultats pour GDEF\_LOG

La déformation logarithmique s'écrit :

$$\mathbf{E}_{\log} = \frac{1}{2} \ln[\mathbf{C}] = \frac{1}{2} \ln[\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \ln F & 0 & 0 \\ 0 & \ln F_y & 0 \\ 0 & 0 & \ln F_y \end{bmatrix}$$

Le quart supérieur gauche du projecteur lagrangien s'en déduit, en notation de Voigt :

$$\mathbf{P} = 2 \frac{\partial \mathbf{E}_{\log}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{F^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{F_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{F_y^2} \end{bmatrix}$$

Et du fait de l'expression de la deuxième contrainte de Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} : \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T} \Rightarrow \mathbf{T} = \boldsymbol{\tau}$$

La loi de comportement s'écrit :

$$\mathbf{T} = E (\ln F - p)$$

Du fait du seuil de plasticité :

$$f=0=T-R(p)-\sigma_y \Rightarrow p = \frac{E-E_T}{E E_T} (T-\sigma_y) = \frac{E \ln F - \sigma_y}{E + \frac{E E_T}{E-E_T}}$$

L'énergie élastique de ce formalisme s'écrit donc :

$$\psi_{\log}^{elas} = \frac{1}{2} \frac{T^2}{E}$$

Du déplacement imposé  $u^{meca} = 290 \text{ mm}$ , on déduit :

$$\begin{aligned} F &= 1,290 \\ \ln F &= 0,255 \\ p &= 0,2475 \\ T &= 1500 \text{ MPa} \\ \sigma &= 1495 \text{ MPa} \\ \psi_{\log}^{elas} &= 5,625 \text{ MPa} \text{ au point matériel.} \end{aligned}$$

## 2.4 Résultats en petites déformations

En petites déformations, le résultat est classique.

Déformation axiale :

$$\varepsilon_x = \frac{u^{meca}}{l_0}$$

Comportement :

$$\sigma = E (\varepsilon_x - p)$$

Fonction seuil :

$$\sigma - R(p) - \sigma_y = 0$$

D'où :

$$p = \frac{E \varepsilon_x - \sigma_y}{E + \frac{E E_T}{E-E_T}}$$

$$\sigma = E (\varepsilon_x - p)$$

Energie élastique :

$$\psi_{HPP}^{elas} = \frac{\sigma^2}{2 E}$$

Du déplacement imposé  $u^{meca} = 290 \text{ mm}$ , on déduit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 0,029 \\ p &= 0,281 \\ \sigma &= 1570 \text{ MPa} \\ \psi_{\log}^{elas} &= 6,16 \text{ MPa} \text{ au point matériel.} \end{aligned}$$

## 2.5 Tests effectués

Pour chacun des formalismes et chacune des modélisations, on teste les valeurs du déplacement imposé, de la contrainte de Cauchy  $\sigma$ , de la déformation plastique cumulée  $p$  et de l'énergie élastique.

Attention, l'énergie élastique testée est la valeur pour le barreau (pas du point matériel). Pour la modélisation axisymétrique, il faut donc multiplier la valeur de l'énergie élastique du point matériel par

$$\frac{\pi R^2}{2\pi} .$$

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille HEXA20  
1 maille QUAD8

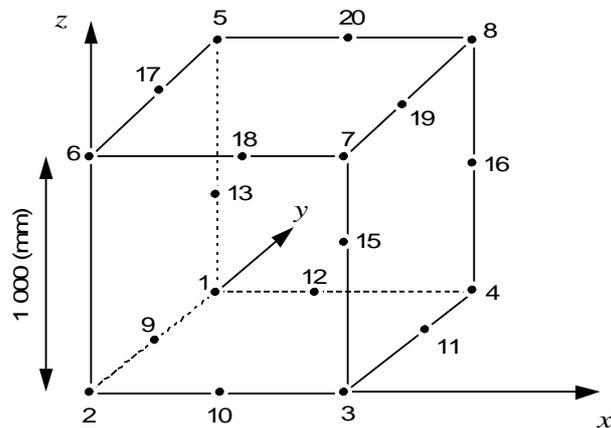


Figure 3.1-1: Maillage de la modélisation A

Conditions aux limites :

$N2$  :  $U_x=U_y=U_z=0$        $N9, N13, N14, N5, N17$  :  $U_x=0$   
 $N1$  :  $U_x=U_z=0$   
 $N6$  :  $U_x=U_y=0$

Tableau 3.1-1: Conditions limites modélisation A

Charge : Traction sur la face [3,4,8,7,11,16,19,15]

Le nombre total d'incrément est de 20 (20 incréments entre  $t=0s$  et  $2s$ )

La convergence est réalisée si le résidu RESI\_GLOB\_RELA est inférieur ou égal à  $10^{-6}$ .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles : 2

1 HEXA20

1 QUAD8

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence			Tolérance
	SIMO_MIEHE	GDEF_LOG	HPP	
$t=2$ Déplacement $DX$ ( $N8$ )	290	290	290	1.00%
$t=2$ Contraintes $SIGXX$ ( $PG1$ )	1495	1495	1570	1.00%
$t=2$ Variable $P$ $VARI$ ( $PG1$ )	0,2475	0,2475	0,282	1.50%
$t=2$ ENER ELAS, TOTALE	5.63E+009	5,625E9	6,16E9	5.00%

Tableau 3.3-1: Résultats de la modélisation A

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 2D axisymétrique : 1 maille QUAD4  
1 maille SEG2

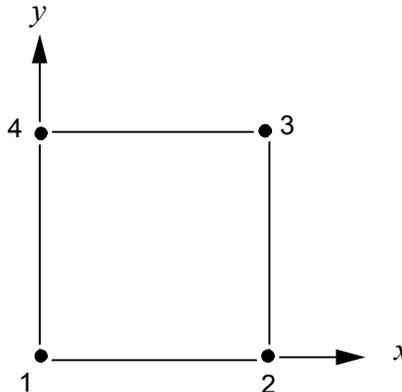


Figure 4.1-1: Maillage de la modélisation B

Conditions aux limites :

$$N1 : U_Y = 0$$

$$N2 : U_Y = 0$$

Tableau 4.1-1: Conditions limites de la modélisation B

Chargement :

Traction sur la face [3,4] (maille SEG2)

Le nombre total d'incrément est de 20 (20 incréments entre  $t=0s$  et  $2s$ )

La convergence est réalisée si le résidu RESI\_GLOB\_RELA est inférieur ou égal à  $10^{-6}$ .

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles : 2

1 QUAD4

1 SEG2

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence			Tolérance
	SIMO_MIEHE	GDEF_LOG	HPP	
$t=2$ Déplacement $DX$ ( N8 )	290	290	290	1.00%
$t=2$ Contraintes $SIGXX$ ( PGI )	1495	1495	1570	1.00%
$t=2$ Variable $p$ $VARI$ ( PGI )	0,2475	0,2475	0,282	1.50%
$t=2$ ENER ELAS, TOTALE	2.82E+009	2,81 E9	3,08 E9	5.00%

Tableau 4.3-1: Résultats de la modélisation B

## 5 Synthèse des résultats

---

Les résultats trouvés en terme d'énergie élastique avec *Code\_Aster* sont très satisfaisants en petites déformations et en déformations logarithmiques, avec des écarts à l'analytique inférieurs à 0,1%, et corrects en déformation de SIMO\_MIEHE, avec un écart à l'analytique de 3% environ, dû au terme  $tr(\bar{\mathbf{b}}^e)$ , sur lequel la cinquième décimale joue un rôle significatif.