

---

## SSNL502 - Poutre en flambement

---

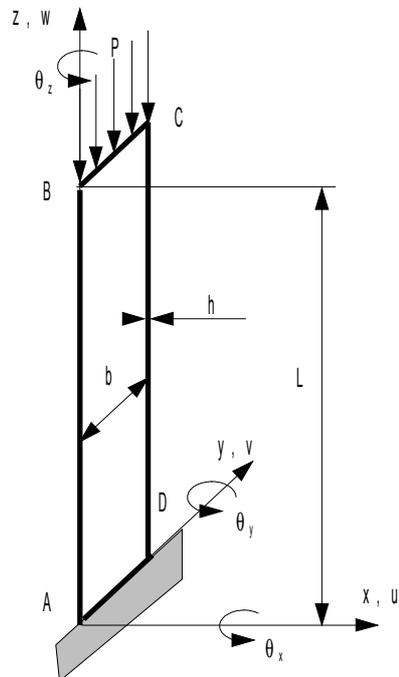
### Résumé :

Ce test représente un calcul de stabilité d'une poutre console soumise à un effort de compression à une extrémité. Il permet de valider les modélisations éléments finis COQUE\_3D avec les mailles TRIA7 et QUAD9, les modélisations POU\_D\_T\_GD et POU\_D\_TGM avec les mailles SEG2 dans le domaine quasi-statique non-linéaire en grands déplacements et en grandes rotations en présence d'instabilité (Flambement d'Euler).

Les déplacements et les moments obtenus sont comparés à une solution de référence analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Longueur :  $L = 0.5 \text{ m}$   
 Largeur :  $b = 0.075 \text{ m}$   
 Epaisseur :  $h = 0.0045 \text{ m}$   
 Moment d'inertie  $I_y = 5.7 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 (bh^3/12)$

### 1.2 Propriétés du matériau

Les propriétés du matériau constituant la plaque sont :

$E = 2.10^{11} \text{ Pa}$                       Module d'Young  
 $\nu = 0.3$                                   Coefficient de poisson

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites : Côté  $AD$  encasté

On cherche les états successifs d'équilibre sous le chargement imposé sur le côté  $BC$  :

$p(t) = p_{cr} t$   
 avec  $t$  pseudo\_temps  
 $p_{cr}$  charge critique d'Euler

La charge appliquée correspond à la charge critique d'Euler  $p_{cr} = \frac{\pi EI}{4L^2} = 1124,21 \text{ N}$

### 1.4 Conditions initiales

Sans objet

## 2 Solution de référence

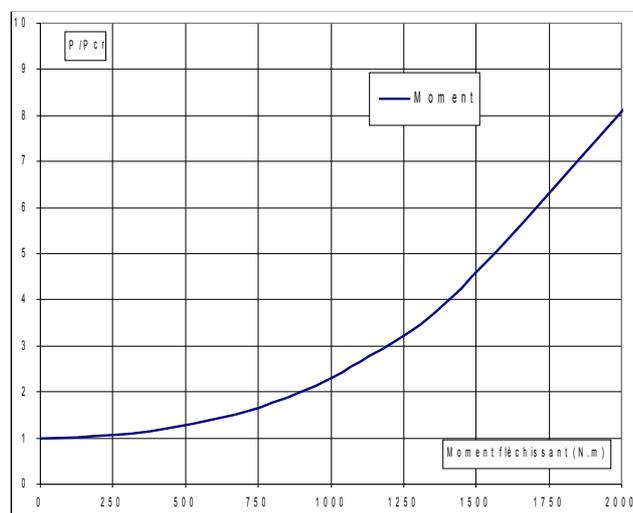
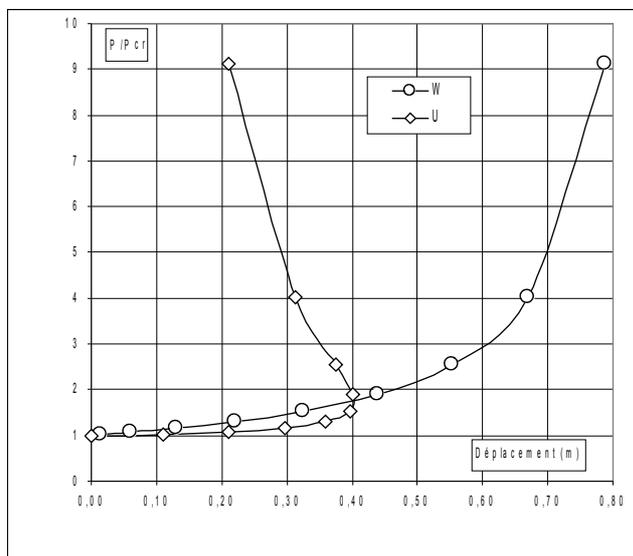
### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution du problème dit de l' "élastique" est présentée en [bib1] en faisant l'hypothèse de non extension de l'axe moyen. La solution analytique est obtenue en considérant des intégrales elliptiques.

### 2.2 Résultats de référence

Les résultats de référence retenus pour les vérifications sont indiqués en caractères **gras** dans le tableau ci-dessous. Les déplacements sont définis dans le repère de définition de la géométrie [§1.1].

$P/P_{cr}$	$u_B/L$	$w_B/L$	$\theta^\circ$	$M_A L/EI$	Charge $P$ (N)	$u_B$ (m)	$w_B$ (m)	$M_A$ (N.M)
<b>1,015</b>	<b>0,220</b>	<b>0,030</b>	<b>20°</b>	<b>0,56</b>	<b>1141.07</b>	<b>0.1100</b>	<b>0.0150</b>	<b>127.58</b>
1,063	0,422	0,119	40°	1,09	1195.03	0.2110	0.0595	248.32
<b>1,152</b>	<b>0,593</b>	<b>0,259</b>	<b>60°</b>	<b>1,67</b>	<b>1295.09</b>	<b>0.2965</b>	<b>0.1295</b>	<b>380.45</b>
1,293	0,719	0,440	80°	2,28	1453.60	0.3595	0.2200	519.41
<b>1,518</b>	<b>0,792</b>	<b>0,651</b>	<b>100°</b>	<b>2,96</b>	<b>1706.55</b>	<b>0.3960</b>	<b>0.3255</b>	<b>674.33</b>
1,884	0,803	0,877	120°	3,73	2118.01	0.4015	0.4385	849.74
<b>2,541</b>	<b>0,750</b>	<b>1,107</b>	<b>140°</b>	<b>4,70</b>	<b>2856.62</b>	<b>0.3750</b>	<b>0.5535</b>	<b>1070.72</b>
4,029	0,625	1,340	160°	6,20	4529.44	0.3125	0.6700	1412.44
<b>9,116</b>	<b>0,421</b>	<b>1,577</b>	<b>176°</b>	<b>9,44</b>	<b>10248.29</b>	<b>0.2105</b>	<b>0.7885</b>	<b>2150.55</b>



### 2.3 Incertitudes sur la solution

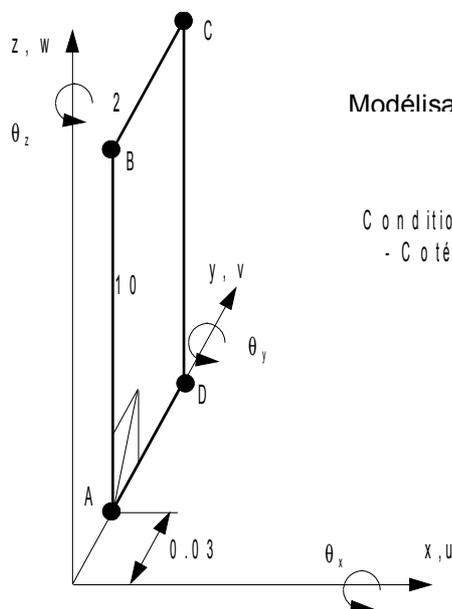
Solution analytique

### 2.4 Références bibliographiques

- 1.S.P. TIMOSHENKO, J.M. GERE : Théorie de la stabilité élastique, deuxième édition, DUNOD 1966.
- 2.J.L. BATOZ : Grands déplacements et grandes rotations de poutres minces élastiques, Département de génie mécanique Université de Technologie de Compiègne 1981.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation COQUE 3D (TRIA7)

Conditions aux limites :

- Côté AD :  $u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145  
Nombre de mailles et type : 40 TRIA7

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

La stratégie de calcul utilisée se décompose en deux étapes :

- **Chargement imposé** : on impose une charge perturbatrice de  $1/1000$  de la charge critique suivant  $X$  pour faire apparaître le mode de flambement. Cette charge est appliquée pour  $P/P_{cr} = 0.98$  et jusqu'à  $P/P_{cr} = 1.015$ .
- **Déplacement imposé** : au delà de 1.01, la structure est devenue très souple, on impose un accroissement de déplacement  $DZ$  (option `DDL_IMPO` dans `STAT_NON_LINE`) pour déterminer le comportement post-flambement.

L'utilisation de la technique de longueur d'arc rend difficile la définition de la valeur de référence à introduire dans la commande `TEST_RESU`, puisque ces valeurs ne peuvent pas être imposées. Pour définir les valeurs de référence, nous avons recherché les valeurs de  $DZ$  les plus proches possibles de celles listées dans le tableau du [§2.2] et nous avons reporté les valeurs du paramètre de pilotage et de  $DX$  que l'on devait obtenir pour les valeurs de  $DZ$  en question.

DZ	Identification	Instants	Référence
-0.0150	DX	1.04532	0.1100
	DZ	1.04532	-0.0150
	ETA_PILOTAGE	1.04532	1.015
-0.0595	DX	1.09778	0.2110
	DZ	1.09778	-0.0595
	ETA_PILOTAGE	1.09778	1.063

---

---

-0.22	DX	1.20824	0.3595
	DZ	1.20824	-0.22
	ETA_PILOTAGE	1.20824	1.293

---

---

-0.3255	DX	1.26646	0.396
	DZ	1.26646	-0.3255
	ETA_PILOTAGE	1.26646	1.518

---

---

-0.5535	DX	1.38521	0.375
	DZ	1.38521	-0.5535
	ETA_PILOTAGE	1.38521	2.541

---

---

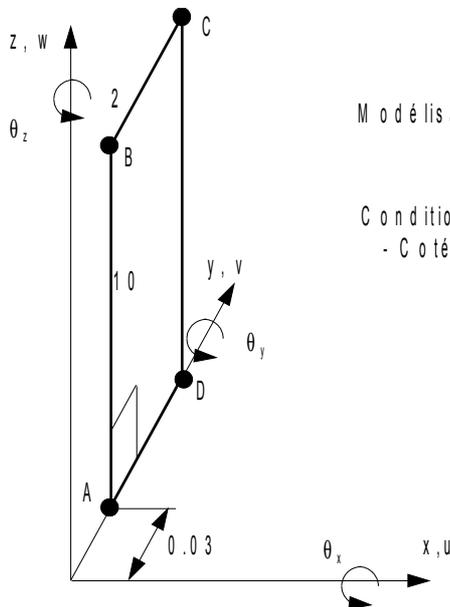
-0.67	DX	1.46121	0.3125
	DZ	1.46121	-0.67
	ETA_PILOTAGE	1.46121	4.029

---

---

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation COQUE\_3D (QUAD9)

Conditions aux limites :

- Côté AD :  $u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 105  
Nombre de mailles et type : 20 QUAD9

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

La stratégie de calcul utilisée se décompose en deux étapes :

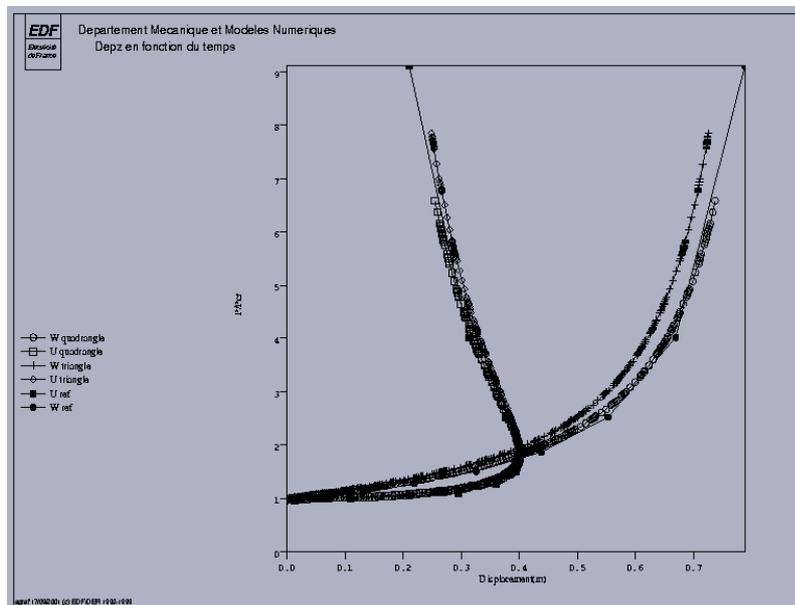
- **Chargement imposé** : on impose une charge perturbatrice de  $1/1000$  de la charge critique suivant  $X$  pour faire apparaître le mode de flambement. Cette charge est appliquée pour  $P/P_{cr}=0.98$  et jusqu'à  $P/P_{cr}=1.015$ .
- **Déplacement imposé** : au delà de 1.01, la structure est devenue très souple, on impose un accroissement de déplacement DZ (option DDL\_IMPO dans STAT\_NON\_LINE) pour déterminer le comportement post-flambement.

L'utilisation de la technique de longueur d'arc rend difficile la définition de la valeur de référence à introduire dans la commande TEST\_RESU, puisque ces valeurs ne peuvent pas être imposées. Pour définir les valeurs de référence, nous avons recherché les valeurs de DZ les plus proches possibles de celles listées dans le tableau du [§2.2] et nous avons reporté les valeurs du paramètre de pilotage et de DX que l'on devait obtenir pour les valeurs de DZ en question.

DZ	Identification	Instants	Référence
-0.0150	DX	1.03356	0.1100
	DZ	1.03356	-0.0150
	ETA_PILOTAGE	1.03356	1.015
-0.0595	DX	1.08921	0.2110

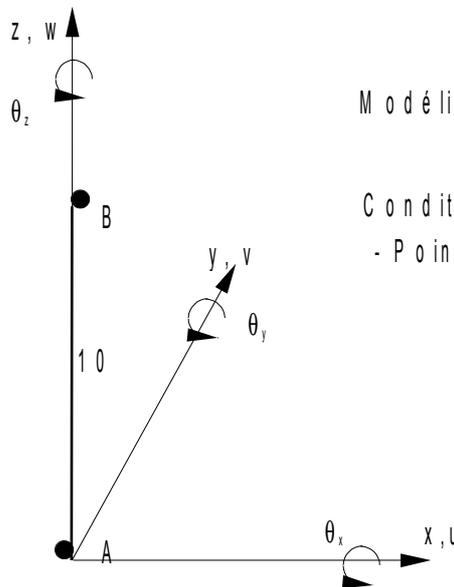
	DZ	1.08921	-0.0595
	ETA_PILOTAGE	1.08921	1.063
-0.22	DX	1.20259	0.3595
	DZ	1.20259	-0.22
	ETA_PILOTAGE	1.20259	1.293
-0.3255	DX	1.25521	0.396
	DZ	1.25521	-0.3255
	ETA_PILOTAGE	1.25521	1.518
-0.5535	DX	1.37521	0.375
	DZ	1.37521	-0.5535
	ETA_PILOTAGE	1.37521	2.541
-0.67	DX	1.45321	0.3125
	DZ	1.45321	-0.67
	ETA_PILOTAGE	1.45321	4.029

## 5 Résultats graphiques des modélisations A et B



## 6 Modélisation C

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation P O U \_ D \_ T \_ G D

Conditions aux limites

- Point A :  $u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11  
Nombre de mailles et type : 10 SEG2

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

#### 6.3.1 Valeurs testées

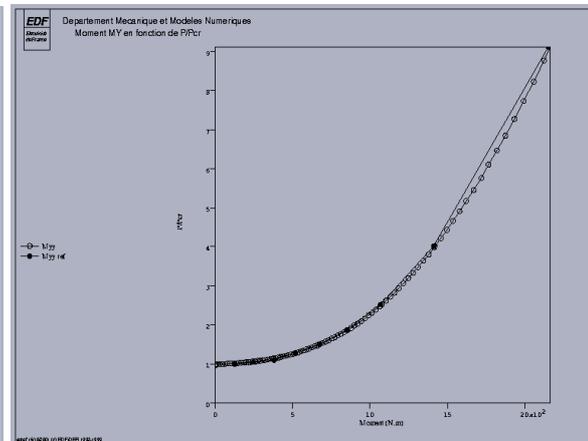
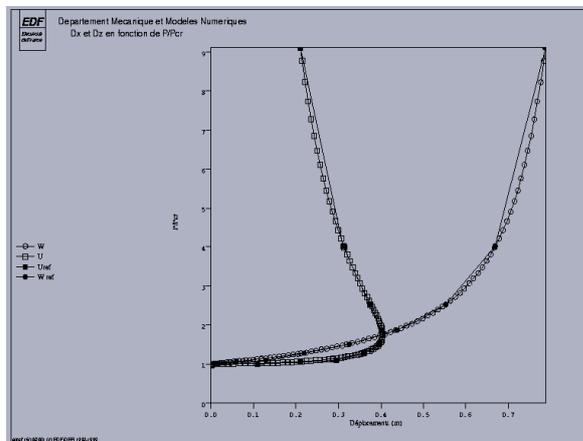
La stratégie de calcul utilisée se décompose en deux étapes :

- **Chargement imposé** : on impose une charge perturbatrice de  $1/1000$  de la charge critique suivant  $X$  pour faire apparaître le mode de flambement. Cette charge est appliquée pour  $P/P_{cr}=0.98$  et jusqu'à  $P/P_{cr}=1.015$ .
- **Déplacement imposé** : au delà de 1.01, la structure est devenue très souple, on impose un accroissement de déplacement DZ (option DDL\_IMPO dans STAT\_NON\_LINE) pour déterminer le comportement post-flambement.
- Les résultats sont en bonne adéquation avec la solution de référence à partir de  $ETA\_PILOTAGE = 1.293$ . Avant cette valeur, la charge perturbatrice (nécessaire pour obtenir le flambage) dégrade la solution, et les écarts avec les solution analytique sont importants (jusqu'à 80%). Les valeurs correspondantes font l'objet de tests de non régression. Mais cet écart est uniquement lié à la charge perturbatrice, puisque en augmentant le chargement vertical, on retrouve la bonne solution.

DZ	Identification	Instants	Référence
-0.22	DX	1.18684	0.3595
	DZ	1.18684	-0.22
	ETA_PILOTAGE	1.18684	1.293

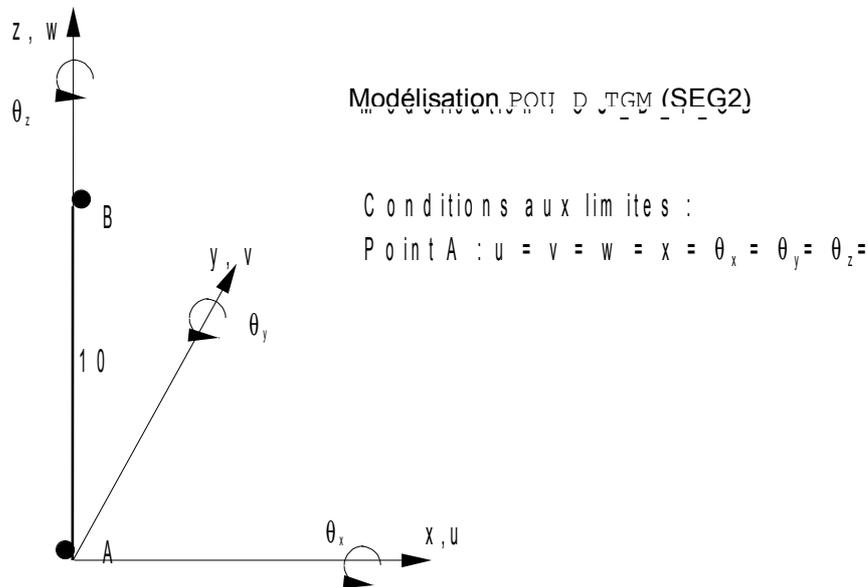
	MYZ	1.18684	519.41
-0.3255	DX	1.24521	0.396
	DZ	1.24521	-0.3255
	ETA PILOTAGE	1.24521	1.518
	MYZ	1.24521	674.3
-0.4385	DX	1.30521	0.4015
	DZ	1.30521	-0.4385
	ETA PILOTAGE	1.30521	1.884
	MYZ	1.30521	849.74

## 6.4 Résultats graphiques de la modélisation C



## 7 Modélisation D

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation



### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 11

Nombre de mailles et type : 10 SEG2 uniformément réparties dans la longueur

### 7.3 Caractéristiques du maillage de la section transverse (fibres)

Nombre de fibres : 50 (5 dans la largeur et 10 dans l'épaisseur)

Nombre de mailles et type : 50 QUA4

### 7.4 Grandeurs testées et résultats

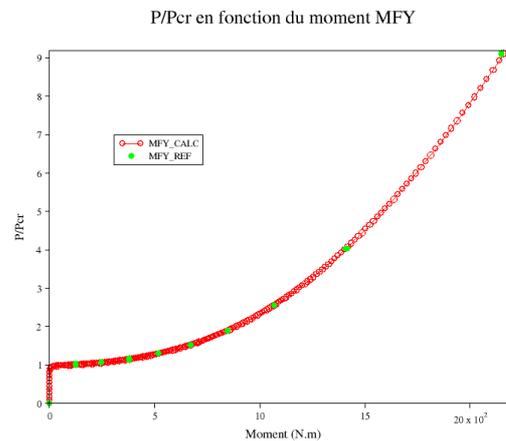
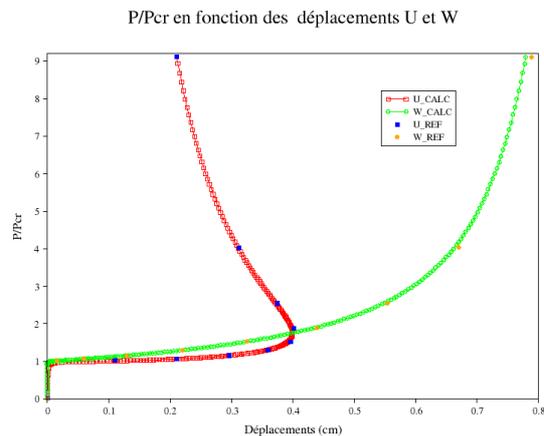
#### 7.4.1 Valeurs testées

La stratégie de calcul utilisée se décompose en deux étapes :

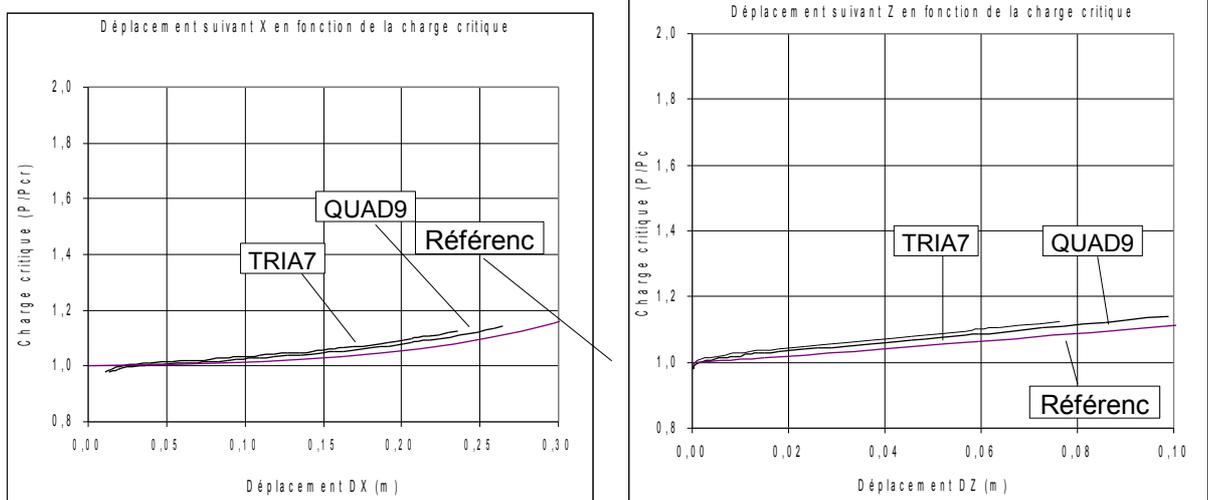
- **Chargement imposé** : On a pré-déformé la structure suivant son premier mode de flambement et avec une très faible amplitude devant la longueur de la poutre (de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-4} m$ ). On applique le chargement jusqu'à  $P/P_{cr} = 0.95$ .
- **Déplacement imposé** : au delà de 0.95, la structure commence à subir un fort déplacement latéral pour une très faible augmentation du chargement, on pilote donc la structure en longueur d'arc pour déterminer le comportement post-flambement.
- Les résultats sont en bonne adéquation avec la solution de référence à partir de  $ETA\_PILOTAGE = 1.152$ . Avant cette valeur, la pré-déformation (nécessaire pour obtenir le flambage) dégrade la solution, et les écarts avec les solutions analytiques sont importants (jusqu'à 60%). Les valeurs correspondantes font l'objet de tests de non régression. Mais cet écart est uniquement lié à la prédéformation initiale (arbitraire), puisqu'en augmentant le chargement vertical, on retrouve la bonne solution.

DZ	Identification	Instants	Référence
-0.22	DX	3.8	0.3595
	DZ	3.8	-0.22
	ETA_PILOTAGE	3.8	1.293
	MYX	3.8	519.41
-0.3255	DX	4.56	0.396
	DZ	4.56	-0.3255
	ETA_PILOTAGE	4.56	1.518
	MYX	4.56	674.3
-0.4385	DX	5.358	0.4015
	DZ	5.358	-0.4385
	ETA_PILOTAGE	5.358	1.884
	MYX	5.358	849.74

## 7.4.2 Résultats graphiques de la modélisation D



## 8 Synthèse des résultats



La charge critique est bien détectée. Les deux premiers résultats correspondant aux charges  $P/P_{cr}=1.015$  et  $1.063$  sont corrects, l'erreur maximum est de 3.5% pour la maille TRIA7 et de 2.2% pour la maille QUAD9. La maille QUAD9 donne de meilleurs résultats.

Si l'on poursuit les calculs avec les éléments de coques, la maille QUAD9 continue de donner de meilleurs résultats. Dans la zone où les déplacements en  $DZ$  sont les plus importants, l'erreur commise sur la charge atteint 9% sur les quadrangles et va jusqu'à 30% sur les triangles. Les erreurs s'accroissent dans cette région du fait des pentes des courbes.

Le coefficient de correction du cisaillement transverse  $A_{CIS}$  a été mis à 0.833, correspondant aux coques épaisses. La valeur ( $9000 = 10^6 \times H/L$ ) qui aurait dû être prise en compte ne permet pas d'effectuer les calculs. Elle introduit un mauvais conditionnement des matrices de rigidité en accroissant leurs disparités.

La solution poutre du code, que ce soit la modélisation  $POU\_D\_T\_GD$  ou  $POU\_D\_TGM$ , fournit de très bons résultats par rapport à la solution analytique de référence. Cependant, les temps de calcul sont différents, la modélisation  $POU\_D\_T\_GD$  qui est géométriquement exacte conduit à un temps de calcul presque 40% inférieur par rapport à la modélisation  $POU\_D\_TGM$ . En effet la déformation 'PETIT\_REAC' utilisée pour le modèle multi-fibres n'est qu'une approximation des grands déplacements et surtout des grandes rotations, elle nécessite de faire de petits incréments de chargement. En contrepartie, il faut rappeler que l'on est capable de traiter des comportements autres qu'élastique avec  $POU\_D\_TGM$ .