TTNL101 – Source thermique non-linéaire dans un barreau

Résumé :

Ce test vérifie le calcul thermique en présence d'un chargement de source non-linéaire, dépendant de la température.

La solution de référence est analytique et variable en temps et en espace. La pièce considérée dans les deux modélisations est un barreau symétrique composé d'éléments lumpés :

- des quadrangles QUAD4 pour une modélisation `AXIS_DIAG`
- des hexaèdres HEXA8 pour un modélisation `3D_DIAG`

Les deux extrémités du barreau sont soumises aux conditions d'adiabadicité par défaut. La source volumique de chaleur est une fonction linéaire de la température.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On considère une structure unidimensionnelle (un barreau dont les faces latérales sont soumises à des conditions adiabatiques) de longueur $2\mathrm{L}$ occupant le domaine $[-L\,;L]$.

La température étant homogène dans les directions normales au barreau, le calcul peut être considéré comme 1D.

1.2 Propriétés du matériau

$\lambda=2$	conductivité thermique
$\rho C=2$	chaleur volumique

1.3 Conditions aux limites et chargements

Chargement de source volumique non-linéaire, fonction de la température :
$s(T)=2-2\times w\times T$ avec $w=2$

Les conditions aux limites sont adiabatiques sur les faces latérales et de type température imposée nulle à l'extrémité de la barre ; une condition de symétrie est mise en œuvre sur le plan de symétrie (ce qui est équivalent à une condition aux limites adiabatique).

La plage temporelle $[0.;1.]$ est discrétisée en 100 pas de temps (durée de chaque pas de temps égale à 0.01).

1.4 Conditions initiales

Un état initial analytique est fourni. Voir les développements dans le paragraphe détaillant la solution de référence.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le barreau est soumis à une source de chaleur $r(T)=r_0-r_1 T$, où $r_1>0$ pour des questions de stabilité thermique. Sa température initiale vaut $T_0(x)$ et les extrémités de la barre sont maintenues à une température nulle. L'évolution de température obéit à l'équation de la chaleur :

$$\rho c \dot{T}=\lambda \nabla^2 T+r(T) \;;\; T(x,0)=T_0(x) \;;\; T(-L,t)=T(L,t)=0$$

Par normalisation, on peut se ramener sans perte de généralité à l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+1-\omega^2 u \;;\; u(x,0)=u_0(x) \;;\; u(-1,t)=u(1,t)=0$$

Pour résoudre cette équation, on s'intéresse d'abord à la solution asymptotique $u_\infty(x)$ qui vérifie :

$$0=\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial x^2}+1-\omega^2 u_\infty \;;\; u_\infty(-1)=u_\infty(1)=0$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du second ordre vaut :

$$u_\infty(x)=\frac{1}{\omega^2}\left(1-\frac{\cosh \omega x}{\cosh \omega}\right)$$

La solution de l'équation transitoire est ensuite obtenue par projection de $v=u-u_\infty$ sur les fonctions propres du Laplacien sur $]-1,1[$. Pour simplifier l'analyse, on adopte une condition initiale u_0 égale au premier mode propre, à savoir :

$$u_0(x)=u_\infty(x)-\cos\frac{\pi x}{2}$$

Seul le premier mode étant activé, on est ramené à la résolution d'une équation différentielle en temps du premier ordre, pour obtenir finalement la solution :

$$u(x,t)=u_\infty(x)-\exp\left(-\omega^2 t-\frac{\pi^2}{4}t\right)\cos\frac{\pi x}{2}$$

Enfin, comme précédemment, on remonte de u à T en adoptant un jeu de paramètres spécifique, sans tenir compte des unités, de sorte que $T=u$. Pour cela, on prend $\lambda=r_0=\rho c$, $r_1=\omega^2 r_0$, $L=1$ et $T_0(x)=u_0(x)$.

2.2 Résultats de référence

Le cas-test est mené avec $\omega=\sqrt{2}$ et on examine la température à $t=1$ en un nœud du plan de symétrie $(x=0)$. Les données sont les suivantes :

Conductivité thermique	LAMBDA	2.
Capacité calorifique volumique	RHO_CP	2.
Température initiale	T_0	$u_0(x)=\frac{1}{\omega^2}\left(1-\frac{\cosh \omega x}{\cosh \omega}\right)-\cos\frac{\pi x}{2}$ avec $\omega=\sqrt{2}$
Source de chaleur	r_0 r_1	2. 4.

Grandeur testée	$T\ (\ x=0, t=1\ )$
Valeur de référence	0.258974

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le maillage de cette modélisation est composé 40 quadrangles QUAD4 de même taille en modélisation AXIS_DIAG . La longueur des éléments vaut 0.025 car seule une moitié de la barre est représentée (symétrie).

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

La solution est conforme à la valeur analytique à moins de 0.05 % pour une discrétisation temporelle de 100 pas de temps.

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le maillage de cette modélisation est composé 40 hexaèdres HEXA8 de même taille en modélisation 3D_ DIAG . La longueur des éléments vaut 0.025 car seule une moitié de la barre est représentée (symétrie).

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

La solution est conforme à la valeur analytique à moins de 0.05 % pour une discrétisation temporelle de 100 pas de temps.

7 Synthèse des résultats

Les résultats sont conformes à la solution analytique.