

SSLX100 - Mélange 3D - Coque - Poutre en flexion

Résumé :

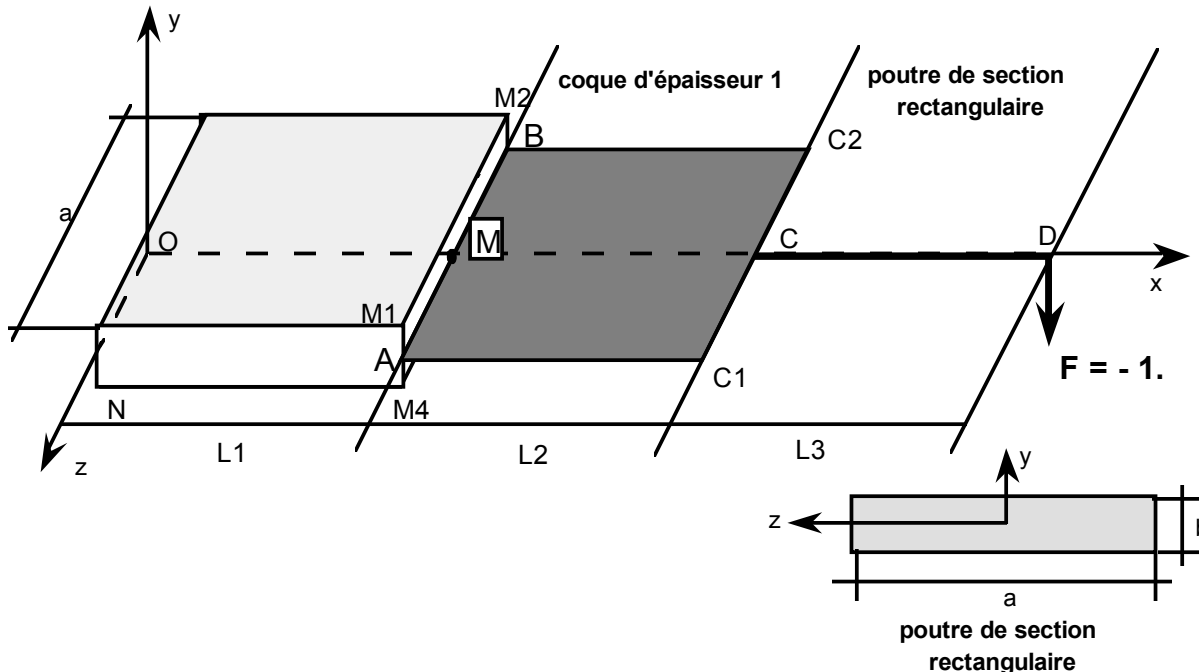
Ce test permet de valider pour un calcul élastique linéaire :

- un mélange de différents modèles mécaniques : modèle 3D (élément `HEXA20`), modèle de coque (élément `DKT`) et modèle de poutre (éléments `POU_D_E`, ou éléments `COQUE_C_PLAN`),
- des relations linéaires entre degrés de liberté.

Le test s'appuie sur la solution analytique **élastique** d'une poutre en flexion, le nombre réduit d'éléments pour les différents **modèles** conduit à une solution médiocre, qui est cependant améliorée nettement avec l'emploi de conditions aux limites appropriées à la théorie des poutres.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



$$\begin{aligned} L1 &= L2 = L3 = 10 \text{ mm} \\ b &= 1 \text{ mm} \\ a &= 3 \text{ mm} \end{aligned}$$

1.2 Propriétés de matériaux

$$E = 200\,000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$\nu = 0.0$ permet d'éviter la variation de courbure orthogonale induite par l'effet de Poisson dans les plaques, qui provoque un écart entre les théories de poutres et de plaques, hors de la fibre moyenne.

1.3 Conditions aux limites et chargements

- force $F_y = -1$ (charge 1) ou couple $C_z = 1$ (charge 2)
- définies ou appliqués sur la fibre neutre
- encastrement de la section $x = 0$
- continuité des déplacements de translation sur AB
- continuité des déplacements de translation en C
- égalité des déplacements de rotation autour de z sur $C1-C2$
- pour les points M de la section ($M1$ $M2$ $M4$) les déplacements de translation $u(M)$ dépendent linéairement du déplacement de rotation φ_z des points P de AB

$$u(M) = -\varphi_z(P) \cdot y + dx(P)$$

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Solution analytique, *structure isostatique*.

La flèche élastique, les contraintes et déformations axiales élastiques et le moment fléchissant en tout point d'abscisse x sont donnés par :

- Charge n°1 : force $F_y = -1$

$$\begin{aligned}M_y(x) &= F_y \cdot L(1 - x/L) & (= E \cdot I_z \cdot u_y''(x) \text{ en élasticité}) \\u_y(x) &= F_y L \cdot x^2 \cdot (3 - x/L) / (6 \cdot E \cdot I_z) & (\text{en élasticité}) \\\varepsilon_{xx}(x, y) &= -F_y \cdot L(1 - x/L) \cdot y / (E \cdot I_z) & (\text{en élasticité}) \\\sigma_{xx}(x, y) &= -F_y \cdot L(1 - x/L) \cdot y / I_z & (\text{en élasticité})\end{aligned}$$

- Charge n°2 : couple $C_z = 1$ ou rotation $dr_z = C_{z,L} / (E \cdot I_z)$

$$\begin{aligned}M_y(x) &= C_z & (= E \cdot I_z \cdot u_y''(x) \text{ en élasticité}) \\u_y(x) &= C_z \cdot x^2 / (2 \cdot E \cdot I_z) & (\text{en élasticité}) \\\sigma_{xx}(x, y) &= -C_z \cdot y / I_z & (\text{en élasticité}) \\\varepsilon_{xx}(x, y) &= -C_z \cdot y / (E \cdot I_z) & (\text{en élasticité})\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}L &= L1 + L2 + L3 = 30 \text{ mm} \\I_z &= a \cdot h^3 / 12 = 0.25 \text{ mm}^4 \\dr_z &= 0.0006\end{aligned}$$

2.2 Résultats de référence

Flèches, contraintes et déformations axiales et moments fléchissants en 4 points de l'axe de la poutre.

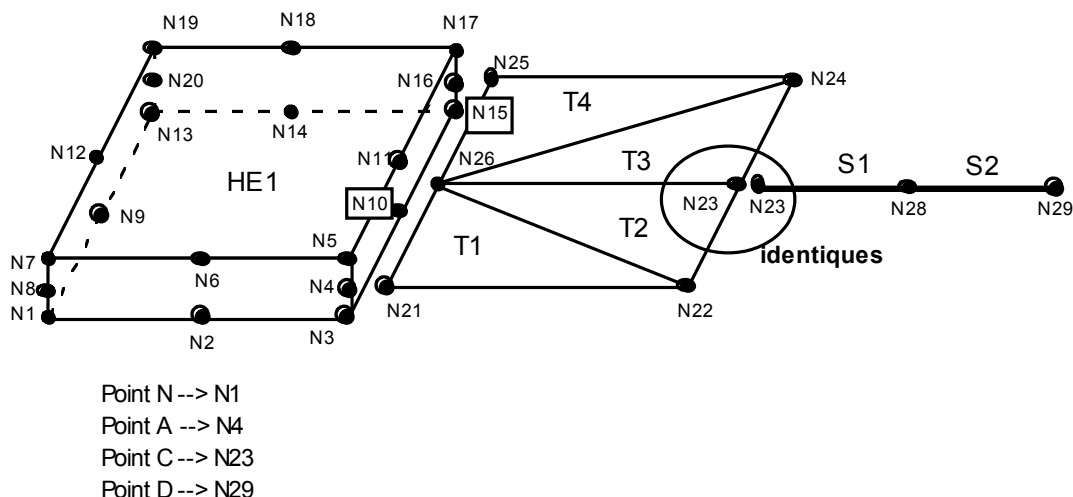
2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation mixtes : 3D, DKT et POU_D_E



Charge n°1 : force F_y

Encastrement total sur la section en O

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 28

Nombre de mailles et types : 1 HEXA20 , 4 TRIA3 / DKT , 2 SEG2/ POU_D_E

3.3 Grandeurs testées et résultats

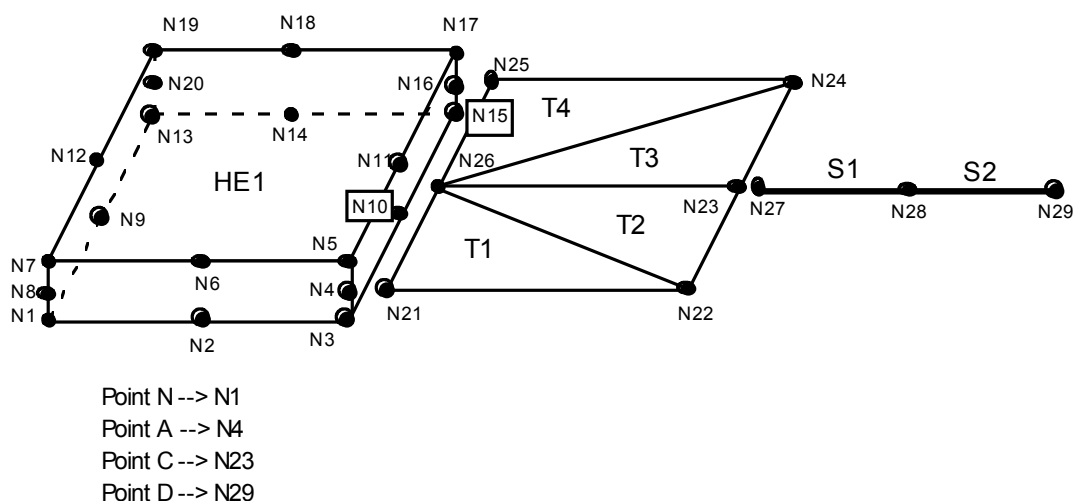
- Charge n°1 : force F_y

Identification	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
uN (nœud $N1$)	ANALYTIQUE	0.	1.00E-006
uM (nœud $N26$)	ANALYTIQUE	-0.0267	14.0
uA (nœud $N4$)	ANALYTIQUE	-0.0267	14.0
uCl (nœud $N22$)	ANALYTIQUE	-0.0933	8.40
uC (nœud $N23$)	ANALYTIQUE	-0.0933	8.30
uD (nœud $N29$)	ANALYTIQUE	-0.18	6.40

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation mixte : 3D, DKT, POU_D_E et DIS_TR



Charge n°1 : force F_y

Encastrement sur la section en O réalisé par une liaison 3D_POUTRE entre la face $N1 N13 N19 N7$ et un élément discret situé sur l'origine.

Relation supplémentaire, par rapport à la modélisation A , entre C_1 , C_2 et C , introduite par LIAISON_ELEM : 'COQ_POU'.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 29

Nombre de mailles et types : 1 HEXA20 , 4 TRIA3 / DKT , 2 SEG2/ POU_D_E , 1 POI1/DIS_TR , 1 QUAD8 , 2 SEG2/BORD_DKT

4.3 Grandeurs testées et résultats

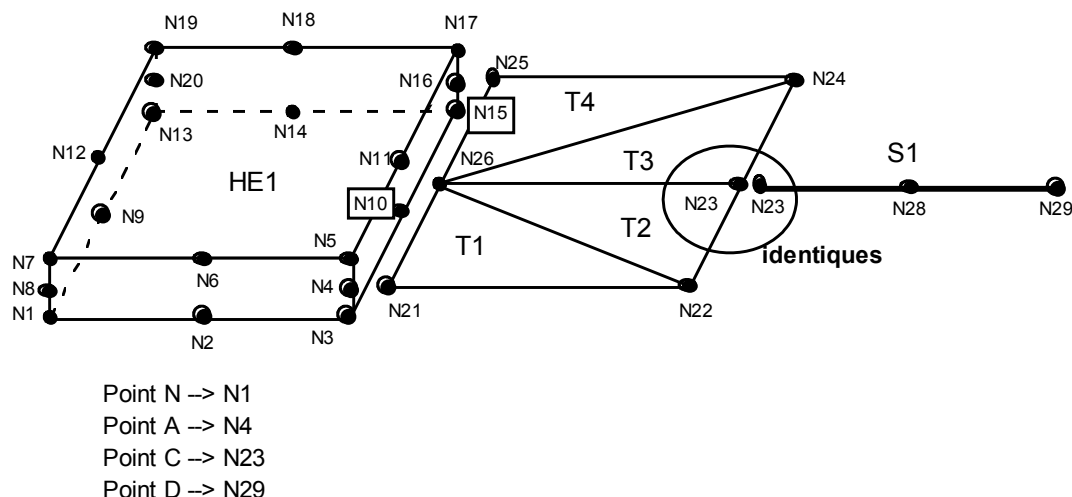
- Charge n°1 : force F_y

	Identification	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
u_N	(noeud $N1$)	ANALYTIQUE	0.	
u_M	(noeud $N26$)	ANALYTIQUE	-0.0267	3.0
u_A	(noeud $N4$)	ANALYTIQUE	-0.0267	3.0
u_{C1}	(noeud $N22$)	ANALYTIQUE	-0.0933	1.0
u_C	(noeud $N23$)	ANALYTIQUE	-0.0933	1.0
u_D	(noeud $N29$)	ANALYTIQUE	-0.18	1.0
M_z	(noeud $N27$)	ANALYTIQUE	-10.	1.0
M_z	(noeud $N29$)	ANALYTIQUE	0.	1.0

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation mixte: 3D, DKT et COQUE C PLAN



En N29 : charge n°1 : force F_y , charge n°2 : couple C_z ou rotation dr_z
Déplacements DY et DZ sur la section 0 nuls en moyenne (commande LIAISON DDL).

Remarque :

Comme la largeur de la poutre est $a=3\text{mm}$, le module d'Young est multiplié par 3 dans le matériau de la COQUE C PLAN.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 29

Nombre de mailles et types : 1 HEXA20 , 4 TRIA3 / DKT , 1 SEG3/ COQUE C PLAN

5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
Charge 1 : force F_y			
uN (nœud $N8$)	ANALYTIQUE	0.	6.0e-5
uM (nœud $N26$)	ANALYTIQUE	-0.0267	5.70
uA (nœud $N4$)	ANALYTIQUE	-0.0267	5.70
uCl (nœud $N22$)	ANALYTIQUE	-0.0933	2.10
uC (nœud $N23$)	ANALYTIQUE	-0.0933	2.00
uD (nœud $N29$)	ANALYTIQUE	-0.18	2.0
MyD (nœud $N28$)	ANALYTIQUE	-5.	0.50
$\sigma_{xx}(x, h/2)$ (nœud $N28$)	ANALYTIQUE	-30.0000	0.50
$\varepsilon_{xx}(x, h/2)$ (nœud $N28$)	ANALYTIQUE	-5.0 10 ⁻⁵	0.50

Charge 2 : couple C_z				
uN	(nœud NI)	ANALYTIQUE	0.	3.0e-6
uM	(nœud $N26$)	ANALYTIQUE	-0.0010	0.50
uA	(nœud $N4$)	ANALYTIQUE	-0.0010	0.50
uCI	(nœud $N22$)	ANALYTIQUE	-0.0040	0.20
uC	(nœud $N23$)	ANALYTIQUE	-0.0040	0.20
uD	(nœud $N29$)	ANALYTIQUE	-0.0090	0.10
M_{yD}	(nœud $N28$)	ANALYTIQUE	1.0	0.50
$\sigma_{xx}(x, h/2)$	(nœud $N28$)	ANALYTIQUE	6.0000	0.50
$\varepsilon_{xx}(x, h/2)$	(nœud $N28$)	ANALYTIQUE	1.0 10 ⁻⁵	0.50

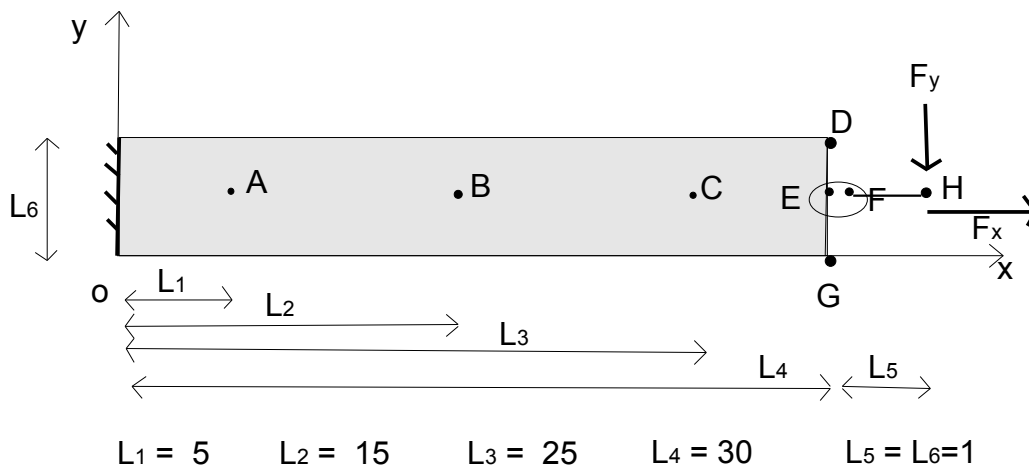
5.4 Remarques

Le calcul des efforts et du moment dans l'élément COQUE_C_PLAN est effectué au nœud milieu $N28$ pour que l'interpolation soit correcte ; sachant que le module d'Young est triple pour que le produit $E \cdot I_z$ soit identique dans tout le modèle, les contraintes le sont aussi.

6 Modélisation F

6.1 Caractéristiques de la modélisation

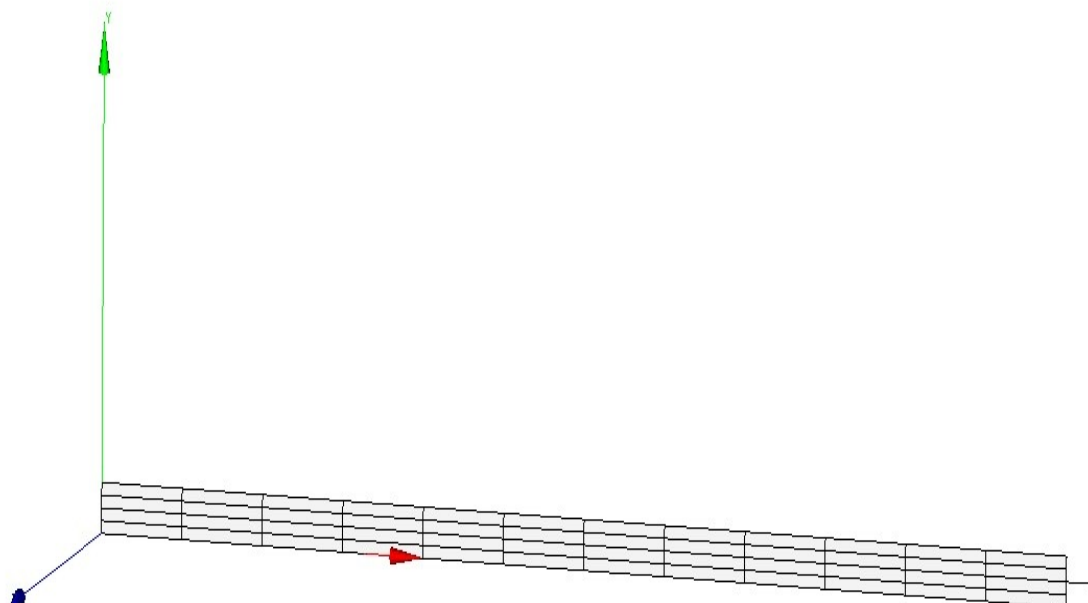
Modélisation mixte: C_PLAN , 2D_DIS_TR



En H : charge n°1 : force F_x , charge n°2 : F_y
Déplacements u_x et u_y nuls sur le bord gauche de la partie 2D.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 179
Nombre de mailles et types : 8 SEG3, 1 SEG2, 48 QUAD8 (=12 x 4)



6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
Charge 1 : force F_x			
$u_x(A)$ (nœud N13)	ANALYTIQUE	2.50	1.0e-5
$u_x(B)$ (nœud N75)	ANALYTIQUE	7.50	1.0e-5
$u_x(C)$ (nœud N131)	ANALYTIQUE	12.50	1.0e-5
$u_x(D)$ (nœud N141)	ANALYTIQUE	15.00	1.0e-5
$u_x(E)$ (nœud N133)	ANALYTIQUE	15.00	1.0e-5
$u_x(F)$ (nœud N178)	ANALYTIQUE	15.00	1.0e-5
$u_x(G)$ (nœud N125)	ANALYTIQUE	15.00	1.0e-5
$u_x(H)$ (nœud N179)	ANALYTIQUE	15.25	1.0e-5
Charge 2 : force F_y			
$u_y(A)$ (nœud N13)	ANALYTIQUE	2.125e-2	1.0e-2
$u_y(B)$ (nœud N75)	ANALYTIQUE	-1.6875e-1	1.0e-2
$u_y(C)$ (nœud N131)	ANALYTIQUE	-4.0625	1.0e-2
$u_y(D)$ (nœud N141)	ANALYTIQUE	-0.54	1.0e-2
$u_y(E)$ (nœud N133)	ANALYTIQUE	-0.54	1.0e-2
$u_y(F)$ (nœud N178)	ANALYTIQUE	-0.54	1.0e-2
$u_y(G)$ (nœud N125)	ANALYTIQUE	-0.54	1.0e-2
$u_y(H)$ (nœud N179)	ANALYTIQUE	-0.54	1.0e-2

7 Modélisation G

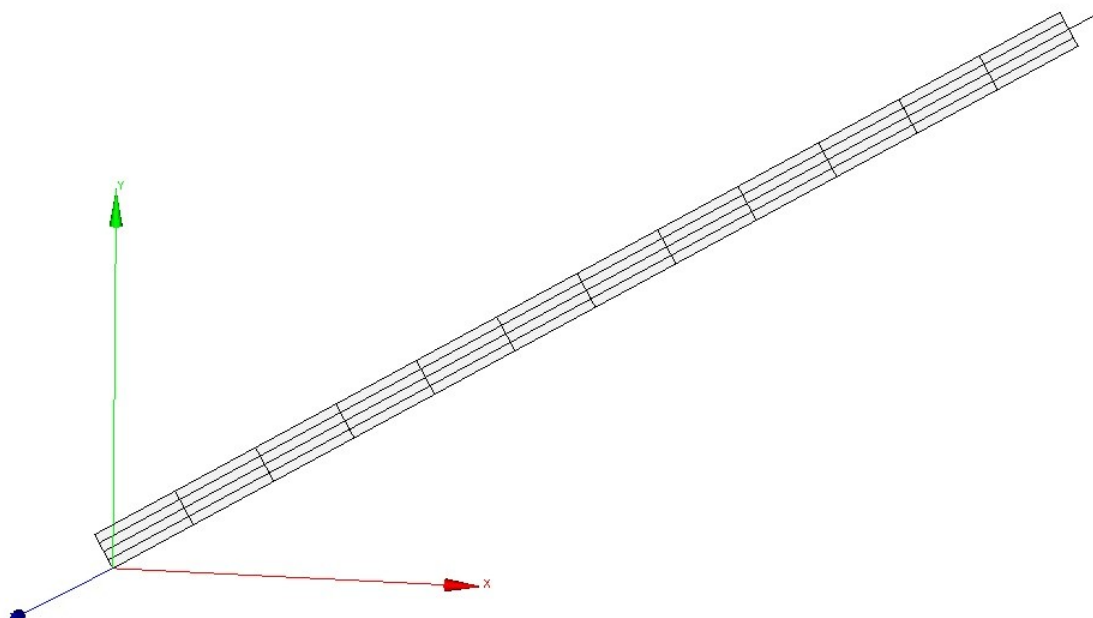
7.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation G = Modélisation F (C_PLAN , 2D_DIS_TR) + rotation de 30° à l'origine.

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 179

Nombre de mailles et types : 8 SEG3, 1 SEG2, 48 QUAD8 (=12 x 4)



7.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
Charge 1 : force F_x			
$u_x(A)$ (nœud N13)	ANALYTIQUE	2.165064	1.0e-6
$u_x(B)$ (nœud N75)	ANALYTIQUE	6.495191	1.0e-6
$u_x(C)$ (nœud N131)	ANALYTIQUE	10.825318	1.0e-6
$u_x(D)$ (nœud N141)	ANALYTIQUE	12.990381	1.0e-6
$u_x(E)$ (nœud N133)	ANALYTIQUE	12.990381	1.0e-6
$u_x(F)$ (nœud N178)	ANALYTIQUE	12.990381	1.0e-6
$u_x(G)$ (nœud N125)	ANALYTIQUE	12.990381	1.0e-6

$u_x(H)$ (nœud N179)	ANALYTIQUE	13.208874	1.0e-6
Charge 2 : force F_y			
$u_y(A)$ (nœud N13)	ANALYTIQUE	-1.8403e-2	1.0e-2
$u_y(B)$ (nœud N75)	ANALYTIQUE	-0.146142	1.0e-2
$u_y(C)$ (nœud N131)	ANALYTIQUE	-0.351823	1.0e-2
$u_y(D)$ (nœud N141)	ANALYTIQUE	-0.467654	1.5
$u_y(E)$ (nœud N133)	ANALYTIQUE	-0.467654	1.0e-2
$u_y(F)$ (nœud N178)	ANALYTIQUE	-0.467654	1.0e-2
$u_y(G)$ (nœud N125)	ANALYTIQUE	-0.467654	1.5
$u_y(H)$ (nœud N179)	ANALYTIQUE	-0.467654	1.0e-2

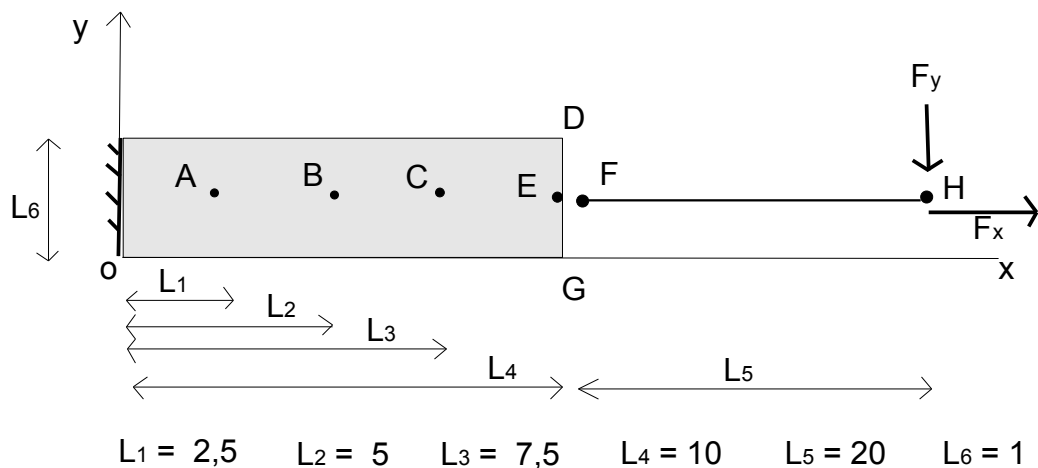
7.4 Remarques

Les valeurs analytiques de déplacement sont celles de la modélisation G multipliées par le cosinus de 30 degrés.

8 Modélisation H

8.1 Caractéristiques de la modélisation

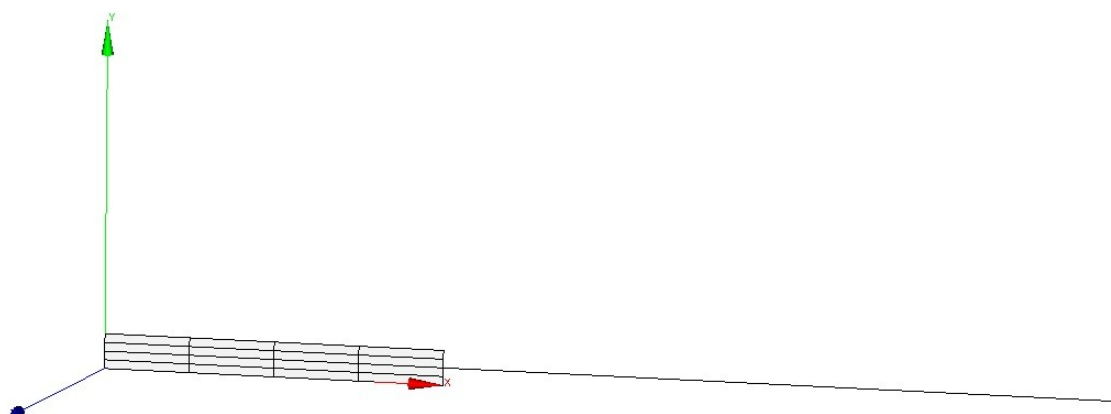
Modélisation mixte: C_PLAN , POU_D_E



8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 67

Nombre de mailles et types : 8 SEG3, 1 SEG2, 16 QUAD8 (=4 x 4)



8.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de Référence	Référence	Tolérance (%)
Charge 1 : force F_x			
$u_x(A)$ (nœud N12)	ANALYTIQUE	1.25	1.0e-6
$u_x(B)$ (nœud N13)	ANALYTIQUE	2.50	1.0e-6
$u_x(C)$ (nœud N14)	ANALYTIQUE	3.75	1.0e-6
$u_x(D)$ (nœud N25)	ANALYTIQUE	5.00	1.0e-6
$u_x(E)$ (nœud N15)	ANALYTIQUE	5.00	1.0e-6
$u_x(F)$ (nœud N66)	ANALYTIQUE	5.00	1.0e-6
$u_x(G)$ (nœud N5)	ANALYTIQUE	5.00	1.0e-6
$u_x(H)$ (nœud N67)	ANALYTIQUE	15.00	1.0e-6
Charge 2 : force F_y			
$u_y(A)$ (nœud N12)	ANALYTIQUE	-5.46875e-3	1.0e-2
$u_y(B)$ (nœud N13)	ANALYTIQUE	-2.125e-2	1.0e-2
$u_y(C)$ (nœud N14)	ANALYTIQUE	-4.640625e-2	1.0e-2
$u_y(D)$ (nœud N25)	ANALYTIQUE	-0.08	1.0e-2
$u_y(E)$ (nœud N15)	ANALYTIQUE	-0.08	1.0e-2
$u_y(F)$ (nœud N66)	ANALYTIQUE	-0.08	1.0e-2
$u_y(G)$ (nœud N5)	ANALYTIQUE	-0.08	1.0e-2
$u_y(H)$ (nœud N67)	ANALYTIQUE	-0.54	1.0e-3

9 Synthèse des résultats

- Le maillage est très grossier en éléments 3D et plaque. Le test mérite une modélisation plus fine, étant donné que les résultats sont influencés par la façon de décrire les conditions d'encastrement en O . La modélisation A conduit à une erreur de 14 % au maximum,
- cependant avec une bonne prise en compte de ces conditions, la solution est nettement meilleure (la modélisation B conduit à une erreur de 3 % maximum).
- Les comparaisons des contraintes et efforts donnent de bons résultats (modélisation B). Pour l'élément de coque 1D, les résultats sont très bons.