

## SSLV130 - Cylindre creux en incompressible

---

### Résumé :

Ce test permet de valider les éléments quasi-incompressibles en statique pour un problème tridimensionnel, axisymétrique ou bidimensionnel (déformations planes). On considère un cylindre creux soumis à une pression interne. Le matériau a un coefficient de POISSON égal à 0.4999 et on utilise les éléments quasi-incompressibles (modélisation `INCO` et `INCO_UP`). Dans tous les cas de modélisation, on réalise le test en imposant ou non la condition d'incompressibilité parfaite si nécessaire (`DDL_IMPO` et `GONF=0`)

Cinq modélisations sont effectuées pour ce problème.

La modélisation `INCO` est testée dans les configurations suivantes :

- modélisation *A* : modélisation `3D_INCO` avec des `HEXA20` ;
- modélisation *B* : modélisation `3D_INCO` avec des `TETRA10` ;
- modélisation *E* : modélisation `3D_INCO` avec des `PENTA15` ;
- modélisation *C* : modélisation `D_PLAN_INCO` avec un maillage mixte `TRIA6/QUAD8` ;
- modélisation *D* : modélisation `AXIS_INCO` avec un maillage mixte `TRIA6/QUAD8`.

La modélisation `INCO_UP` est testée dans les configurations suivantes :

- modélisation *A* : modélisation `3D_INCO_UP` avec des `HEXA20` ;
- modélisation *B* : modélisation `3D_INCO_UP` avec des `TETRA10` et avec des `TETRA4` ;
- modélisation *C* : modélisation `D_PLAN_INCO_UP` avec un maillage mixte `TRIA6/QUAD8` et avec des `TRIA3` ;
- modélisation *D* : modélisation `AXIS_INCO_UP` avec un maillage mixte `TRIA6/QUAD8` et avec des `TRIA3`.

La modélisation `INCO_OSGS` est testée dans les configurations suivantes :

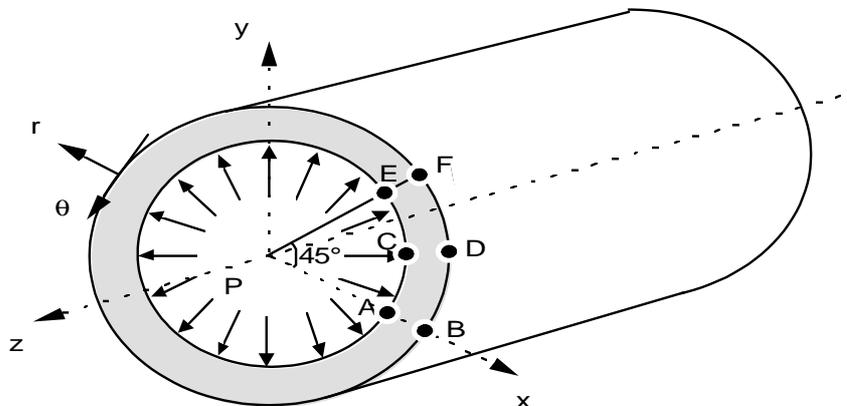
- modélisation *A* : modélisation `3D_INCO_OSGS` avec des `HEXA8` ;
- modélisation *B* : modélisation `3D_INCO_OSGS` avec des `TETRA4` ;
- modélisation *E* : modélisation `3D_INCO_OSGS` avec des `PENTA6` ;
- modélisation *C* : modélisation `D_PLAN_INCO_OSGS` avec un maillage mixte `TRIA6/QUAD8` ;
- modélisation *D* : modélisation `AXIS_INCO_OSGS` avec un maillage mixte `TRIA6/QUAD8`.

Ce test est similaire au test SSLV100.

Les résultats numériques sont satisfaisants pour toutes les modélisations. Le fait d'imposer explicitement la condition d'incompressibilité n'influence que très peu les résultats. Les éléments linéaires pour la modélisation à 2 champs sont logiquement un peu moins précis que les éléments quadratiques.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Rayon interne  $a = 0.1 \text{ m}$   
Rayon externe  $b = 0.2 \text{ m}$

Rayon interne :  $a = 0,1 \text{ mm}$   
Rayon externe :  $b = 0,2 \text{ mm}$

Coordonnées des points ( mm )

	A	B	E	F	C	D
x	0.1	0.2	$0.1 \times \cos(45)$	$0.2 \times \cos(45)$	$0.1 \times \cos(22.5)$	$0.2 \times \cos(22.5)$
y	0	0	$0.1 \times \sin(45)$	$0.1 \times \sin(45)$	$0.1 \times \sin(22.5)$	$0.1 \times \sin(22.5)$
z	0	0	0	0	0	0

### 1.2 Propriétés du matériau

Les propriétés élastiques du matériau considéré sont les suivantes :

Module d'Young:  $E = 2.10^5 \text{ MPa}$

Coefficient de Poisson:  $\nu = 0.4999$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

La pression interne imposée est égale à  $P = 60 \text{ MPa}$ .

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul

La solution générale en déplacement est la suivante :

$$\begin{cases} u_r = \frac{Pa^2}{E(b^2 - a^2)}(1 + \nu) \left[ (1 - 2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right] \\ u_\theta = u_z = 0 \end{cases}$$

En déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{Pa^2}{E(b^2 - a^2)}(1 + \nu) \left[ (1 - 2\nu) - \frac{b^2}{r^2} \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{Pa^2}{E(b^2 - a^2)}(1 + \nu) \left[ (1 - 2\nu) + \frac{b^2}{r^2} \right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{zz} = 0 \end{cases}$$

En contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} = P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right] \\ \sigma_{zz} = 2\nu P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

On obtient pour un cylindre parfaitement incompressible ( $\nu = 0.5$ ) :

	$r=0,1$	$r=0,2$
$u_r$	$6.10^{-5} mm$	$3.10^{-5} mm$
$\varepsilon_{rr}$	$-6.10^{-4}$	$-1,5 10^{-4}$
$\varepsilon_{\theta\theta}$	$-6.10^{-4}$	$1,5 10^{-4}$
$\sigma_{rr}$	$-60 MPa$	$0 MPa$
$\sigma_{\theta\theta}$	$100 MPa$	$40 MPa$
$\sigma_{zz}$	$20 MPa$	$20 MPa$

Le passage dans le système cartésien se fait à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{rr} \cos^2(\theta) + \sigma_{\theta\theta} \sin^2(\theta) - 2\sigma_{r\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{rr} \sin^2(\theta) + \sigma_{\theta\theta} \cos^2(\theta) + 2\sigma_{r\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{rr} \sin(\theta) \cos(\theta) - \sigma_{\theta\theta} \cos(\theta) \sin(\theta) - 2\sigma_{r\theta} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \end{aligned}$$

## 2.2 Grandeurs et résultats de référence

On compare aux valeurs de référence :

- les déplacements  $(u, v)$  aux points  $A$  et  $F$ ,
- les déformations  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})$  et les contraintes  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy})$  aux points  $A$  et  $F$ ,
- les déformations équivalentes et les contraintes équivalentes au point  $A$ .

Enfin, pour tester le passage des grandeurs des points de Gauss aux nœuds pour les nœuds milieux, on teste également les déformations et les contraintes non nulles en un nœud milieu de la structure.

## 2.3 Références bibliographiques

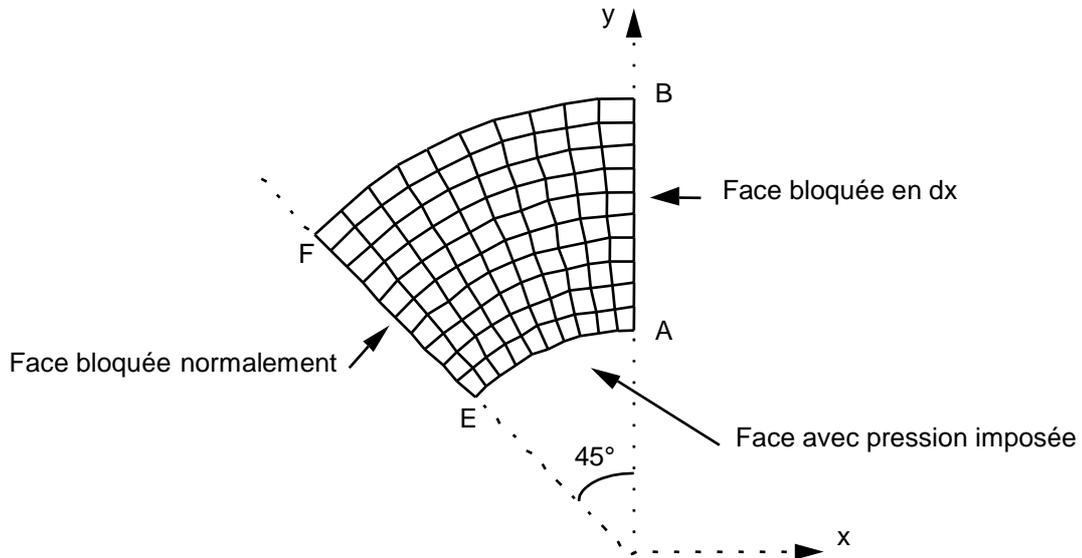
- 1) Y.C. FUNG : Foundations of solid mechanics. Prentice-hall, inc. Englewood Cliffs. NJ. 1965, p. 243-245
- 2) [V3.04.100] Cylindre creux en déformations planes

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillages :

1. de type HEXA20 pour les modélisations 3D\_INCO et 3D\_INCO\_UP
2. de type HEXA8 pour la modélisation 3D\_INCO\_OSGS



Suivant l'axe  $z$  :

- épaisseur totale  $e=0.01\text{ mm}$
- 2 couches d'éléments

Pour les besoins de dépouillement en un nœud milieu, on définit le nœud  $NOEUMI = A + (0.0 \cdot e/4)$  où les déformations et les contraintes sont les mêmes qu'en  $A$ .

**Conditions limites :**

```
DDL_IMPO= GROUP_NO =' FACSUP' , DZ = 0
          GROUP_NO =' FACINF' , DZ = 0      faces AEFD (  $z=0$  et  $z=0.01$  )
          GROUP_NO =' FACEAB' , DX = 0      face AB
FACE_IMPO =GROUP_MA =' FACEEF' , DNOR = 0    face EF
PRES_REP  =GROUP_MA =' FACEAE' , PRES = 60   face AE
```

### 3.2 Caractéristiques des maillages

Maillage 1 HEXA20 :  
Nombre de nœuds : 1501 nœuds  
Nombre de mailles : 240 HEXA20

Maillage 2 HEXA8 :  
Nombre de nœuds : 429 nœuds  
Nombre de mailles : 240 HEXA 8

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

Résultats au point *A* :

- première colonne 3D\_INCO sans imposer  $GONF=0$
- deuxième colonne 3D\_INCO en imposant  $GONF=0$
- troisième colonne 3D\_INCO\_UP
- quatrième colonne 3D\_INCO\_OSGS

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance			
			1	2	3	4
$\nu$	'ANALYTIQUE'	$6.10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	100.	0.10%	0.10%	0.10%	0,15%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	-60.	0.50%	0.50%	0.50%	9,0%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	5,0%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	0.50%	0.50%	0.50%	50.00%
$\epsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$6.10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\epsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	$-6.10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	7,0%
$\epsilon_{zz}$	'ANALYTIQUE'	0.	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$\epsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$3,10^{-5}$
$\epsilon_{eq}$ -I NVA_2	'ANALYTIQUE'	$6.92 \cdot 10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$5,10^{-2}$
$\epsilon_{eq}$ - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	$-6.10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	7,0%
$\epsilon_{eq}$ - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	0.	0.50%	0.50%	0.50%	$10^{-5}$
$\epsilon_{eq}$ - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	$6.10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$5,10^{-2}$
$\sigma_{eq}$ -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	0.50%	0.50%	0.50%	5.00%
$\sigma_{eq}$ - TRESCA	'ANALYTIQUE'	160.	0.50%	0.50%	0.50%	5.00%
$\sigma_{eq}$ - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	-60.	0.50%	0.50%	0.50%	10,0%
$\sigma_{eq}$ - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	5.00%
$\sigma_{eq}$ - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	100.	0.50%	0.50%	0.50%	1,50%
$\sigma_{eq}$ -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	0.50%	0.50%	0.50%	5,0%

Résultats au point  $F$  :

- première colonne 3D\_INCO sans imposer  $GONF = 0$
- deuxième colonne 3D\_INCO en imposant  $GONF = 0$
- troisième colonne 3D\_INCO\_UP
- quatrième colonne 3D\_INCO\_OSGS

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance			
			1	2	3	4
$u$	'ANALYTIQUE'	$-2.12 \cdot 10^{-5}$	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%
$v$	'ANALYTIQUE'	$2.12 \cdot 10^{-5}$	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	3,0%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	6,0%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	1,0%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	2,0%
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	$1.5 \cdot 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	2,0%

Vérification du passage aux nœuds pour les nœuds milieux (uniquement pour le résultat obtenu sans imposer  $GONF = 0$ ) - valeur au nœud  $NOEUMI$  :

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance ( % )
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	100.	0.50%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	-60.	0.50%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$6. \cdot 10^{-4}$	0.50%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	$-6. \cdot 10^{-4}$	0.50%

## 3.4 Remarques

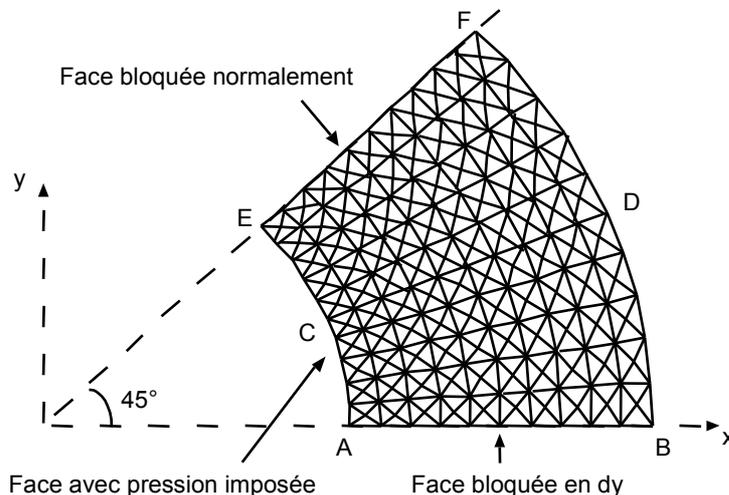
Hormis pour 3D\_INCO\_OSGS, on obtient de très bons résultats quelque soit la formulation retenue puisque pour toutes les grandeurs examinées, la différence entre la solution obtenue avec le code et la solution analytique est inférieure à 0.2%. On voit que l'écart entre les solutions obtenues en imposant ou non la condition  $tr(\varepsilon) = 0$  est insignifiant.

Les résultats obtenus avec 3D\_INCO\_OSGS sont moins précis. Cela s'explique par le fait que les éléments utilisés sont linéaires. Pour retrouver un résultat plus précis, il faudrait raffiner le maillage.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillage avec des éléments 3D incompressibles de type TETRA10 uniquement



$AB$  est sur l'axe  $OX$  (contrairement à la modélisation  $A$ ).

Pour les besoins de dépouillement, on définit le nœud  $NOEUMI = A + (0.0.e/4)$  où les déformations et les contraintes sont les mêmes qu'en  $A$ .

#### Conditions limites :

```
DDL_IMPO= GROUP_NO = 'FACSUP', DZ = 0
GROUP_NO = 'FACINF', DZ = 0   faces AEFD ( z=0 et z=0.01 )
GROUP_NO = 'FACEAB', DY = 0   face AB
FACE_IMPO = GROUP_MA = 'FACEEF', DNOR = 0   face EF
PRES_REP  = GROUP_MA = 'FACEAE', PRES = 60   face AE
```

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 13907

Nombre de mailles : 8519 TETRA10

## 4.3 Grandeurs testées et résultats

Résultat au point *A* :

- première colonne 3D\_INCO sans imposer  $GONF = 0$
- deuxième colonne 3D\_INCO en imposant  $GONF = 0$
- troisième colonne 3D\_INCO\_UP avec éléments quadratiques
- quatrième colonne 3D\_INCO\_UP avec éléments linéaires
- cinquième colonne 3D\_INCO\_OSGS avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
$u$	'ANALYTIQUE'	$6. 10^{-5}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$v$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	-60.	1.00%	1.00%	1.00%	4,00%	3,00%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	100.	1.00%	1.00%	1.00%	1,50%	1.00%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	2.50%	2.50%	2.50%	10,00%	3.00%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$-6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.50%	2,0%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	$6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.00%	1.00%
$\varepsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$3. 10^{-5}$	$3. 10^{-5}$	$3. 10^{-5}$	$3. 10^{-5}$	$3. 10^{-5}$
$\varepsilon_{eq} - I NVA\_2$	'ANALYTIQUE'	$6.92 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.00%	1,50%
$\varepsilon_{eq} - PRIN\_1$	'ANALYTIQUE'	$-6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.50%	2,0%
$\varepsilon_{eq} - PRIN\_2$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{eq} - PRIN\_3$	'ANALYTIQUE'	$6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.00%	1,0%
$\sigma_{eq} - VMIS$	'ANALYTIQUE'	138.56	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1,5%
$\sigma_{eq} - TRESCA$	'ANALYTIQUE'	160.	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1,5%
$\sigma_{eq} - PRIN\_1$	'ANALYTIQUE'	-60.	3.00%	3.00%	3.00%	4,00%	3.00%
$\sigma_{eq} - PRIN\_2$	'ANALYTIQUE'	20.	3.00%	3.00%	3.00%	10,00%	3.00%
$\sigma_{eq} - PRIN\_3$	'ANALYTIQUE'	100.	1.00%	1.00%	1.00%	1,50%	1.00%
$\sigma_{eq} - VMIS$	'ANALYTIQUE'	138.56	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1,5%

Résultat au point  $F$  :

- première colonne 3D\_INCO sans imposer  $GONF = 0$
- deuxième colonne 3D\_INCO en imposant  $GONF = 0$
- troisième colonne 3D\_INCO\_UP avec éléments quadratiques
- quatrième colonne 3D\_INCO\_UP avec éléments linéaires
- cinquième colonne 3D\_INCO\_OSGS avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
$u$	'ANALYTIQUE'	$2.12 \cdot 10^{-5}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$v$	'ANALYTIQUE'	$2.12 \cdot 10^{-5}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	20.	1.00%	1.00%	1.00%	1.50%	1,50%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	20.	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	1.00%	1.00%	1.00%	1,50%	1.00%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	-20.	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	$-1.5 \cdot 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.00%	1.00%

Vérification du passage aux nœuds pour les nœuds milieux (uniquement pour le résultat obtenu sans imposer  $GONF = 0$ ) - valeur au nœud  $NOEUMI$  :

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance ( % )
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	-60.	1.70%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	100.	0.60%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	3.50%
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$-6. \cdot 10^{-4}$	0.50%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	$6. \cdot 10^{-4}$	0.50%

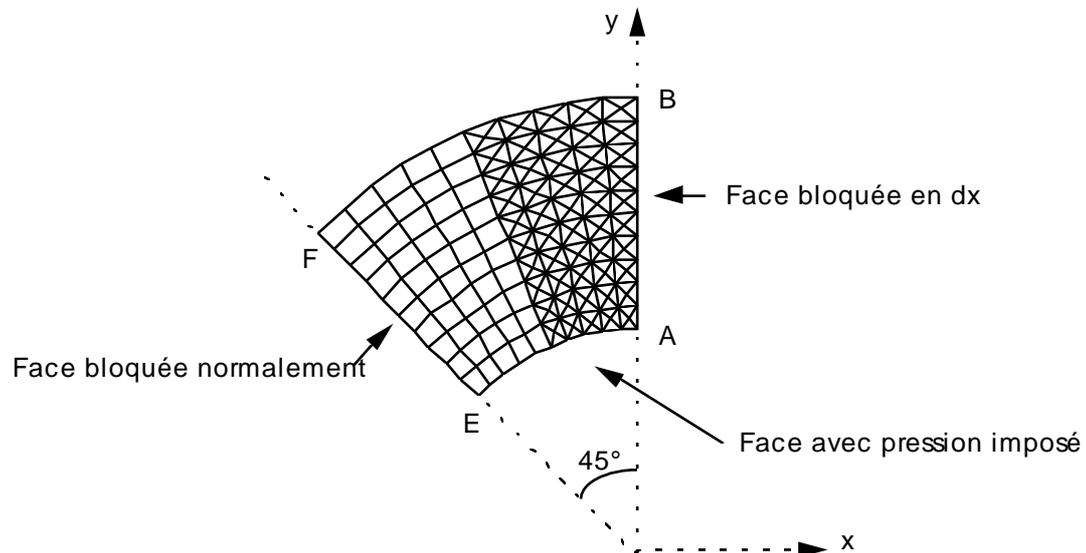
## 4.4 Remarques

Les résultats obtenus ici sont un peu moins bons que dans le cas de la modélisation  $A$ , mais la discrétisation est plus grossière puisqu'il y a environ 2 fois moins de nœuds dans ce cas-test. Les résultats sont tout de même satisfaisants puisque les écarts sont inférieurs à 0.2 % pour les déplacements, inférieurs à 0.5 % pour les déformations et inférieurs à 1 % pour les contraintes. On constate à nouveau qu'il n'y a pas d'amélioration significative du résultat lorsqu'on impose explicitement  $tr \varepsilon = 0$ .

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillage avec des éléments 2D incompressibles de type QUAD8 et TRIA6.



Conditions limites :

DDL_IMPO= GROUP_NO = 'GRNM11', DX = 0	côté AB
FACE_IMPO =GROUP_MA = 'GRMA12', DNOR = 0	coté EF
PRES_REP =GROUP_MA = 'GRMA13', PRES = 60	face AE

Nom des nœuds :

$A=N2$  ,  $B=N361$  ,  $C=N121$  ,  $D=N584$  ,  $E=N155$  ,  $F=N503$

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 591

Nombre de mailles : 200 TRIA6, 50 QUAD8.

## 5.3 Grandeurs testées et résultats

Résultats au point *A* :

- première colonne D\_PLAN\_INCO sans imposer  $GONF=0$
- deuxième colonne D\_PLAN\_INCO en imposant  $GONF=0$
- troisième colonne D\_PLAN\_INCO\_UP avec maillage quadratique
- quatrième colonne D\_PLAN\_INCO\_UP avec maillage linéaire
- cinquième colonne 3D\_INCO\_OSGS avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
$u$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$v$	'ANALYTIQUE'	$6.10^{-5}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	100.	0.50%	0.50%	0.50%	0,60%	0.50%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	-60.	0.50%	0.50%	0.50%	2,50%	2,10%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	5,00%	1,60%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	0.3	0.3	0.3	1,5	0.9
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$6.10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	$-6.10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.50%	1.50%
$\varepsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{eq} - I NVA\_2$	'ANALYTIQUE'	$6.92.10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.00%	1.00%
$\varepsilon_{eq} - PRIN\_1$	'ANALYTIQUE'	$-6.10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.50%	1.50%
$\varepsilon_{eq} - PRIN\_2$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{eq} - PRIN\_3$	'ANALYTIQUE'	$6.10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$\sigma_{eq} - VMIS$	'ANALYTIQUE'	138.56	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%
$\sigma_{eq} - TRESCA$	'ANALYTIQUE'	160.	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%
$\sigma_{eq} - PRIN\_1$	'ANALYTIQUE'	-60.	1.00%	1.00%	1.00%	2,50%	2,10%
$\sigma_{eq} - PRIN\_2$	'ANALYTIQUE'	20.	1.00%	1.00%	1.00%	5,00%	1,60%
$\sigma_{eq} - PRIN\_3$	'ANALYTIQUE'	100.	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%
$\sigma_{eq} - VMIS$	'ANALYTIQUE'	138.56	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%

Résultats au point  $F$  :

- première colonne D\_PLAN\_INCO sans imposer  $GONF = 0$
- deuxième colonne D\_PLAN\_INCO en imposant  $GONF = 0$
- troisième colonne D\_PLAN\_INCO\_UP avec maillage quadratique
- quatrième colonne D\_PLAN\_INCO\_UP avec maillage linéaire
- cinquième colonne 3D\_INCO\_OSGS avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
$u$	'ANALYTIQUE'	$-2.12 \cdot 10^{-5}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$v$	'ANALYTIQUE'	$2.12 \cdot 10^{-5}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	1.00%	1.00%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	2,00%	1.50%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	$1.5 \cdot 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%

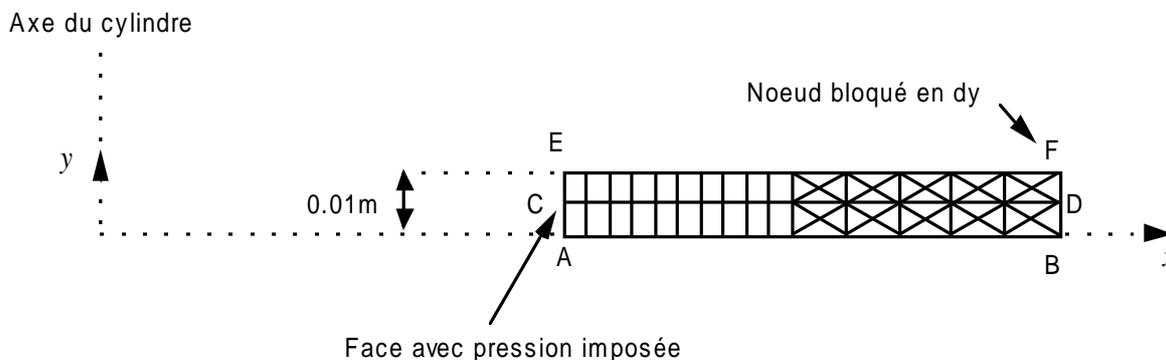
## 5.4 Remarques

Comme pour la modélisation 3D, les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants.

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments AXI incompressibles (TRIA6 + QUAD8)



Pour les besoins de dépouillement, on définit les nœuds :

- $NOEUMIA = A + (0.01/4)$  où les déformations et contraintes sont les même qu'en  $A$
- $NOEUMIB = B + (0.01/4)$  où les déformations et contraintes sont les même qu'en  $B$

Conditions limites :

```
DDL_IMPO= GROUP_NO ='FACSUP', DY = 0      y=0.1
          GROUP_NO ='FACINF', DY = 0      y=0
PRES_REP  =GROUP_MA ='FACEAE', PRES = 60 face AE
```

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 175.

Nombre de mailles et types : 20 QUAD8, 40 TRIA6.

## 6.3 Grandeurs testées et résultats

Résultats au point *A* :

- première colonne `AXIS_INCO` sans imposer  $GONF = 0$
- deuxième colonne `AXIS_INCO` en imposant  $GONF = 0$
- troisième colonne `AXIS_INCO_UP` avec maillage quadratique
- quatrième colonne `AXIS_INCO_UP` avec maillage linéaire
- cinquième colonne `3D_INCO_OSGS` avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
$u$	'ANALYTIQUE'	$6. 10^{-5}$	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%
$v$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	-60.	0.50%	0.50%	0.50%	0,70%	1,50%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	20/03/12	0.50%	0.50%	0.50%	1.00%	9,00%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	100.	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	6,00%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	0.01	$10^{-5}$	0,08	0,2
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$-6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.60%	0.60%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{eq}$ -I NVA_2	'ANALYTIQUE'	$6.92 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	3,0%
$\varepsilon_{eq}$ - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	$-6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1.00%	6,0%
$\varepsilon_{eq}$ - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{eq}$ - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	$6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0,60%
$\sigma_{eq}$ -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	3,00%
$\sigma_{eq}$ - TRESCA	'ANALYTIQUE'	160.	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	3,00%
$\sigma_{eq}$ - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	-60.	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	2,00%
$\sigma_{eq}$ - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	20.	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	23,%
$\sigma_{eq}$ - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	100.	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	5,5%
$\sigma_{eq}$ -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	1.00%	1.00%	1.00%	1.00%	3,00%

Résultats au point  $F$  :

- première colonne `AXIS_INCO` sans imposer  $GONF=0$
- deuxième colonne `AXIS_INCO` en imposant  $GONF=0$
- troisième colonne `AXIS_INCO_UP` avec maillage quadratique
- quatrième colonne `AXIS_INCO_UP` avec maillage linéaire
- cinquième colonne `3D_INCO_OSGS` avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
$u$	'ANALYTIQUE'	$3. 10^{-5}$	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	2,0%
$v$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	0.	0.03	0.03	0.03	0.10	0.70
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	1,1%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	40.	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%	0,60%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$5. 10^{-3}$	$5. 10^{-3}$	$5. 10^{-3}$	0.01	0,2
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$-1.5 10^{-4}$	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	1, 0%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$

Vérification du passage aux nœuds pour les nœuds milieux (uniquement pour le résultat obtenu sans imposer  $GONF=0$ )

## NOEUMIA

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance ( % )
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	-60.	0.50%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	100.	0.50%
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$-6. 10^{-4}$	0.50%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	$6. 10^{-4}$	0.50%

## NOEUMIB

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance ( % )
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	0.	0.50%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	40.	0.50%
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$-1.5 10^{-4}$	0.50%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	$1.5 10^{-4}$	0.50%

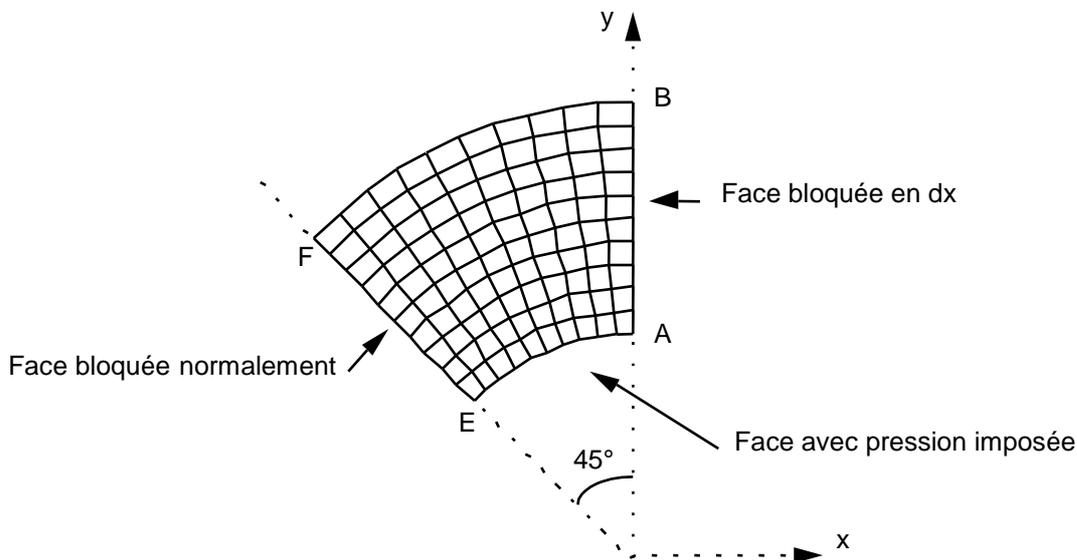
## 6.4 Remarques

La précision obtenue est très bonne.

## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillage avec des éléments 3D incompressibles de type PENTA15 uniquement



Suivant l'axe  $z$  :

- épaisseur totale  $e=0.01\text{ mm}$
- 2 couches d'éléments

Pour les besoins de dépouillement en un nœud milieu, on définit le nœud  $NOEUMI = A + (0.0 \cdot e / 4)$  où les déformations et les contraintes sont les mêmes qu'en  $A$ .

**Conditions limites :**

```
DDL_IMPO= GROUP_NO =' FACSUP', DZ = 0
GROUP_NO =' FACINF', DZ = 0      faces AEFD ( z=0 et z=0.01 )
GROUP_NO =' FACEAB', DX = 0      face AB
FACE_IMPO =GROUP_MA =' FACEEF', DNOR = 0      face EF
PRES_REP  =GROUP_MA =' FACEAE', PRES = 60. face AE
```

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1501 nœuds  
Nombre de mailles : 480 PENTA15

## 7.3 Grandeurs testées et résultats

Résultats au point *A* :

- première colonne 3D\_INCO sans imposer  $GONF = 0$
- deuxième colonne 3D\_INCO en imposant  $GONF = 0$
- troisième colonne 3D\_INCO\_UP
- quatrième colonne 3D\_INCO\_OSGS avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance			
			1	2	3	4
$u$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$v$	'ANALYTIQUE'	$6. 10^{-5}$	0.10%	0.10%	0.10%	0,50%
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	100.	0.50%	0.50%	0.50%	6,0%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	-60.	0.50%	0.50%	0.50%	15,0%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	5.00%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	0.6	0.6	0.6	03/06/12
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1,0%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	$-6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1,0%
$\varepsilon_{zz}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$5,10^{-5}$
$\varepsilon_{eq} - I NVA\_2$	'ANALYTIQUE'	$6.92 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	8,0%
$\varepsilon_{eq} - PRIN\_1$	'ANALYTIQUE'	$-6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	8,0%
$\varepsilon_{eq} - PRIN\_2$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{eq} - PRIN\_3$	'ANALYTIQUE'	$6. 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	8,0%
$\sigma_{eq} - VMIS$	'ANALYTIQUE'	138.56	0.50%	0.50%	0.50%	10,%
$\sigma_{eq} - TRESCA$	'ANALYTIQUE'	160.	0.50%	0.50%	0.50%	10,%
$\sigma_{eq} - PRIN\_1$	'ANALYTIQUE'	-60.	0.50%	0.50%	0.50%	12,%
$\sigma_{eq} - PRIN\_2$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	5.00%
$\sigma_{eq} - PRIN\_3$	'ANALYTIQUE'	100.	0.50%	0.50%	0.50%	6,0%
$\sigma_{eq} - VMIS$	'ANALYTIQUE'	138.56	0.50%	0.50%	0.50%	10,%

Résultats au point  $F$  :

- première colonne 3D\_INCO sans imposer  $GONF=0$
- deuxième colonne 3D\_INCO en imposant  $GONF=0$
- troisième colonne 3D\_INCO\_UP
- quatrième colonne 3D\_INCO\_OSGS avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance			
			1	2	3	4
$u$	'ANALYTIQUE'	$-2.12 \cdot 10^{-5}$	0.10%	0.10%	0.10%	0,30%
$v$	'ANALYTIQUE'	$2.12 \cdot 10^{-5}$	0.10%	0.10%	0.10%	0,30%
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	50.00%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	6,0%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	0.50%
$\sigma_{xy}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%	0.50%	0.50%	1,50%
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	0.	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
$\varepsilon_{xy}$	'ANALYTIQUE'	$1.5 \cdot 10^{-4}$	0.50%	0.50%	0.50%	1,50%

Vérification du passage aux nœuds pour les nœuds milieux (uniquement pour le résultat obtenu sans imposer  $GONF=0$ ) - valeur au nœud  $NOEUMI$  :

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance ( % )
$\sigma_{xx}$	'ANALYTIQUE'	100.	0.50%
$\sigma_{yy}$	'ANALYTIQUE'	-60.	0.50%
$\sigma_{zz}$	'ANALYTIQUE'	20.	0.50%
$\varepsilon_{xx}$	'ANALYTIQUE'	$6 \cdot 10^{-4}$	0.50%
$\varepsilon_{yy}$	'ANALYTIQUE'	$-6 \cdot 10^{-4}$	0.50%

## 7.4 Remarques

Hormis pour la modélisation 3D\_INCO\_OSGS, on obtient de très bons résultats quelque soit la formulation retenue puisque pour toutes les grandeurs examinées, la différence entre la solution obtenue avec le code et la solution analytique est inférieure à 0.5%. On voit que l'écart entre les solutions obtenues en imposant ou non la condition  $tr(\boldsymbol{\varepsilon})=0$  est insignifiant.

Les résultats obtenus avec 3D\_INCO\_OSGS sont moins précis. Cela s'explique par le fait que les éléments utilisés sont linéaires. Pour retrouver un résultat plus précis, il faudrait raffiner le maillage.

## 8 Synthèse des résultats

---

Avec un coefficient de Poisson  $\nu$  très proche de 0.5, on retrouve les résultats de la solution analytique incompressible avec une différence faible. On remarque qu'il n'est pas nécessaire d'imposer explicitement la condition d'incompressibilité  $\text{tr } \varepsilon = 0$  pour obtenir de bons résultats puisque les résultats sont quasi-identiques que l'on active ou non, la condition  $GONF = 0$  avec `DDL_IMPO`.