

---

## SSLV110 - Fissure elliptique dans un milieu infini

---

### Résumé :

Il s'agit d'un test en statique pour un problème tridimensionnel. Ce test permet de calculer le taux de restitution d'énergie global et local sur le fond de fissure par la méthode thêta (commande `CALC_G`).

Les rayons des couronnes d'intégration sont variables le long de la fissure, et le taux de restitution d'énergie local est calculé suivant 3 méthodes différentes (`LEGENDRE`, `LAGRANGE` et `LAGRANGE_REGU`).

L'intérêt du test est la validation de la méthode thêta en 3D et des points suivants :

- comparaison des résultats avec une solution analytique,
- stabilité des résultats suivant les couronnes d'intégration,
- comparaison entre 3 méthodes différentes pour le calcul de  $G$  local,
- 2 cas de chargements équivalents (pression répartie et chargement volumique).

Ce test contient 5 modélisations différentes.

La modélisation E est une validation informatique de la prise en compte de différents chargements appliqués sur les lèvres de la fissure dans le calcul de  $G$ .

La modélisation F teste le calcul de  $KI$  pour une fissure non maillée (méthode X-FEM). Elle permet aussi de comparer les erreurs commises sur le calcul de  $KI$  avec l'opérateur `POST_K1_K2_K3` ou l'opérateur `CALC_G`.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Il s'agit d'une fissure elliptique plongée dans un milieu supposé infini. On ne modélise qu'un huitième d'un parallélépipède :

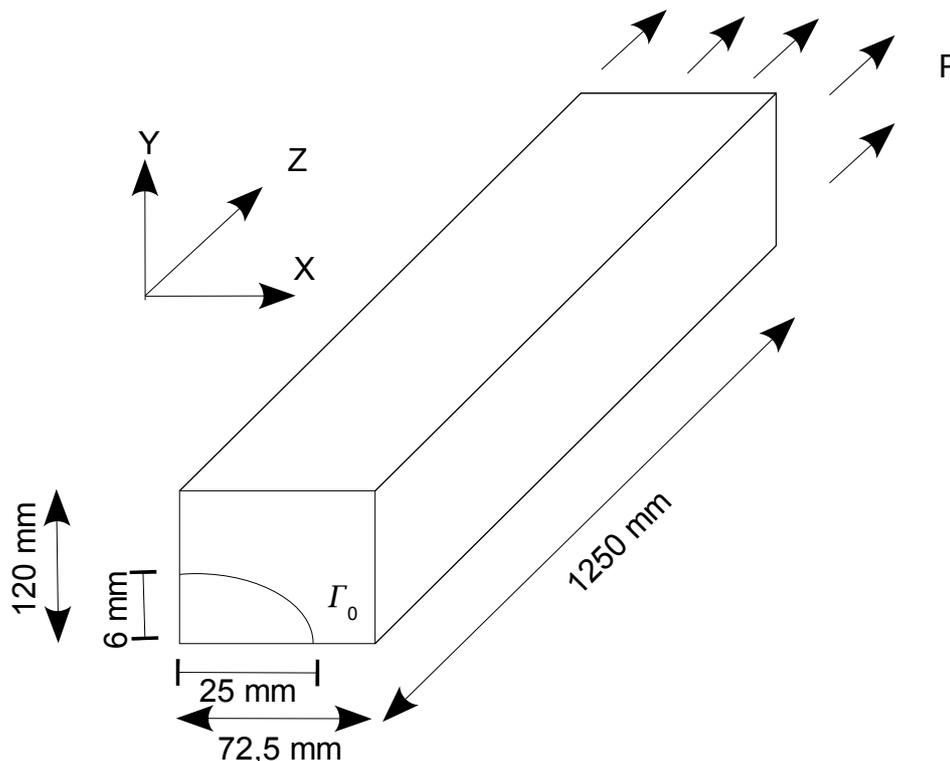


Figure 1.1-1: géométrie et fond de fissure elliptique

### 1.2 Propriétés matériaux

$$E = 210\,000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Symétrie par rapport aux 3 plans principaux :

$$U_x = 0 \text{ dans le plan } X = 0.$$

$$U_y = 0 \text{ dans le plan } Y = 0.$$

$$U_z = 0 \text{ dans le plan } Z = 0 \text{ hors de la fissure}$$

Les conditions de chargements sont soit :

$$P = 1 \text{ MPa dans le plan } Z = 1250 \text{ mm (modélisations A et B)}$$

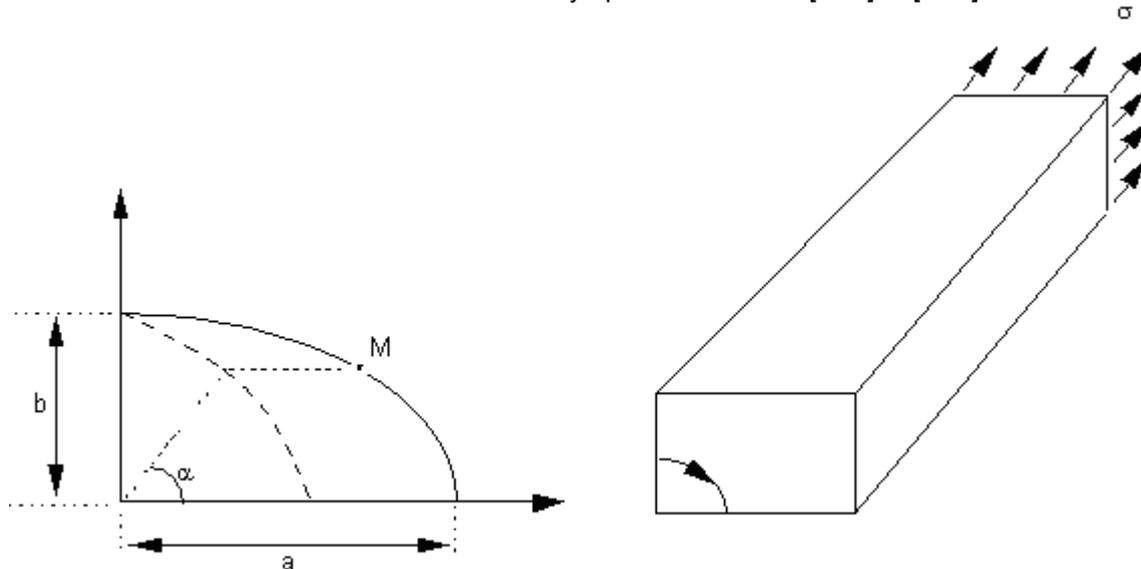
soit :

$FZ = 8.10^{-4} N/mm^3$  sur tous les éléments de volume (chargement équivalent au précédent)  
(modélisations *C* et *D*).

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est une solution analytique issue de SIH [bib1] et [bib2].



On note que l'angle  $\alpha$  désigne ici l'angle paramétrique du point  $M$  (angle par rapport à l'axe  $Ox$  du projeté de  $M$  sur le cercle de rayon  $b$ ) et non la coordonnée polaire de ce point.

Ici :  $a=25\text{ mm}$  et  $b=6\text{ mm}$ , donc  $k=0,9707728$

Les valeurs de l'intégrale elliptique  $E(k)$  sont tabulées dans [bib3], en fonction de  $\text{asin}(k)$  qui vaut ici  $76,11^\circ$ . On trouve alors :  $E(k)=1,0672$ .

D'où le facteur d'intensité des contraintes en  $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$  :  $K_I(\alpha)=4.0680 \left[ \sin^2 \alpha + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \alpha \right]^{1/4}$

Puis, à partir de la formule d'Irwin (déformation plane) :

Le taux de restitution global de l'énergie  $G_{ref}$  se calcule par intégration de  $G(\alpha)$  :

$$G_{ref}=5,76 \cdot 10^{-3} \text{ J/mm} .$$

### 2.2 Bibliographie

- 1) G.C. SIH : Mathematical Theories of Brittle Fracture - FRACTURE, vol II - Academic Press - 1968
- 2) M.K. KASSIN et G.C. SIH : Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings J. Appl. Mech., 88, 601-611, 1966.
- 3) H. TADA, P. PARIS, G. IRWIN : The Stress Analysis of Cracks Handbook - Third Edition - ASM International - 2000

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

$A = N01099$  ( $s=0.$ )  
 $B = N01259$  ( $s=26.68$ )  
 $C = N01179$  ( $s=17.8$  ;  $\alpha = \pi/4$ )

**Chargement** : Pression unitaire répartie sur la face du bloc opposée au plan de la lèvres :

$P = 1.$ MPa dans le plan  $Z = 1250.$ mm .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1716  
 Nombre de mailles et types : 304 PENTA15 et 123 HEXA20

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs testées sont :

- le taux de restitution d'énergie global  $G$ ,
- le taux de restitution d'énergie local  $g$  en tous les nœuds du fond de fissure.

Le maillage ne comprend qu'une des lèvres de la fissure, il faut donc utiliser le mot-clé 'SYME' pour multiplier automatiquement par 2 dans le calcul Aster le taux de restitution de l'énergie calculé par extension virtuelle de la lèvre unique.

De même, le  $G$  global calculé ici correspond au quart du  $G$  de référence défini précédemment, seul un huitième de parallépipède étant représenté.

Identification	Référence	% tolérance
$G$ Couronne $C_1$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	-2.1
$G$ Couronne $C_2$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	0.8
$G$ Couronne $C_3$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	-1.1
$g(A)$ couronne $C_1$ (' <b>LEGENBRE</b> ')	$7.171 \cdot 10^{-5}$	-4.8
$g(A)$ couronne $C_2$ (' <b>LEGENBRE</b> ')	$7.171 \cdot 10^{-5}$	0.95
$g(A)$ couronne $C_3$ (' <b>LEGENBRE</b> ')	$7.171 \cdot 10^{-5}$	-4.3
$g(B)$ couronne $C_1$ (' <b>LEGENBRE</b> ')	$1.721 \cdot 10^{-5}$	-13.8
$g(B)$ couronne $C_2$ (' <b>LEGENBRE</b> ')	$1.721 \cdot 10^{-5}$	-8.7
$g(B)$ couronne $C_3$ (' <b>LEGENBRE</b> ')	$1.721 \cdot 10^{-5}$	-6.9
$g(C)$ couronne $C_1$ (' <b>LEGENBRE</b> ')	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-4.3
$g(C)$ couronne $C_2$ (' <b>LEGENBRE</b> ')	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-1.7
$g(C)$ couronne $C_3$ (' <b>LEGENBRE</b> ')	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-3.9
$g(A)$ couronne $C_1$ (' <b>LAGRANGE_REGU</b> ')	$7.171 \cdot 10^{-5}$	-7.7
$g(A)$ couronne $C_2$ (' <b>LAGRANGE_REGU</b> ')	$7.171 \cdot 10^{-5}$	-3.3

$g(A)$ couronne $C_3$ ('LAGRANGE_REGU')	$7.171 \cdot 10^{-5}$	-4.3
$g(C)$ couronne $C_1$ ('LAGRANGE_REGU')	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-3.5
$g(C)$ couronne $C_2$ ('LAGRANGE_REGU')	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-1
$g(C)$ couronne $C_3$ ('LAGRANGE_REGU')	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-2.3

## 3.4 Remarque

Les résultats sont assez stables entre les couronnes sauf au point  $B$  où la variation de  $g(s)$  est plus grande et les résultats éloignés de la solution de référence. On peut expliquer cet écart par le maillage de qualité médiocre. Les lissages 'LEGENDRE' et 'LAGRANGE\_REGU' fournissent des résultats relativement proches.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

$A = N01099$  ( $s = 0.$ )

$B = N01259$  ( $s = 26.68$ )

$C = N01179$  ( $s = 17.8$ )

**Chargement** : Pression unitaire répartie sur la face du bloc opposée au plan de la lèvres :

$P = 1 \text{ MPa}$  dans le plan  $Z = 1250 \text{ mm}$ .

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1716

Nombre de mailles et types : 304 PENTA15 et 123 HEXA20

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs testées sont :

- le taux de restitution d'énergie global  $G$ ,
- le taux de restitution d'énergie local  $g$  en tous les nœuds du fond de fissure.

Le maillage ne comprend qu'une des lèvres de la fissure, il faut donc utiliser le mot-clé 'SYME' pour multiplier automatiquement par 2 dans le calcul Aster le taux de restitution de l'énergie calculé par extension virtuelle de la lèvre unique.

De même, le  $G$  global calculé ici correspond au quart du  $G$  de référence défini précédemment, seul un huitième de parallélépipède étant représenté.

Identification	Référence	% tolérance
$G$ Couronne $C_1$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	-2.1
$G$ Couronne $C_2$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	0.8
$G$ Couronne $C_3$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	-1.1
$g(A)$ couronne $C_1$	$7.171 \cdot 10^{-5}$	-0.7
$g(A)$ couronne $C_2$	$7.171 \cdot 10^{-5}$	3.9
$g(A)$ couronne $C_3$	$7.171 \cdot 10^{-5}$	3.6
$g(B)$ couronne $C_1$	$1.721 \cdot 10^{-5}$	-6.6
$g(B)$ couronne $C_2$	$1.721 \cdot 10^{-5}$	-3.4
$g(B)$ couronne $C_3$	$1.721 \cdot 10^{-5}$	-0.9
$g(C)$ couronne $C_1$	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-4.5
$g(C)$ couronne $C_2$	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-2.3
$g(C)$ couronne $C_3$	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-3.9

## Remarque

Les résultats sont meilleurs que dans la modélisation A au point  $B$ , mais la disparité entre les couronnes reste forte.

## 5 Modélisation D

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

$A = N01099$  ( $s = 0.$ )

$B = N01259$  ( $s = 26.68$ )

$C = N01179$  ( $s = 17.8$ )

**Chargement** : Force volumique  $Fz$  équivalente à une pression unitaire répartie sur la face du bloc opposée au plan de la lèvres :

FORCE\_INTERNE :  $FZ = 8.10^{-4} N/mm^3$  sur tous les éléments de volume.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1716

Nombre de mailles et types : 304 PENTA15 et 123 HEXA20

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs testées sont :

- le taux de restitution d'énergie global  $G$ ,
- le taux de restitution d'énergie local  $g$  en tous les nœuds du fond de fissure.

Le maillage ne comprend qu'une des lèvres de la fissure, il faut donc utiliser le mot-clé 'SYME' pour multiplier automatiquement par 2 dans le calcul Aster le taux de restitution de l'énergie calculé par extension virtuelle de la lèvre unique.

De même, le  $G$  global calculé ici correspond au quart du  $G$  de référence défini précédemment, seul un huitième de parallélépipède étant représenté.

Identification	Référence	% tolérance
$G$ Couronne $C_1$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	-0.2
$G$ Couronne $C_2$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	2.7
$G$ Couronne $C_3$	$1.44 \cdot 10^{-3}$	0.7
$g(A)$ couronne $C_1$	$7.171 \cdot 10^{-5}$	1.2
$g(A)$ couronne $C_2$	$7.171 \cdot 10^{-5}$	5.9
$g(A)$ couronne $C_3$	$7.171 \cdot 10^{-5}$	5.7
$g(B)$ couronne $C_1$	$1.721 \cdot 10^{-5}$	-4.9
$g(B)$ couronne $C_2$	$1.721 \cdot 10^{-5}$	-1.7
$g(B)$ couronne $C_3$	$1.721 \cdot 10^{-5}$	0.7
$g(C)$ couronne $C_1$	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-2.7
$g(C)$ couronne $C_2$	$5.215 \cdot 10^{-5}$	0.4
$g(C)$ couronne $C_3$	$5.215 \cdot 10^{-5}$	-2.1

### Remarque

Les résultats sont meilleurs que dans la modélisation  $C$  au point  $B$ .

## 6 Modélisation E

Le maillage est le même que celui de la modélisation D.

Le but de cette modélisation est uniquement informatique : tester que la commande `CALC_G` fonctionne bien pour des charges de pression sur les lèvres de la fissure. La pression est modélisée de 3 manières différentes :

- une pression fonction (`AFFE_CHAR_MECA_F / PRES_REP`),
- une force répartie constante (`AFFE_CHAR_MECA / FORCE_FACE`)
- et une force répartie fonction (`AFFE_CHAR_MECA_F / FORCE_FACE`).

À noter qu'une seule résolution mécanique est effectuée avec une charge de pression constante, et que les 3 différentes charges détaillées ci-dessus sont transmises à 3 `CALC_G` différents via le mot-clé `EXCIT`.

### 6.1 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs testées sont :

- le taux de restitution d'énergie global  $G$ ,
- le taux de restitution d'énergie local  $g$  au nœud A du fond de fissure (en  $s=0$ ).

Le choix des couronnes pour la méthode thêta est celui de la couronne n°2 de la modélisation D (couronne  $C_2$ ).

Le  $G$  global calculé ici correspond au quart du  $G$  de référence défini précédemment car le chargement est symétrique.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$G$ pression fonction	'ANALYTIQUE'	$1,44 \cdot 10^{-3}$	1.00%
$G$ pression fonction	'NON_REGRESSION'	$1,449052 \cdot 10^{-3}$	$10^{-4}\%$
$G$ force constante	'AUTRE_ASTER'	$1,449052 \cdot 10^{-3}$	$10^{-4}\%$
$G$ force fonction	'AUTRE_ASTER'	$1,449052 \cdot 10^{-3}$	$10^{-4}\%$
$g(A)$ pression fonction	'ANALYTIQUE'	$7,16 \cdot 10^{-5}$	3.00%
$g(A)$ pression fonction	'NON_REGRESSION'	$6,98287 \cdot 10^{-5}$	$10^{-4}\%$
$g(A)$ force constante	'AUTRE_ASTER'	$6,98287 \cdot 10^{-5}$	$10^{-4}\%$
$g(A)$ force fonction	'AUTRE_ASTER'	$6,98287 \cdot 10^{-5}$	$10^{-4}\%$

## 7 Modélisation F

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la fissure n'est pas maillée. On utilise la méthode X-FEM.

Compte tenu des symétries du problème, il est possible de ne représenter qu'un huitième de de la structure (comme cela est fait dans la modélisation A). Cependant, avec la méthode X-FEM , il n'est pas possible de représenter une fissure qui se situe dans un plan de symétrie (sur la bord du domaine modélisé). On modélise donc dans cette modélisation un quart de la structure, c'est-à-dire une portion de  $90^\circ$  de l'ellipse.

Le maillage est composé de mailles HEXA8, uniformément réparties suivant les axes  $X$  et  $Y$  et réparties en progression géométrique suivant l'axe  $Z$  de manière à ce que dans le plan  $Z=0$  , les mailles sont environ des cubes de coté  $10\text{ mm}$  .

Des conditions de symétrie sont appliquées sur les faces en  $X=0$  et  $Y=0$  . Le mode rigide suivant l'axe  $Z$  est bloqué en bloquant le déplacement suivant  $Z$  du point situé en  $(0,0,-1250\text{ mm})$  .

**Chargement** : Pression unitaire répartie sur les deux faces normales du bloc :

$$P=1\text{ MPa dans les plan } Z=\pm 1250\text{ mm} .$$

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 21000

Nombre de mailles et types : 13000 PENTA6 et 12500 HEXA8 (maillage linéaire)



Figure 7.2-1 : maillage initial,  
vue d'ensemble

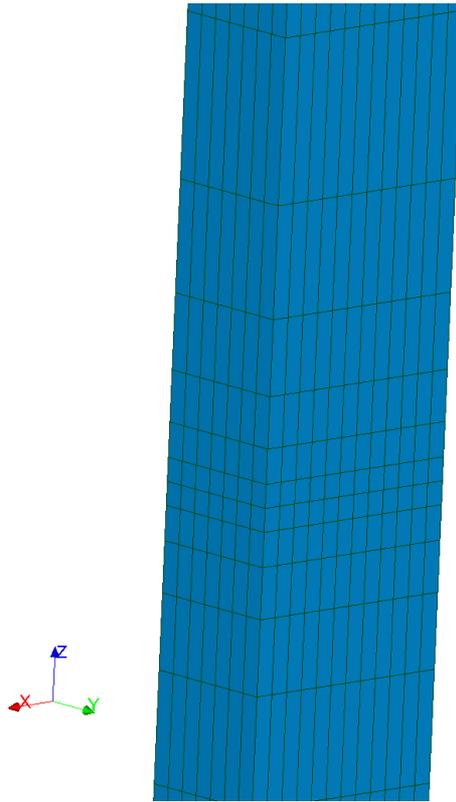


Figure 7.2-2: maillage initial, zoom dans le plan milieu

Comme ce maillage initial est bien trop grossier pour un calcul précis des facteurs d'intensité de contraintes le long du fond de la fissure, une procédure de raffinement automatique des mailles proches du fond de fissure est utilisée, telle que préconisée dans la documentation [U2.05.02].

La taille cible des mailles souhaitée est  $b/9$ . Cela va induire 5 raffinements successifs. La taille des mailles du maillage ainsi raffiné est alors  $h=0,39\text{ mm}$ .

Le maillage raffiné (celui sur lequel le calcul mécanique est effectué) a pour caractéristiques :

- 26484 noeuds
- 7720 TETRA4, 10650 PYRAM5 et 20080 HEXA8

Ce maillage induit 99 points le long du fond de fissure et compte-tenu des conditions de blocage 118404 équations dans le système à résoudre

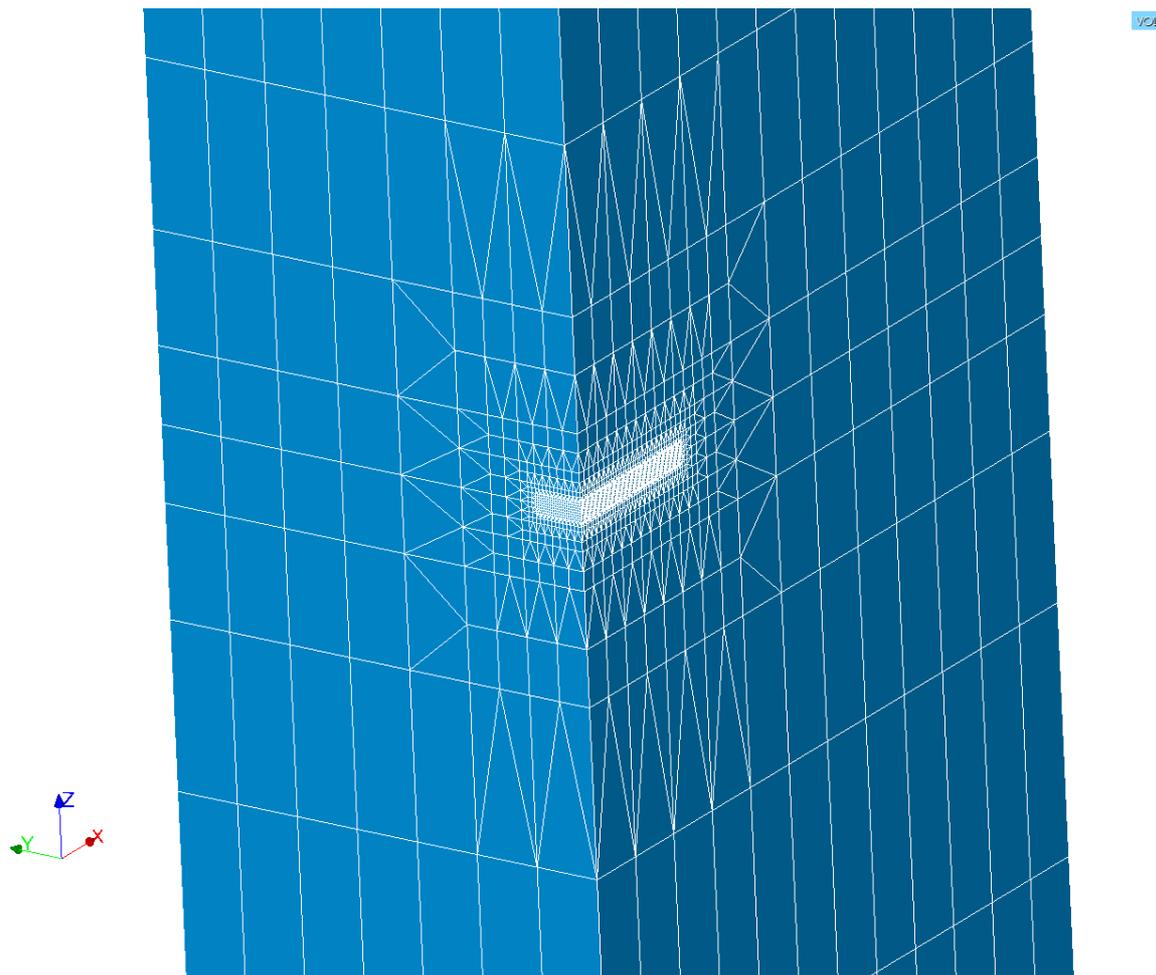


Figure 7.2-3: maillage raffiné, zoom sur la zone proche de la fissure

## 7.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs testées sont les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  le long du fond de fissure, calculés soit par `CALC_G`, soit par `POST_K1_K2_K3`.

Pour `CALC_G`, la couronne d'intégration vaut  $2h - 4h$ . Le lissage par défaut (Legendre) est utilisé.

Pour `POST_K1_K2_K3`, l'abscisse curviligne maximale vaut  $4h$ . Afin de réduire les temps de calcul de `POST_K1_K2_K3`, on ne post-traite que sur 20 points répartis uniformément le long du fond de fissure.

Notons que le temps de calcul pour le lissage Legendre de `CALC_G` est insensible à ce nombre.

On teste les valeurs aux points  $A$  ( $s=0$ ) et  $B$  ( $s=26,7$ ).

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
<code>CALC_G</code> : $K_I(A)$	'ANALYTIQUE'	1,9929	2.0%
<code>CALC_G</code> : $K_I(B)$	'ANALYTIQUE'	4.068	2.0%
<code>POST_K1_K2_K3</code> : $K_I(A)$	'ANALYTIQUE'	1,9929	6.0%
<code>POST_K1_K2_K3</code> : $K_I(B)$	'ANALYTIQUE'	4.068	6.0%

Pour l'opérateur `CALC_G`, les lissages de type `LAGRANGE` ne permettent pas d'avoir des résultats facilement exploitables ; un lissage de type `LEGENDRE` est donc à privilégier.



## 8 Synthèse des résultats

---

Calcul de  $G$  ou de  $K$  local :

- pour une fissure maillée, les 3 méthodes (LEGENDRE, LAGRANGE et LAGRANGE\_REGU) donnent sensiblement les mêmes résultats (moins de 5 % d'erreur par rapport à la solution analytique) sauf au point  $B$  (point extrémité de l'ellipse sur le grand axe) où la méthode Lagrange est la plus précise ;
- cas de charge : les valeurs obtenues avec le chargement volumique sont légèrement supérieures à celles obtenues avec contraintes imposées (y compris pour les valeurs de  $G$ ). Les différences sont minimales et dues aux intégrations numériques différentes sur le terme de volume et le terme de bord ;
- la méthode X-FEM permet d'évaluer les facteurs d'intensité des contraintes  $K$  sur un maillage non fissuré avec une erreur inférieure à 10% .