
SSLS133 - Plaque en flexion à épaisseur variable

Résumé :

Ce test représente un calcul quasi-statique d'une plaque en flexion à épaisseur variable. Elle est encadrée à une extrémité, et soumise à une force verticale à l'autre extrémité. Ce test permet de tester les éléments de coque volumique SHB8 et SHB20 à gérer les variations d'épaisseurs. Quatre modélisations sont testées :

- Les éléments finis SHB8 pour une variation linéaire de l'épaisseur de la plaque (modélisation *A*).
- Les éléments finis SHB20 pour une variation linéaire de l'épaisseur de la plaque (modélisation *B*).
- Les éléments finis SHB8 pour une variation quadratique de l'épaisseur de la plaque (modélisation *C*).
- Les éléments finis SHB20 pour une variation quadratique de l'épaisseur de la plaque (modélisation *D*).

Les déplacements obtenus sont comparés à la solution analytique élastique d'une poutre en flexion. Ce test permet de montrer les capacités et les limites des éléments SHB8 et SHB20 à gérer les variations d'épaisseurs.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

1.1.1 Plaque à épaisseur variant linéairement

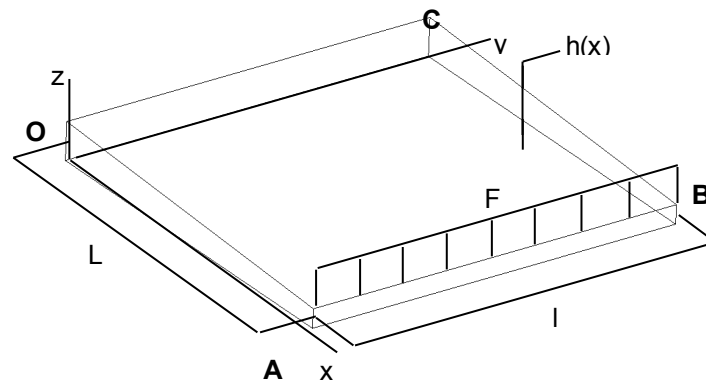


Figure 1.1.1-1 :

Longueur $L = 100\text{ m}$, largeur $l = 100\text{ m}$.

L'épaisseur h varie linéairement :

$$h(x) = ax + b$$

Nous posons $h(x=0) = h_1 = 10\text{ m}$ et $h(x=L) = h_2 = 5\text{ m}$ ce qui nous donne :

$$a = (h_2 - h_1)/L \text{ et } b = h_1$$

1.1.2 Plaque à épaisseur variant quadratiquement

L'épaisseur h varie de manière quadratique :

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

Nous posons $h(x=0) = h_1 = 10\text{ m}$, $h(x=L) = h_2 = 5\text{ m}$ et $h(x=L/2) = h_{12} = 6,25\text{ m}$ ce qui nous donne

$$a = (2(h_1 + h_2) - 4h_{12})/L^2 , b = (4h_{12} - h_2 - 3h_1)/L \text{ et } c = h_1$$

1.2 Propriétés de matériaux

Module d'Young : $E = 2.10^{11}\text{ Pa}$

Coefficient de Poisson : $\nu = 0.0$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites :

Encastrée sur le côté OC : $u=v=w=0$, $\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$

Chargement :

A l'extrémité AB , une charge uniformément répartie de résultante :

Force parallèle à l'axe Z ; $F_z=1\text{ N}$

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Les résultats de référence sont obtenus par la théorie des poutres élastiques.

Dans le cas d'une variation linéaire de l'épaisseur, le déplacement vertical à l'extrémité AB est donné par [1] :

$$w(x) = -\frac{FL^2}{2EI_{y_1}c^3} \left(2Lcx + c^2x^2 - c^3x^2 + 2L(L+cx) \ln\left(\frac{L}{L+cx}\right) \right)$$

Avec

$$c = \left(\frac{I_{y_2}}{I_{y_1}} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \quad \text{et} \quad I_{y_i} = \frac{bh_i^3}{12}$$

Dans le cas d'une variation quadratique de l'épaisseur, il est possible de trouver une formule exacte du déplacement. Cependant son expression générale est suffisamment complexe pour ne pas pouvoir être écrite ici. Nous avons formulé la fonction approximative du déplacement vertical selon x de notre cas :

$$w(x) = 3 \cdot 10^{-8} \frac{2x-200}{x^2-200x+20000} + 6 \cdot 10^{-10} \arctan(0.01x-1) - 3 \cdot 10^{-12}x + 7.71238 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

Déplacement des points A et B suivant Z .

2.3 Références bibliographiques

[1] [V3.01.400] SSLL400 – Poutre de section variable, soumise à des efforts ponctuels ou répartis.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB8 et épaisseur variant linéairement

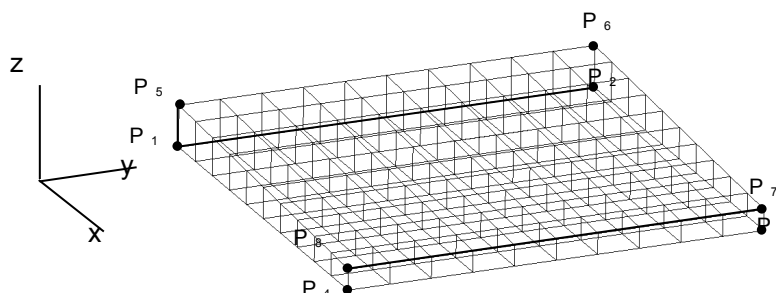


Figure 3.1-1 : Maillage de la modélisation A

Découpage : un maillage régulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage régulier :

100 mailles SHB8 : 10 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Conditions aux limites :

Tous les nœuds à l'intérieur du côté $P_1 P_2 P_6 P_5$: déplacement bloqué suivant x

Tous les nœuds sur l'arête $P_1 P_5$: déplacement bloqué suivant y

Tous les nœuds sur l'arête $P_2 P_1$: déplacement bloqué suivant z

Chargement :

Force linéairement répartie sur l'arête $P_8 P_7$: $F = 1$

Nom des nœuds :

Point P_1	N022	Point P_5	N020
Point P_2	N002	Point P_6	N001
Point P_3	N102	Point P_7	N100
Point P_4	N172	Point P_8	N171

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 242

Nombre de mailles et types : 100 SHB8

3.3 Grandeurs testées et résultats

Maillage régulier :

Point	Grandeur en unité	Référence	Aster	% différence
P_7	déplacement W (m)	$3.2710 \cdot 10^{-10}$	$3.2711 \cdot 10^{-10}$	+0.004
P_8	déplacement W (m)	$3.2710 \cdot 10^{-10}$	$3.2711 \cdot 10^{-10}$	+0.004

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB20 et épaisseur variant linéairement

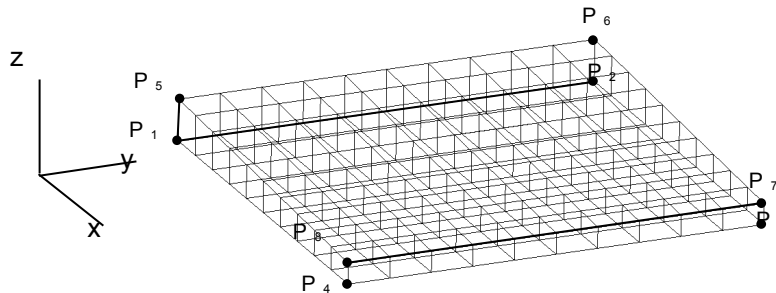


Figure 4.1-1 : Maillage de la modélisation B

Découpage : un maillage régulier est considéré dans cette modélisation.

Maillage régulier :

100 mailles SHB20 : 10 selon la largeur, 10 selon la longueur, 1 selon l'épaisseur

Conditions aux limites :

Tous les nœuds à l'intérieur du côté $P_1 P_2 P_6 P_5$: déplacement bloqué suivant x

Tous les nœuds sur l'arête $P_1 P_5$: déplacement bloqué suivant y

Tous les nœuds sur l'arête $P_2 P_1$: déplacement bloqué suivant z

Chargement :

Force linéairement répartie sur l'arête $P_8 P_7$: $F=1$

Nom des nœuds :

Point P_1	N347	Point P_5	N340
Point P_2	N579	Point P_6	N572
Point P_3	N006	Point P_7	N002
Point P_4	N074	Point P_8	N067

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 803

Nombre de mailles et types : 100 SHB20

4.3 Grandeurs testées et résultats

Maillage régulier :

Point	Grandeur en unité	Référence	Aster	% différence
P_7	déplacement W (m)	$3.2710 \cdot 10^{-10}$	$3.2866 \cdot 10^{-10}$	+0.476
P_8	déplacement W (m)	$3.2710 \cdot 10^{-10}$	$3.2866 \cdot 10^{-10}$	+0.476

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB8 et épaisseur variant quadratiquement

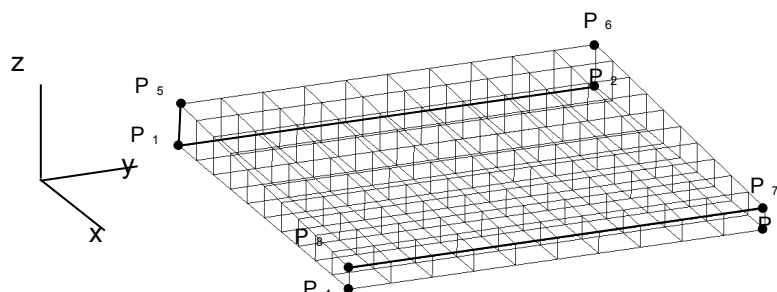


Figure 5.1-1 : Maillage de la modélisation C

Les caractéristiques sont les mêmes que pour la modélisation A

Nom des nœuds :

Point P ₁	N005	Point P ₅	N003
Point P ₂	N006	Point P ₆	N004
Point P ₃	N008	Point P ₇	N002
Point P ₄	N007	Point P ₈	N001

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est le même que la modélisation A à l'exception de l'épaisseur qui varie ici de manière quadratique.

5.3 Grandeurs testées et résultats

Maillage régulier :

Point	Grandeur en unité	Référence	Aster	% différence
P ₇	déplacement W (m)	4.7124 10 ⁻¹⁰	5.1212 10 ⁻¹⁰	+8.67
P ₈	déplacement W (m)	4.7124 10 ⁻¹⁰	5.1212 10 ⁻¹⁰	+8.67

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Élément SHB20 et épaisseur variant quadratiquement

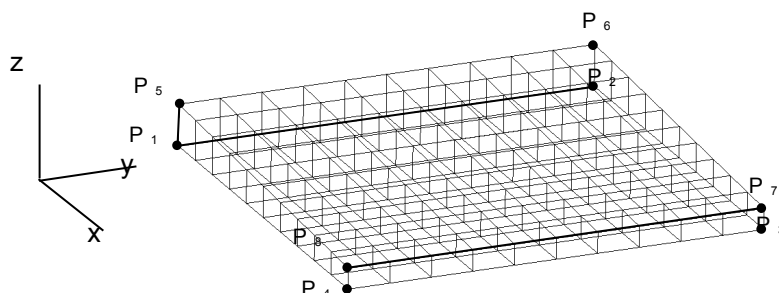


Figure 6.1-1 : Maillage de la modélisation D

Les caractéristiques sont les mêmes que pour la modélisation *B*

Nom des nœuds :

Point P ₁	N005	Point P ₅	N003
Point P ₂	N006	Point P ₆	N004
Point P ₃	N008	Point P ₇	N002
Point P ₄	N007	Point P ₈	N001

6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est le même que la modélisation *B* à l'exception de l'épaisseur qui varie ici de manière quadratique.

6.3 Grandeurs testées et résultats

Maillage régulier :

Point	Grandeur en unité	Référence	Aster	% différence
P ₇	déplacement W (<i>m</i>)	4.7124 10 ⁻¹⁰	4.6754 10 ⁻¹⁰	-0.784
P ₈	déplacement W (<i>m</i>)	4.7124 10 ⁻¹⁰	4.6754 10 ⁻¹⁰	-0.784

7 Synthèse des résultats

Dans le cas d'une variation linéaire de l'épaisseur de la plaque, de bonnes solutions sont obtenues quelque soit l'élément fini utilisé (SHB8 ou SHB20).

Lorsque la variation géométrique est d'ordre quadratique, les éléments SHB20 fournissent des résultats plus précis (erreur $< 1\%$) que les éléments SHB8 (erreur $< 9\%$).