

SSLS127 – Flexion d'une dalle en béton armé (modèle GLRC_DAMAGE) appuyée sur 4 cotés : régime de plaque élastique

Résumé :

Ce test représente le calcul d'une dalle en béton armé, en flexion, soumise à une pression. Il permet de valider la modélisation DKTG avec le modèle GLRC_DAMAGE pour le comportement élastique linéaire et la modélisation Q4GG avec le modèle ELAS. La dalle est en configuration dalle : appuis simples sur les quatre cotés.

Quatre modélisations sont effectuées :

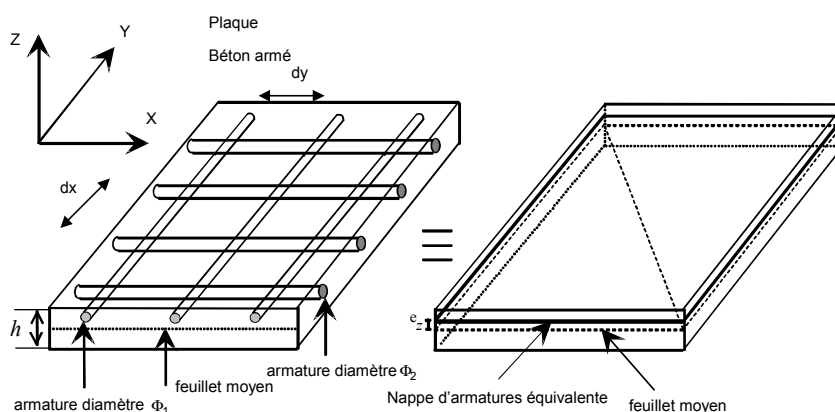
- 1) Modélisation A permet de tester le modèle DKTG avec des TRIA3,
- 2) Modélisation B permet de tester le modèle DKTG avec des QUAD4.
- 3) Modélisation C permet de tester le modèle Q4GG avec des TRIA3,
- 4) Modélisation D permet de tester le modèle Q4GG avec des QUAD4.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Dalle carrée, de longueur $l=1.8\text{ m}$, d'épaisseur $h=0.12\text{ m}$, en appui simple sur les quatre bords. Le ferrailage de flexion est parallèle aux bords; il est identique sur chacune des deux faces et dans chacun des deux sens (dx , dy étant les espacements des fers dans les directions x et y). L'enrobage des fers longitudinaux les plus proches des faces est de 22 mm . L'enrobage des fers par rapport aux bords latéraux de la dalle de 2 cm est négligé. Le tableau ci-après récapitule les données du ferrailage. Le pourcentage géométrique d'acier μ est donné pour une face dans un sens.

Diamètre des armatures	Espacement	Section acier/section du béton	distance grille/surface moyenne de la dalle
$\Phi=0,01\text{ m}$	$dx=dy=0,1\text{ m}$	$\mu=0,65$	$e_s=\pm 0,038\text{ m}$



On note $a_x = \frac{A_x}{d_x}$ et $a_y = \frac{A_y}{d_y}$ les taux de ferrailage (ici : $a_x = a_y = 7,854 \cdot 10^{-4}\text{ m}$), A_x (A_y) étant l'aire de la section d'une barre de fer dans la direction x (y) ; e_s est la distance des nappes à la surface moyenne.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés mécaniques des aciers sont les suivantes :

Module d'Young E_a	Coefficient de Poisson	Limite élastique à 0.2 % σ_y	Limite de rupture σ_r	Pente d'écrouissage	Allongement à rupture
210000 MPa	0,3	500 MPa	570 MPa	473 MPa	15 %

Celles du béton sont les suivantes :

Module d'Young E_b	Coefficient de Poisson	Résistance en compression σ_c	Résistance en traction σ_t
35700 MPa	0,22	52,5 MPa	4,4 MPa

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Les conditions aux limites se résument à des appuis simples : déplacement vertical bloqué et rotations libres sur les quatre bords de la dalle.
- Pression uniforme $p = 0,01 \text{ MPa}$

1.4 Conditions initiales

Sans objet.

2 Solution de référence

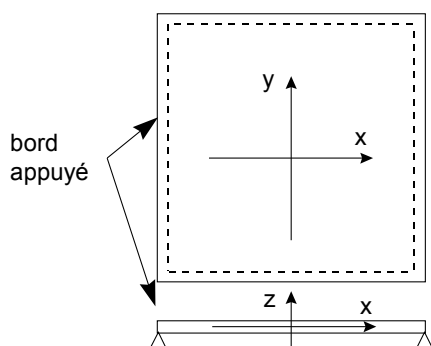
2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Les relations élastiques, reliant les efforts membranaires N et de flexion M aux déformations membranaires ϵ et les courbures κ et tenant compte de deux grilles symétriques, s'écrivent :

$$N = \left(\frac{E_b h}{1 - \nu_b^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_b & 0 \\ \nu_b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_b}{2} \end{bmatrix} + 2 E_a \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \epsilon$$

$$M = \left(\frac{E_b h^3}{12(1 - \nu_b^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_b & 0 \\ \nu_b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_b}{2} \end{bmatrix} + 2 E_a e_s^2 \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \kappa$$

S'agissant d'une configuration dalle, on affecte au béton le coefficient de Poisson habituel $\nu_b = 0,22$. La dalle est simplement appuyée sur les quatre lisières :



La raideur de flexion équivalente est :

$$D_{eq} = \frac{E_b h^3}{12(1 - \nu_b^2)} + 2 E_a e_s^2 a_x,$$

soit ici : $D_{eq} = 5,8786 \text{ MNm}$;

$$\text{De plus : } \nu_{eq} = \frac{\nu_b E_b h^3}{12(1 - \nu_b^2) D_{eq}},$$

soit : $\nu_{eq} = 0,2022$

Grandeur	Expression
Flèche au centre sous pression [2]	$w = \frac{0,0464 p l^4}{12(1 - \nu_{eq}^2) D_{eq}}$
Courbure au centre [2]	$\kappa_{xx} = \kappa_{yy} = \frac{0,04784 p l^2}{(1 + \nu_{eq}) D_{eq}}$
Moment global au centre [2]	$M_{xx} = M_{yy} = 0,04784 p l^2$

2.2 Résultats de référence

- Flèche au centre sous pression : $w = 6,926 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
- Courbure au centre : $\kappa_{xx} = \kappa_{yy} = 2,193 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$
- Moment global au centre : $M_{xx} = M_{yy} = 1550 \text{ Nm/ml}$

2.3 Incertitude sur la solution

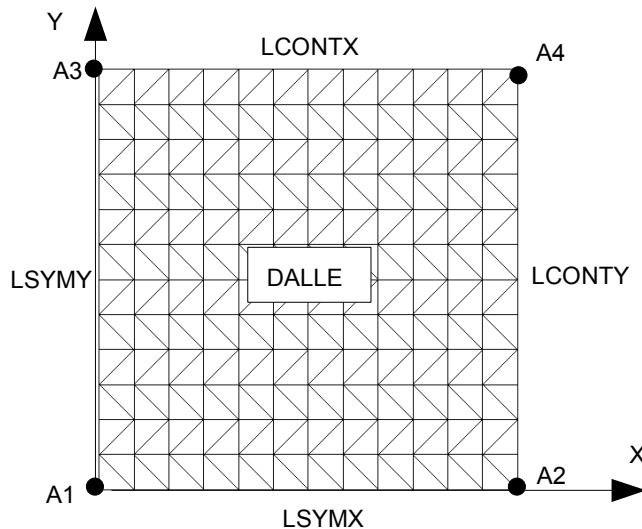
Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

- [1] KOEHLIN P., MOULIN S., " Modèle de comportement global des plaques en béton armé sous chargement dynamique de flexion : Loi GLRC", Note EDF/R&D/AMA HT-62/01/028A.
- [2] J.Dulac, "Comportement dynamique élasto-plastique des dalles en béton armé. Essais CEMETE – Décembre 1979– Dalles 8 à 12" : Note EDF : ESE/GC/82/13/A

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation Q4GG (TRIA3)

- Conditions aux limites:
 - . Coté A2A4 : $DZ=0$
- Conditions de symétrie
 - . Coté A1A2 : $DY=DRX=0$
 - . Coté A1A3 : $DX=DRY=0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ($X=0$) et ($Y=0$), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169

Nombre de mailles et type : 288 TRIA3

3.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$w(x=0, y=0)$	$DZ(AI)$	'ANALYTIQUE'	$6,926.10^{-5}$	12.00%
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(AI)$	'ANALYTIQUE'	1550	8.00%
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(AI)$	'ANALYTIQUE'	1550	8.00%
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(AI)$	'ANALYTIQUE'	$2,193.10^{-4}$	8.00%
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(AI)$	'ANALYTIQUE'	$2,193.10^{-4}$	8.00%

Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques $\alpha=33^\circ$ et $\beta=12^\circ$

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(AI)$	'ANALYTIQUE'	1550.0	8.%
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(AI)$	'ANALYTIQUE'	1550.0	8.%
$M_{xy}(x=0, y=0)$	$MXY(AI)$	'ANALYTIQUE'	0.	2.
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(AI)$	'ANALYTIQUE'	$2.193 \cdot 10^{-4}$	3.%
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(AI)$	'ANALYTIQUE'	$2.193 \cdot 10^{-4}$	3.%
$\kappa_{xy}(x=0, y=0)$	$KXY(AI)$	'ANALYTIQUE'	0.	0.001

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance %
--------	----------------	-------------------	-----------	-------------

M_{xx}	MXX	$M266$	Point 3	'NON_REGRESSION'	1445.794	1.e-6
M_{yy}	MYY	$M266$	Point 3	'NON_REGRESSION'	1447.847	1.e-6
M_{xy}	MXY	$M266$	Point 3	'NON_REGRESSION'	0.526	1.e-6
κ_{xx}	KXX	$M266$	Point 3	'NON_REGRESSION'	$2.14096 \cdot 10^{-4}$	1.e-6
κ_{yy}	KYY	$M266$	Point 3	'NON_REGRESSION'	$2.14565 \cdot 10^{-4}$	1.e-6
κ_{xy}	KXY	$M266$	Point 3	'NON_REGRESSION'	$1.2018 \cdot 10^{-7}$	1.e-6

3.4 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticité suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec $\nu_b=0,22$:

$$\begin{aligned}
 &1) \text{ Matrice d'élasticité en membrane : } \begin{bmatrix} 4832 & 990,4 & 0 \\ 990,4 & 4832 & 0 \\ 0 & 0 & 1756 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m} \\
 &2) \text{ Matrice d'élasticité en flexion : } \begin{bmatrix} 5,879 & 1,188 & 0 \\ 1,188 & 5,879 & 0 \\ 0 & 0 & 2,107 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m}
 \end{aligned}$$

Pour être certain de rester dans le domaine élastique, les limites élastiques exprimées dans le repère d'orthotropie, sont fixées arbitrairement à une valeur très élevée:

1. Limites élastiques en flexion positive :

Direction x : $1 \cdot 10^{10}$ MNm/ml

Direction y : $1 \cdot 10^{10}$ MNm/ml

2. Limites élastiques en flexion négative :

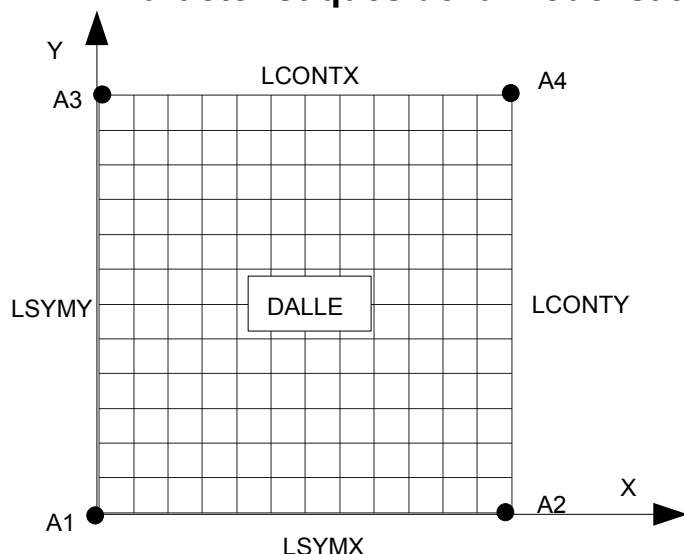
Direction x : $-1 \cdot 10^{10}$ MNm/ml

Direction y : $-1 \cdot 10^{10}$ MNm/ml

Comme la structure reste dans le domaine élastique, le coefficient de rappel cinématique (constante de Prager) peut prendre une valeur quelconque.

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation Q4GG (QUAD4)

- Conditions aux limites:

- . Coté A2A4 : $DZ=0$
- . Coté A3A4 : $DZ=0$

- Conditions de symétrie

- . Coté A1A2 : $DY=DRX=0$
- . Coté A1A3 : $DX=DRY=0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ($X=0$) et ($Y=0$), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169

Nombre de mailles et type : 144 QUAD4

4.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$w(x=0, y=0)$	$DZ(A1)$	'ANALYTIQUE'	$6,926.10^{-5}$	12.00%
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	1550	8.00%
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(A1)$	'ANALYTIQUE'	1550	8.00%
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2,193.10^{-4}$	8.00%
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2,193.10^{-4}$	8.00%

Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques $\alpha=33^\circ$ et $\beta=12^\circ$.

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	1550.0	8. %
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(A1)$	'ANALYTIQUE'	1550.0	8. %
$M_{xy}(x=0, y=0)$	$MXY(A1)$	'ANALYTIQUE'	0.	0.01
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.193 \cdot 10^{-4}$	3. %
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.193 \cdot 10^{-4}$	3. %
$\kappa_{xy}(x=0, y=0)$	$KXY(A1)$	'ANALYTIQUE'	0.	0.001

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance %
--------	----------------	-------------------	-----------	-------------

M_{xx}	MXX	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	1444.999	1.e-10
M_{yy}	$MY Y$	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	1447.976	1.e-10
M_{xy}	MXY	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	-0.6626	1.e-10
κ_{xx}	KXX	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	$2.1394 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{yy}	KYY	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	$2.1462 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{xy}	KXY	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	$-1.5151 \cdot 10^{-7}$	1.e-10

4.4 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticité suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec $\nu_b=0,22$:

- Matrice d'élasticité en membrane :
$$\begin{bmatrix} 4832 & 990,4 & 0 \\ 990,4 & 4832 & 0 \\ 0 & 0 & 1756 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m}$$
- Matrice d'élasticité en flexion :
$$\begin{bmatrix} 5,879 & 1,188 & 0 \\ 1,188 & 5,879 & 0 \\ 0 & 0 & 2,107 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m}$$

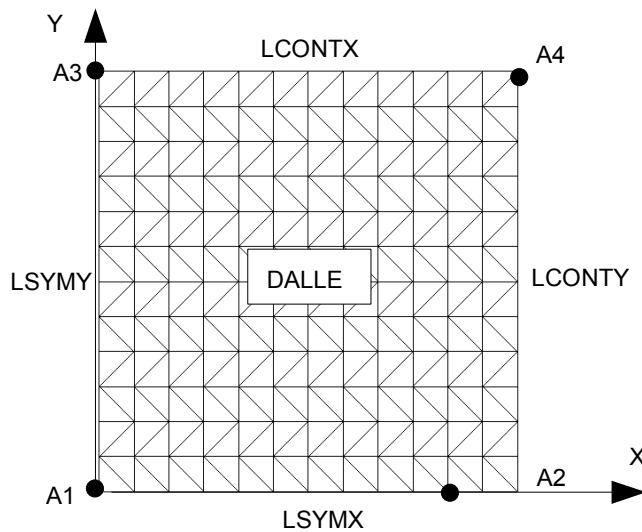
Pour être certain de rester dans le domaine élastique, les limites élastiques exprimées dans le repère d'orthotropie, sont fixées arbitrairement à une valeur très élevée:

- Limites élastiques en flexion positive :
Direction x : $1 \cdot 10^{10} \text{ MNm/ml}$
Direction y : $1 \cdot 10^{10} \text{ MNm/ml}$
- Limites élastiques en flexion négative :
Direction x : $-1 \cdot 10^{10} \text{ MNm/ml}$
Direction y : $-1 \cdot 10^{10} \text{ MNm/ml}$

Comme la structure reste dans le domaine élastique, le coefficient de rappel cinématique (constante de Prager) peut prendre une valeur quelconque.

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation Q4GG (TRIA3)

- Conditions aux limites:
 - . Coté $A2A4$: $DZ=0$
- Conditions de symétrie
 - . Coté $A1A2$: $DY=DRX=0$
 - . Coté $A1A3$: $DX=DRY=0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ($X=0$) et ($Y=0$), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169

Nombre de mailles et type : 288 TRIA3

5.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur	Identification	Type de Référence	Référence	% Tolérance
$w(x=0, y=0)$	$DZ(A1)$	'ANALYTIQUE'	$6,926.10^{-5}$	20.00%
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	1550	8 %
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(A1)$	'ANALYTIQUE'	1550	8 %
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2,193.10^{-4}$	8 %
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2,193.10^{-4}$	8 %

Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques $\alpha=33^\circ$ et $\beta=12^\circ$

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	1550.0	4.5%
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(A1)$	'ANALYTIQUE'	1550.0	4.5%
$M_{xy}(x=0, y=0)$	$MXY(A1)$	'ANALYTIQUE'	0.	0.2
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.193 \cdot 10^{-4}$	2.%
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.193 \cdot 10^{-4}$	2.%
$\kappa_{xy}(x=0, y=0)$	$KXY(A1)$	'ANALYTIQUE'	0.	0.001

						%
M_{xx}	MXX	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	1499.292	1.e-6
M_{yy}	MYY	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	1499.390	1.e-6
M_{xy}	MXY	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	0.11	1.e-6
κ_{xx}	KXX	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	$2.221\ 10^{-4}$	1.e-6
κ_{yy}	KYY	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	$2.221\ 10^{-4}$	1.e-6
κ_{xy}	KXY	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	$2.5\ 10^{-8}$	1.e-6

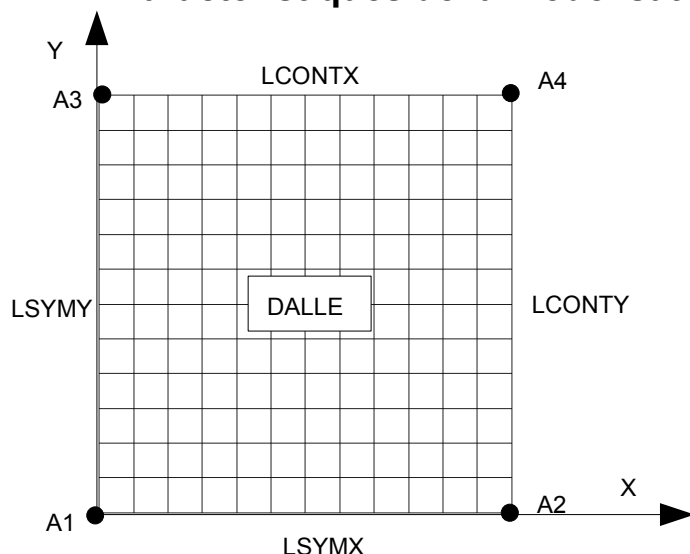
5.4 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticité suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec $\nu_b=0,22$:

- Matrice d'élasticité en membrane :
$$\begin{bmatrix} 4832 & 990,4 & 0 \\ 990,4 & 4832 & 0 \\ 0 & 0 & 1756 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m}$$
- Matrice d'élasticité en flexion :
$$\begin{bmatrix} 5,879 & 1,188 & 0 \\ 1,188 & 5,879 & 0 \\ 0 & 0 & 2,107 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m}$$

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation Q4GG (QUAD4)

- Conditions aux limites:

- . Coté A2A4 : $DZ=0$
- . Coté A3A4 : $DZ=0$

- Conditions de symétrie

- . Coté A1A2 : $DY=DRX=0$
- . Coté A1A3 : $DX=DRY=0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ($X=0$) et ($Y=0$), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169

Nombre de mailles et type : 144 QUAD4

6.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur	Identification	Type de Référence	Référence	% Tolérance
$w(x=0, y=0)$	$DZ(AI)$	'ANALYTIQUE'	$6,926.10^{-5}$	20.00%
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(AI)$	'ANALYTIQUE'	1550	8 %
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYI(AI)$	'ANALYTIQUE'	1550	8 %
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(AI)$	'ANALYTIQUE'	$2,193.10^{-4}$	8 %
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYI(AI)$	'ANALYTIQUE'	$2,193.10^{-4}$	8 %

Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques $\alpha=33^\circ$ et $\beta=12^\circ$.

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(AI)$	'ANALYTIQUE'	1550.0	4.5%
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYI(AI)$	'ANALYTIQUE'	1550.0	4.5%
$M_{xy}(x=0, y=0)$	$MXY(AI)$	'ANALYTIQUE'	0.	0.001
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(AI)$	'ANALYTIQUE'	$2.193 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYI(AI)$	'ANALYTIQUE'	$2.193 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
$\kappa_{xy}(x=0, y=0)$	$KXY(AI)$	'ANALYTIQUE'	0.	0.001

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance %
--------	----------------	-------------------	-----------	-------------

M_{xx}	MXX	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	1505.472	1.e-10
M_{yy}	MYY	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	1508.529	1.e-10
M_{xy}	MXY	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	-0.68	1.e-10
κ_{xx}	KXX	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	$2.2290 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{yy}	KYY	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	$2.2359 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{xy}	KXY	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	$-1.56 \cdot 10^{-7}$	1.e-10

6.4 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticité suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec $\nu_b=0,22$:

- Matrice d'élasticité en membrane :
$$\begin{bmatrix} 4832 & 990,4 & 0 \\ 990,4 & 4832 & 0 \\ 0 & 0 & 1756 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m}$$
- Matrice d'élasticité en flexion :
$$\begin{bmatrix} 5,879 & 1,188 & 0 \\ 1,188 & 5,879 & 0 \\ 0 & 0 & 2,107 \end{bmatrix} 10^6 \text{ N/m}$$

7 Synthèse des résultats

En comparant les résultats des quatre modélisations à la solution analytique, on observe :

- DKTG : au maximum 10,7 % d'écart pour les déplacements, et 6.5% pour le moment et la courbure.
- Q4GG : au maximum 19.1 % d'écart pour les déplacements, et 3.5 % pour le moment et la courbure.

Une des raisons est l'hypothèse d'homogénéité du matériau dans les formules qui servent à calculer les valeurs de référence [1], alors que les matrices d'élasticité utilisées tiennent compte de la réalité non-homogène du béton armé. On peut donc estimer que ces modélisations valident la modélisation DKTG et le modèle GLRC en comportement élastique, la modélisation Q4GG et le modèle ELAS.