
SSLS126 – Flexion d'une dalle en béton armé (modèle GLRC_DAMAGE) appuyée sur deux cotés: régime de poutre élastique

Résumé :

Ce test représente le calcul d'une dalle en béton armé, en flexion, soumise à une pression. Il permet de valider la modélisation DKTG avec le modèle GLRC_DAMAGE pour le comportement élastique linéaire et la modélisation Q4GG avec le modèle ELAS. La dalle est en configuration poutre : appuis simples sur deux côtés opposés de la dalle.

Quatre modélisations sont effectuées :

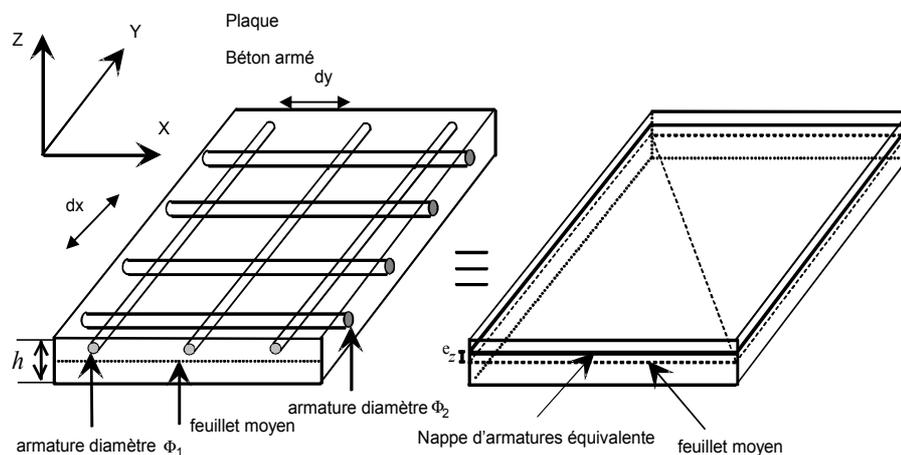
- Modélisation A permet de tester le modèle DKTG avec des TRIA3,
- Modélisation B permet de tester le modèle DKTG avec des QUAD4.
- Modélisation C permet de tester le modèle Q4GG avec des TRIA3,
- Modélisation D permet de tester le modèle Q4GG avec des QUAD4.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Il s'agit d'une dalle carrée, de longueur $l=1.8\text{ m}$, d'épaisseur $h=0.12\text{ m}$, sur appuis simples bilatéraux. Le ferrailage de flexion est parallèle aux bords ; il est identique sur chacune des deux faces et dans chacun des deux sens (dx , dy étant les espacements des fers dans les directions x et y). L'enrobage des fers longitudinaux les plus proches des faces est de 22 mm . L'enrobage des fers par rapport aux bords latéraux de la dalle de 2 cm est négligé. Le tableau ci-après récapitule les données du ferrailage. Le pourcentage géométrique d'acier μ est donné pour une face dans un sens.

Section des aciers (mm)	Espacement (m) $dx \times dy$	Section acier/section du béton	distance grille/surface moyenne de la dalle
HA10	Maille 0,10×0,10	$\mu=0.65\%$	$e_z=\pm 38\text{ mm}$



On note $a_x = \frac{A_x}{d_x}$, $a_y = \frac{A_y}{d_y}$ les taux de ferrailage (ici : $a_x = a_y = 7,854 \cdot 10^{-4}\text{ m}$), A_x (A_y) étant la section d'une barre de fer dans la direction x (y) ; e_z la distance des nappes à la surface moyenne.

1.2 Propriétés de matériaux

Les caractéristiques des aciers sont les suivantes :

Module d'Young E_a	Coefficient de Poisson	Limite élastique à 0.2 % σ_y	Limite de rupture σ_r	Pente d'écroûissage	Allongement à rupture
210000 MPa	0,3	500 MPa	570 MPa	473 MPa	15 %

Celles du béton sont les suivantes :

Module d'Young E_b	Coefficient de Poisson	Résistance en compression, σ_c	Résistance en traction, σ_t
35700 MPa	0,22	52,5 MPa	4,4 MPa

1.3 Conditions aux limites et chargements

Les conditions aux limites se résument à des appuis simples : déplacement vertical bloqué et rotations libres sur deux bords en vis à vis, les deux autres bords restant libres.

Pression uniforme : $p = 0.01 \text{ MPa}$

1.4 Conditions initiales

Sans objet.

2 Solution de référence

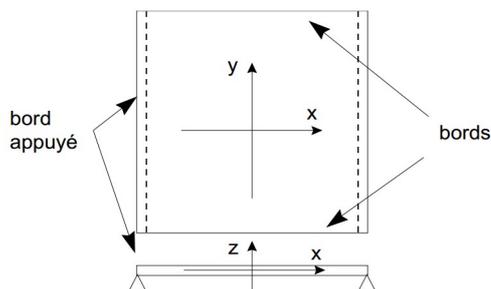
2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Les relations élastiques, reliant les efforts membranaires N et de flexion M aux déformations membranaires ε et les courbures κ et tenant compte de deux grilles symétriques, s'écrivent :

$$N = \left(\frac{E_b h}{1 - \nu_b^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_b & 0 \\ \nu_b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_b}{2} \end{bmatrix} + 2 E_a \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \varepsilon$$

$$M = \left(\frac{E_b h^3}{12(1 - \nu_b^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_b & 0 \\ \nu_b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_b}{2} \end{bmatrix} + 2 E_a e_z^2 \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \kappa$$

S'agissant d'une configuration poutre, on affecte au béton un coefficient de Poisson égal à 0 pour annuler toute flexion dans la direction perpendiculaire. Deux bords opposés de la dalle sont simplement appuyés, deux autres restant libres :



La raideur de flexion équivalente qui tient compte des aciers est :

$$(EI)_{\acute{e}q} = \frac{E_b l h^3}{12} + 2 E_a a_x l e_z^2,$$

soit ici : $(EI)_{\acute{e}q} = 10.111 \text{ MNm}^2$.

La solution élastique se calcule en théorie de poutres pour une valeur de pression équivalente $p' = pl$. On obtient les valeurs des moments en configuration « plaque » par division par la largeur de la dalle l .

Grandeur au centre	Expression
Flèche au centre sous pression surfacique	$w(l/2) = \frac{5 p' l^4}{384 (EI)_{\acute{e}q}}$
Courbure	$\kappa_{xx}(l/2) = \frac{p' l^2}{8 (EI)_{\acute{e}q}}$
Deformation	$\varepsilon_{xx} = \kappa_{xx} \frac{h}{2}$
Moment global (en poutre)	$M(l/2) = p' l^2 / 8$
Moment global (en plaque)	$M(l/2) = p l^2 / 8$

2.2 Résultats de référence

Flèche au centre sous pression surfacique : $w = 2,433 \cdot 10^{-4} m$

Courbure : $k = 7,210 \cdot 10^{-4} m^{-1}$

Déformation: $\varepsilon_{xx} = -0.4326 \cdot 10^{-4}$ sur la peau inférieure

Moment global (en poutre) : $M = 7290 Nm$

Moment global (en plaque) : $M = 4050 Nm/ml$

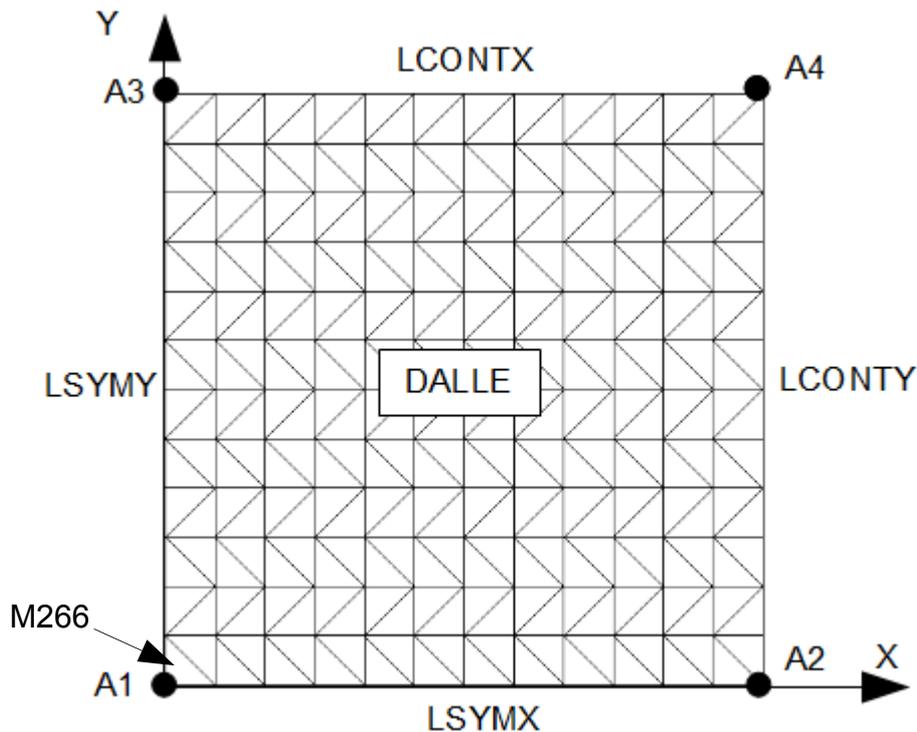
2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Référence bibliographique

- [1] KOEHLIN P., MOULIN S., " Modèle de comportement global des plaques en béton armé sous chargement dynamique de flexion : Loi GLRC", Note EDF/R&D/AMA HT-62/01/028A.

3 Modélisation A



3.1 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169
Nombre de mailles et type : 288 TRIA3

3.2 Grandeurs testées et résultats

Valeur	Identification	Référence	% Tolérance
$w(x=0, y=0)$	$DZ(A1)$	$2.433 \cdot 10^{-4}$	0.90
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(A1)$	4050.	2.0
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(A1)$	$7.21 \cdot 10^{-4}$	3.0

Valeur	Identification		Type de référence	Référence	Tolérance%
M_{xx}	MXX	$M266$ Point 3	'NON_REGRESSION'	3976.763	1.e-10
κ_{xx}	KXX	$M266$ Point 3	'NON_REGRESSION'	$7.2348 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

• Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques $\alpha = 33^\circ$ et $\beta = 12^\circ$.

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	% Tolérance
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(AI)$	'NON_REGRESSION'	2991.193	1.e-10
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(AI)$	'NON_REGRESSION'	1631.459	1.e-10
$M_{xy}(x=0, y=0)$	$MXY(AI)$	'NON_REGRESSION'	-1527.005	1.e-10
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(AI)$	'NON_REGRESSION'	$4.9785 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(AI)$	'NON_REGRESSION'	$1.8694 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
$\kappa_{xy}(x=0, y=0)$	$KXY(AI)$	'NON_REGRESSION'	$-3.4916 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance %
M_{xx}	$MXX \quad M266 \quad Point \ 3$	'NON_REGRESSION'	2986.069	1.e-10
M_{yy}	$MYY \quad M266 \quad Point \ 3$	'NON_REGRESSION'	1629.876	1.e-10
M_{xy}	$MXY \quad M266 \quad Point \ 3$	'NON_REGRESSION'	-1524.810	1.e-10
κ_{xx}	$KXX \quad M266 \quad Point \ 3$	'NON_REGRESSION'	$4.9695 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{yy}	$KYY \quad M266 \quad Point \ 3$	'NON_REGRESSION'	$1.8685 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{xy}	$KXY \quad M266 \quad Point \ 3$	'NON_REGRESSION'	$-3.4865 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

3.3 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticité suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec $\nu_b = 0$:

$$\begin{aligned}
 1) \text{ Matrice d'élasticité en membrane : } & \left\{ \begin{array}{ccc} 4614. & 0 & 0 \\ 0 & 4614. & 0 \\ 0 & 0 & 2142. \end{array} \right\} 10^6 N/m \\
 2) \text{ Matrice d'élasticité en flexion : } & \left\{ \begin{array}{ccc} 5.617 & 0 & 0 \\ 0 & 5.617 & 0 \\ 0 & 0 & 2.57 \end{array} \right\} 10^6 N/m
 \end{aligned}$$

Pour être certain de rester dans le domaine élastique, les limites élastiques exprimées dans le repère d'orthotropie, sont fixées arbitrairement à une valeur très élevée:

Limites élastiques en flexion positive :

$$\begin{aligned}
 \text{Direction } x : & \quad 1.10^{10} MNm/ml \\
 \text{Direction } y : & \quad 1.10^{10} MNm/ml
 \end{aligned}$$

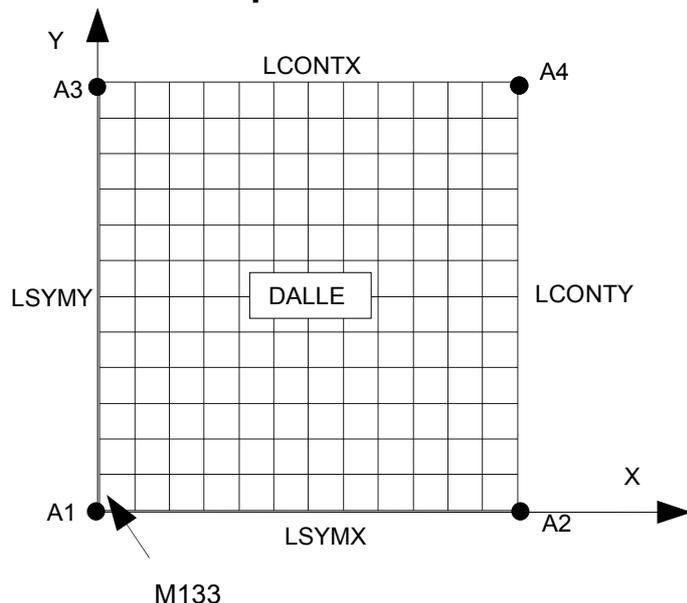
Limites élastiques en flexion négative :

$$\begin{aligned}
 \text{Direction } x : & \quad -1.10^{10} MNm/ml \\
 \text{Direction } y : & \quad -1.10^{10} MNm/ml
 \end{aligned}$$

Comme la structure reste dans le domaine élastique, le coefficient de rappel cinématique (constante de Prager) peut prendre une valeur quelconque.

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKTG (QUAD4)

- Conditions aux limites:
 - . Coté $A2A4$: $DZ = 0$
- Conditions de symétrie
 - . Coté $A1A2$: $DY = DRX = 0$
 - . Coté $A1A3$: $DX = DRY = 0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ($X=0$) et ($Y=0$), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169
Nombre de mailles et type : 144 QUAD4

4.3 Fonctionnalités testées

La macro-commande `POST_COQUE` permet d'extraire les efforts et les déformations en un point quelconque de la coque.

4.4 Valeurs testées

Valeur	Identification	Référence	% Tolérance
$w(x=0, y=0)$	$DZ(A1)$	$2.433 \cdot 10^{-4}$	0.5
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(A1)$	4050.	2.0
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(A1)$	$7.21 \cdot 10^{-4}$	1.0

Valeur	Identification			Type de référence	Référence	Tolérance%
M_{xx}	MXX	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	3978.021	1.e-10
κ_{xx}	KXX	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	$7.2355 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

•Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques $\alpha = 33^\circ$ et $\beta = 12^\circ$.

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	% Tolérance
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(AI)$	'NON_REGRESSION'	2993.222	1.e-10
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(AI)$	'NON_REGRESSION'	1635.193	1.e-10
$M_{xy}(x=0, y=0)$	$MXY(AI)$	'NON_REGRESSION'	-1525.093	1.e-10
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(AI)$	'NON_REGRESSION'	$4.9808 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(AI)$	'NON_REGRESSION'	$1.8756 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
$\kappa_{xy}(x=0, y=0)$	$KXY(AI)$	'NON_REGRESSION'	$-3.4872 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance %
M_{xx}	$MXX \quad M133 \quad Point \ 4$	'NON_REGRESSION'	2989.086	1.e-10
M_{yy}	$MYY \quad M133 \quad Point \ 4$	'NON_REGRESSION'	1632.114	1.e-10
M_{xy}	$MXY \quad M133 \quad Point \ 4$	'NON_REGRESSION'	-1523.138	1.e-10
κ_{xx}	$KXX \quad M133 \quad Point \ 4$	'NON_REGRESSION'	$4.9743 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{yy}	$KYY \quad M133 \quad Point \ 4$	'NON_REGRESSION'	$1.8715 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{xy}	$KXY \quad M133 \quad Point \ 4$	'NON_REGRESSION'	$-3.4827 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

4.5 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticités suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec $\nu_b=0$:

$$\begin{aligned}
 1) \text{ Matrice d'élasticité en membrane : } & \left\{ \begin{array}{ccc} 4614. & 0 & 0 \\ 0 & 4614. & 0 \\ 0 & 0 & 2142. \end{array} \right\} 10^6 N/m \\
 2) \text{ Matrice d'élasticité en flexion : } & \left\{ \begin{array}{ccc} 5.617 & 0 & 0 \\ 0 & 5.617 & 0 \\ 0 & 0 & 2.57 \end{array} \right\} 10^6 N/m
 \end{aligned}$$

Pour être certain de rester dans le domaine élastique, les limites élastiques exprimées dans le repère d'orthotropie, sont fixées arbitrairement à une valeur très élevée:

Limites élastiques en flexion positive :

$$\text{Direction } x : 1 \cdot 10^{10} \text{ MNm/ml}$$

$$\text{Direction } y : 1 \cdot 10^{10} \text{ MNm/ml}$$

Limites élastiques en flexion négative :

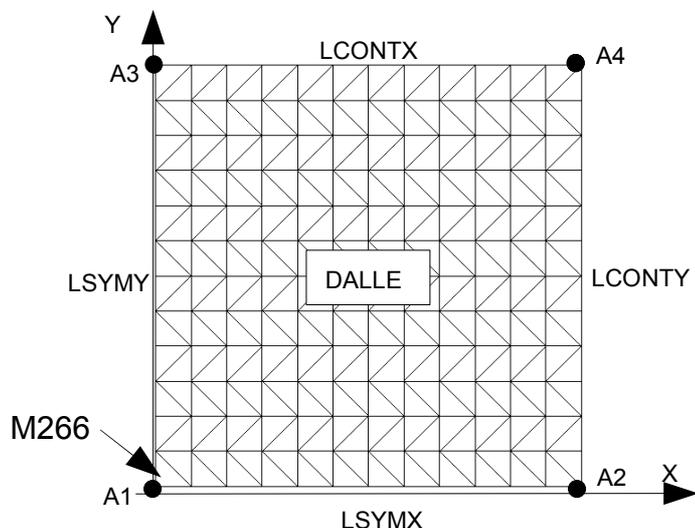
$$\text{Direction } x : -1 \cdot 10^{10} \text{ MNm/ml}$$

$$\text{Direction } y : -1 \cdot 10^{10} \text{ MNm/ml}$$

Comme la structure reste dans le domaine élastique, le coefficient de rappel cinématique (constante de Prager) peut prendre une valeur quelconque.

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation Q4GG (TRIA3)

- Conditions aux limites:
 - . Coté A2A4 : $DZ=0$
- Conditions de symétrie
 - . Coté A1A2 : $DY=DRX=0$
 - . Coté A1A3 : $DX=DRY=0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ($X=0$) et ($Y=0$), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169
Nombre de mailles et type : 288 TRIA3

5.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur	Identification	Type de Référence	Référence	% Tolérance
$w(x=0, y=0)$	$DZ(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.433 \cdot 10^{-4}$	2.0
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	4050.	2.5
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$7.21 \cdot 10^{-4}$	3.0

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	Tolérance%
M_{xx}	MXX M266 Point 1	'NON_REGRESSION'	3963.039	1.e-10
κ_{xx}	KXX M266 Point 1	'NON_REGRESSION'	$7.2205 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

• Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques $\alpha = 33^\circ$ et $\beta = 12^\circ$.

Valeur	Identification	Type de référence	Référence	% Tolérance
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(AI)$	'NON_REGRESSION'	2968.546	1.e-10
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(AI)$	'NON_REGRESSION'	1604.914	1.e-10
$M_{xy}(x=0, y=0)$	$MXY(AI)$	'NON_REGRESSION'	-1531.384	1.e-10
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(AI)$	'NON_REGRESSION'	$4.9465 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(AI)$	'NON_REGRESSION'	$1.8285 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
$\kappa_{xy}(x=0, y=0)$	$KXY(AI)$	'NON_REGRESSION'	$-3.5016 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

Valeur	Identification			Type de référence	Référence	Tolérance %
M_{xx}	MXX	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	2968.546	1.e-10
M_{yy}	MYY	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	1604.914	1.e-10
M_{xy}	MXY	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	-1531.384	1.e-10
κ_{xx}	KXX	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	$4.9465 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{yy}	KYY	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	$1.8285 \cdot 10^{-4}$	1.e-10
κ_{xy}	KXY	$M266$	$Point\ 1$	'NON_REGRESSION'	$-3.5016 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

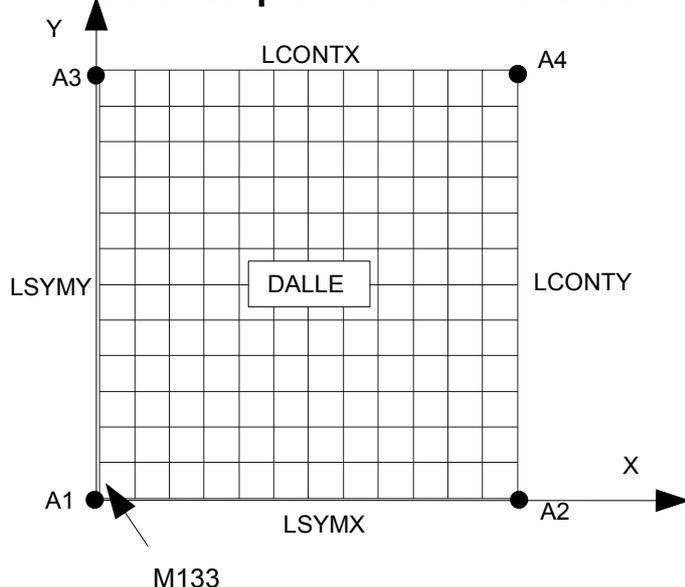
5.4 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticité suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec $\nu_b = 0$:

- 1) Matrice d'élasticité en membrane :
$$\begin{pmatrix} 4614. & 0 & 0 \\ 0 & 4614. & 0 \\ 0 & 0 & 2142. \end{pmatrix} 10^6 N/m$$
- 2) Matrice d'élasticité en flexion :
$$\begin{pmatrix} 5.617 & 0 & 0 \\ 0 & 5.617 & 0 \\ 0 & 0 & 2.57 \end{pmatrix} 10^6 N/m$$

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation Q4GG (QUAD4)

- Conditions aux limites:
 - . Coté $A2A4$: $DZ=0$
- Conditions de symétrie
 - . Coté $A1A2$: $DY=DRX=0$
 - . Coté $A1A3$: $DX=DRY=0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ($X=0$) et ($Y=0$), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169
Nombre de mailles et type : 144 QUAD4

6.3 Fonctionnalités testées

La macro-commande `POST_COQUE` permet d'extraire les efforts et les déformations en un point quelconque de la coque.

6.4 Valeurs testées

Valeur	Identification	Type de Référence	Référence	% Tolérance
$w(x=0, y=0)$	$DZ(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.433 \cdot 10^{-4}$	1.5
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	4050.	2.5
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$7.21 \cdot 10^{-4}$	1.0

Valeur	Identification			Type de référence	Référence	Tolérance%
M_{xx}	MXX	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	3966.605	1.e-10
κ_{xx}	KXX	$M133$	Point 4	'NON_REGRESSION'	$7.22745 \cdot 10^{-4}$	1.e-10

•Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques $\alpha=33^\circ$ et $\beta=12^\circ$.

Valeur	Identification			Type de référence	Référence	%
--------	----------------	--	--	-------------------	-----------	---

				Tolérance
$M_{xx}(x=0, y=0)$	$MXX(AI)$	'NON_REGRESSION'	2970.339	1.e-10
$M_{yy}(x=0, y=0)$	$MYY(AI)$	'NON_REGRESSION'	1605.001	1.e-10
$M_{xy}(x=0, y=0)$	$MXY(AI)$	'NON_REGRESSION'	-1533.299	1.e-10
$\kappa_{xx}(x=0, y=0)$	$KXX(AI)$	'NON_REGRESSION'	4.9499 10 ⁻⁴	1.e-10
$\kappa_{yy}(x=0, y=0)$	$KYY(AI)$	'NON_REGRESSION'	1.8280 10 ⁻⁴	1.e-10
$\kappa_{xy}(x=0, y=0)$	$KXY(AI)$	'NON_REGRESSION'	-3.5059 10 ⁻⁴	1.e-10

Valeur	Identification			Type de référence	Référence	Tolérance %
M_{xx}	MXX	$M133$	$Point\ 4$	'NON_REGRESSION'	2971.183	1.e-10
M_{yy}	MYY	$M133$	$Point\ 4$	'NON_REGRESSION'	1605.217	1.e-10
M_{xy}	MXY	$M133$	$Point\ 4$	'NON_REGRESSION'	-1533.160	1.e-10
κ_{xx}	KXX	$M133$	$Point\ 4$	'NON_REGRESSION'	4.9514 10 ⁻⁴	1.e-10
κ_{yy}	KYY	$M133$	$Point\ 4$	'NON_REGRESSION'	1.8280 10 ⁻⁴	1.e-10
κ_{xy}	KXY	$M133$	$Point\ 4$	'NON_REGRESSION'	-3.5056 10 ⁻⁴	1.e-10

6.5 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticités suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec $\nu_b=0$:

- 1) Matrice d'élasticité en membrane :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} 4614. & 0 & 0 \\ 0 & 4614. & 0 \\ 0 & 0 & 2142. \end{array} \right\} 10^6 N/m$$
- 2) Matrice d'élasticité en flexion :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} 5.617 & 0 & 0 \\ 0 & 5.617 & 0 \\ 0 & 0 & 2.57 \end{array} \right\} 10^6 N/m$$

7 Synthèse des résultats

Les résultats des quatre modélisations sont proches de la solution analytique :

- DKTG : au maximum 0.9% d'écart pour les déplacements, et 3.0% pour le moment et la courbure.
- Q4GG : au maximum 2.0% d'écart pour les déplacements, et 3.0% pour le moment et la courbure.

Ces modélisations valident :

- la modélisation DKTG avec le modèle GLRC_DAMAGE en comportement élastique.
- la modélisation Q4GG avec le modèle ELAS.