

---

## SSLP320 - Propagation d'une fissure X-FEM débouchante sollicitée en Mode I

---

### Résumé

Ce test a pour but de valider le calcul des facteurs d'intensité de contrainte ( $K_I$  et  $K_{II}$ ) et le trajet de propagation de fissure avec X-FEM en 2D, dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Ce test met en jeu une plaque rectangulaire avec une fissure débouchante, et soumise à un chargement de traction sur les bords inférieur et supérieur de la plaque.

Quatre méthodes pour gérer la propagation d'une fissures X-FEM sont disponibles. Chacune d'entre elles fait l'objet d'une modélisation.

Trois modélisations sont considérées :

- modélisation A : méthode MAILLAGE,
- modélisation B : méthode SIMPLEXE,
- modélisation C : méthode UPWIND,
- modélisation D: méthode GEOMETRIQUE.

La pertinence des résultats est évaluée par comparaison des facteurs d'intensité des contraintes avec les valeurs analytiques.

On trouve un écart entre  $K_I$  et  $K_I$  théorique inférieur à 1,13 % pour l'ensemble des méthodes.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

La structure 2D est une plaque 2D rectangulaire ( $LX=10\text{ m}$ ,  $LY=30\text{ m}$ ), comportant une fissure débouchante [Figure 1.1-a]. La longueur de la fissure initiale est  $a=5\text{ m}$ .

On appelle « ligne inférieure », la ligne en  $y=0$  et « ligne supérieure », la ligne en  $y=LY$ .

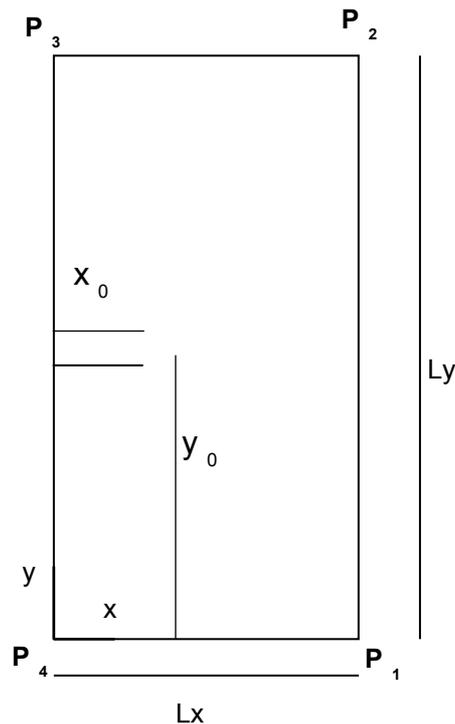


Figure 1.1-a : géométrie de la plaque fissurée

Les nœuds notés  $P1$  et  $P4$  sur la Figure 1.1-a servent à imposer les conditions aux limites, qui sont explicitées au paragraphe [§1.3].

### 1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young :  $E=205\ 10^9\ Pa$   
Coefficient de Poisson :  $\nu=0$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le chargement consiste à appliquer une force répartie sur les lignes inférieure et supérieure  $p=106\ Pa$  et dans le sens de la normale extérieure à la surface.

Afin de bloquer les modes rigides, on bloque les déplacements des nœuds  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$  et  $P4$  comme suit :

- $DY^{P4} = DY^{P1} = 0$  ;
- $$

## 1.4 Solution de référence

Les expressions analytiques des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  sont des fonctions de la force répartie  $p$ , de la longueur de la fissure  $a$ , de la largeur de la plaque  $Lx$  [1]:

$$K_I = p \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{Lx}\right)$$

$$K_{II} = 0$$

où la fonction  $f$  peut être déterminée de plusieurs manières différentes. Nous choisissons celle obtenue par [1], et qui est vraie pour  $\frac{a}{Lx} < 0,6$  :

$$f\left(\frac{a}{Lx}\right) = 1,12 - 0,231\left(\frac{a}{Lx}\right) + 10,55\left(\frac{a}{Lx}\right)^2 - 21,72\left(\frac{a}{Lx}\right)^3 + 30,39\left(\frac{a}{Lx}\right)^4$$

On fait avancer la fissure grâce à la loi de Paris :

$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m$  où  $a$  est la longueur de fissure,  $C$  et  $m$  sont des constantes du matériau,  $\Delta K$  est la différence entre deux  $FICs$  consécutifs et  $N$  est le nombre de cycles.

Avec les valeurs numériques du test :

Pas de propagation : 0,25 m

$Lx$  : 10 m

Référence		
$a(m)$	$K_I (Pa.m^{0,5})$	$K_{II} (Pa.m^{0,5})$
2,5	4,205998 10 <sup>6</sup>	0
2,75	4,63286 10 <sup>6</sup>	0
3	5,09492 10 <sup>6</sup>	0
3,25	5,59908 10 <sup>6</sup>	0
3,5	6,15349 10 <sup>6</sup>	0
3,75	6,76776 10 <sup>6</sup>	0
4	7,4531 10 <sup>6</sup>	0
4,25	8,2224 10 <sup>6</sup>	0
4,5	9,0905 10 <sup>6</sup>	0
4,75	1,0074 10 <sup>7</sup>	0
5	1,1192 10 <sup>7</sup>	0
5,25	1,2465 10 <sup>7</sup>	0
5,5	1,3916 10 <sup>7</sup>	0
5,75	1,55716 10 <sup>7</sup>	0
6	1,74586 10 <sup>7</sup>	0

Tableau 1.4-1 : valeurs de référence pour  $K_I$  et  $K_{II}$

## 1.5 Bibliographie

1. TADA H., PARIS P., IRWIN G. : The stress analysis of cracks, Handbook. Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 1973

## 2 Modélisation A : Méthode maillage

### 2.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode `MAILLAGE` est testée pour la propagation de fissure. Les level-sets sont déterminées par projection orthogonale sur les segments composant la fissure.

### 2.2 Caractéristiques du maillage

La structure est modélisée par un maillage « sain » régulier composé de  $40 \times 101$  `QUAD4`, respectivement suivant les axes  $x, y$ . La fissure est représentée par une succession de `SEG2`, indépendamment du maillage de la structure..

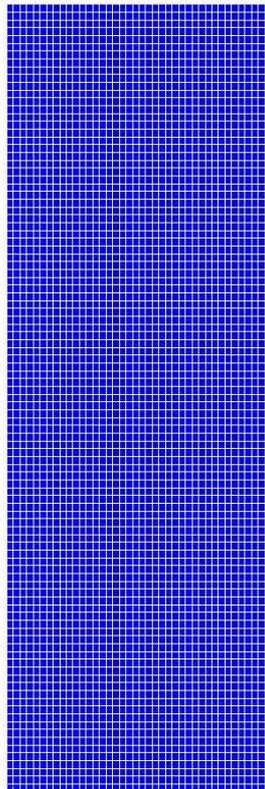


Figure 2.2-a : maillage de la plaque fissurée

### 2.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de propagation ( $2,5 m$ ), on teste la valeur des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  données par `CALC_G`.

On teste également l'ordonnée du fond de fissure donnée par `PROPA_FISS`.

## 2.3.1 Résultats sur $K_I$ :

Identification	Code_Aster	Référence	différence
CALC_G			
KI_1	4,17448 10 <sup>6</sup>	4,205998 10 <sup>6</sup>	-0,749 %
KI_2	4,60197 10 <sup>6</sup>	4,63286 10 <sup>6</sup>	-0,667 %
KI_3	5,0668 10 <sup>6</sup>	5,09492 10 <sup>6</sup>	-0,552 %
KI_4	5,575 10 <sup>6</sup>	5,59908 10 <sup>6</sup>	-0,43 %
KI_5	6,1334 10 <sup>6</sup>	6,15349 10 <sup>6</sup>	-0,326 %
KI_6	6,7499 10 <sup>6</sup>	6,76776 10 <sup>6</sup>	-0,264 %
KI_7	7,4338 10 <sup>6</sup>	7,4531 10 <sup>6</sup>	-0,259 %
KI_8	8,19599 10 <sup>6</sup>	8,2224 10 <sup>6</sup>	-0,322 %
KI_9	9,0497 10 <sup>6</sup>	9,0905 10 <sup>6</sup>	-0,449 %
KI_10	1,0011 10 <sup>7</sup>	1,0074 10 <sup>7</sup>	-0,627 %
KI_11	1,1099 10 <sup>7</sup>	1,1192 10 <sup>7</sup>	-0,828 %
KI_12	1,2339 10 <sup>7</sup>	1,2465 10 <sup>7</sup>	-1,011 %
KI_13	1,37603 10 <sup>7</sup>	1,3916 10 <sup>7</sup>	-1,121 %
KI_14	1,54018 10 <sup>7</sup>	1,55716 10 <sup>7</sup>	-1,09 %
KI_15	1,7313 10 <sup>7</sup>	1,74586 10 <sup>7</sup>	-0,834 %

## 2.3.2 Résultats sur $K_{II}$ :

Pour ce test, on souhaite que  $K_{II}$  soit inférieur à  $10^{-4} K_I$ . Ainsi, on s'assure que  $K_{II}$  est assez proche de zéro, la valeur de référence.

Identification	Code_Aster	Référence
CALC_G		
KII_1	-2,7313 10 <sup>2</sup>	0
KII_2	-8,5062 10 <sup>1</sup>	0
KII_3	-2,6061 10 <sup>2</sup>	0
KII_4	1,5995 10 <sup>2</sup>	0
KII_5	-2,7309 10 <sup>2</sup>	0
KII_6	-2,3176 10 <sup>2</sup>	0
KII_7	-3,1276 10 <sup>2</sup>	0
KII_8	3,1327 10 <sup>2</sup>	0
KII_9	-3,8393 10 <sup>2</sup>	0
KII_10	-4,1916 10 <sup>2</sup>	0
KII_11	-4,986 10 <sup>2</sup>	0
KII_12	-5,6998 10 <sup>2</sup>	0
KII_13	-6,7642 10 <sup>2</sup>	0
KII_14	-7,9542 10 <sup>2</sup>	0
KII_15	-9,5344 10 <sup>2</sup>	0

## 2.3.3 Résultats sur l'ordonnée du fond de fissure :

On vérifie que les coordonnées en ordonnée des fonds de fissure successifs sont proches de la valeur initiale. Cette vérification donne les mêmes indications que le test sur  $K_{II}$ .

Identification	Code_Aster	Référence	Différence
CALC_G			
y_1	15	15	0 %
y_2	15	15	2,18 10 <sup>-4</sup> %
y_3	15	15	2,8 10 <sup>-4</sup> %
y_4	15	15	4,51 10 <sup>-4</sup> %
y_5	15	15	5,47 10 <sup>-4</sup> %
y_6	15	15	6,95 10 <sup>-4</sup> %
y_7	15	15	8,1 10 <sup>-4</sup> %
y_8	15	15	9,5 10 <sup>-4</sup> %
y_9	15,0002	15	0,001 %
y_10	15,0002	15	0,001 %
y_11	15,0002	15	0,001 %
y_12	15,0002	15	0,002 %
y_13	15,0002	15	0,002 %
y_14	15,0003	15	0,002 %
y_15	15,0003	15	0,002 %

## 2.4 Résultats complémentaires

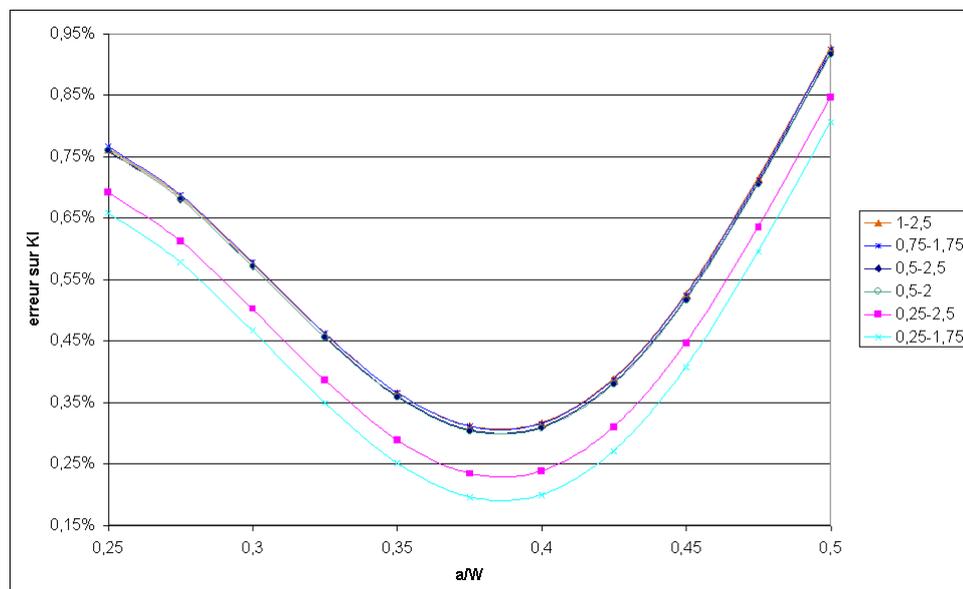


Figure 2.4-a : Influence du choix des couronnes RI et RS sur l'erreur sur KI

Nous pouvons voir ici que la configuration la plus adaptée pour le choix de  $RI$  et  $RS$  (couronnes inférieure et supérieure du champ  $\theta$ ) est :  $RI = 2 * L_0$  et  $RS = 7 * L_0$  où  $L_0$  est la plus petite arête du maillage.

## 3 Modélisation B : Méthode simplexe

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode `SIMPLEXE` est testée pour la propagation de fissure. Les level-sets sont déterminées par résolution des équations de réactualisation.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

On utilise ici le même maillage que dans la modélisation A (§2.1).

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de propagation, on teste la valeur des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  données par `CALC_G`.

#### 3.3.1 Résultats sur $K_I$ :

Identification	Code_Aster	Référence	différence
<code>CALC_G</code>			
KI_1	4,17448	4,205998 10 <sup>6</sup>	-0,749 %
KI_2	4,60197	4,63286 10 <sup>6</sup>	-0,667 %
KI_3	5,06681	5,09492 10 <sup>6</sup>	-0,552 %
KI_4	5,57501	5,59908 10 <sup>6</sup>	-0,43 %
KI_5	6,13343	6,15349 10 <sup>6</sup>	-0,326 %
KI_6	6,74995	6,76776 10 <sup>6</sup>	-0,263 %
KI_7	7,43384	7,4531 10 <sup>6</sup>	-0,258 %
KI_8	8,19608	8,2224 10 <sup>6</sup>	-0,32 %
KI_9	9,04986	9,0905 10 <sup>6</sup>	-0,447 %
KI_10	1,00111	1,0074 10 <sup>7</sup>	-0,625 %
KI_11	1,10996	1,1192 10 <sup>7</sup>	-0,825 %
KI_12	1,23393	1,2465 10 <sup>7</sup>	-1,008 %
KI_13	1,37608	1,3916 10 <sup>7</sup>	-1,117 %
KI_14	1,54026	1,55716 10 <sup>7</sup>	-1,085 %
KI_15	1,73142	1,74586 10 <sup>7</sup>	-0,827 %

## 3.3.2 Résultats sur $K_{II}$ :

Identification	Code_Aster	Référence
CALC_G		
KII_1	-2,7313 10 <sup>2</sup>	0
KII_2	-2,9582 10 <sup>2</sup>	0
KII_3	-3,3848 10 <sup>2</sup>	0
KII_4	-3,9204 10 <sup>2</sup>	0
KII_5	-4,4895 10 <sup>2</sup>	0
KII_6	-5,0302 10 <sup>2</sup>	0
KII_7	-5,4802 10 <sup>2</sup>	0
KII_8	-5,7767 10 <sup>2</sup>	0
KII_9	-5,8608 10 <sup>2</sup>	0
KII_10	-5,7002 10 <sup>2</sup>	0
KII_11	-5,2708 10 <sup>2</sup>	0
KII_12	-4,5292 10 <sup>2</sup>	0
KII_13	-3,422 10 <sup>2</sup>	0
KII_14	-1,8819 10 <sup>2</sup>	0
KII_15	-1,7862 10 <sup>1</sup>	0

## 4 Modélisation C : Méthode upwind

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode UPWIND est testée pour la propagation de fissure. Les level-sets sont déterminées par résolution des équations de réactualisation par schéma aux différences finies.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

On utilise ici le même maillage que dans la modélisation A (§2.1).

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de propagation, on teste la valeur des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  données par CALC\_G.

#### 4.3.1 Résultats sur KI :

Identification	Code_Aster	Référence	différence
CALC_G			
KI_1	4.17448E+06	4,205998 10 <sup>6</sup>	-0,749 %
KI_2	4.60197E+06	4,63286 10 <sup>6</sup>	-0,667 %
KI_3	5.06680E+06	5,09492 10 <sup>6</sup>	-0,552 %
KI_4	5.57500E+06	5,59908 10 <sup>6</sup>	-0,43 %
KI_5	6.13340E+06	6,15349 10 <sup>6</sup>	-0,326 %
KI_6	6.74991E+06	6,76776 10 <sup>6</sup>	-0,264 %
KI_7	7.43378E+06	7,4531 10 <sup>6</sup>	-0,259 %
KI_8	8.19599E+06	8,2224 10 <sup>6</sup>	-0,322 %
KI_9	9.04972E+06	9,0905 10 <sup>6</sup>	-0,449 %
KI_10	1.00110E+07	1,0074 10 <sup>7</sup>	-0,627 %
KI_11	1.10993E+07	1,1192 10 <sup>7</sup>	-0,828 %
KI_12	1.23389E+07	1,2465 10 <sup>7</sup>	-1,011 %
KI_13	1.37603E+07	1,3916 10 <sup>7</sup>	-1,122 %
KI_14	1.54018E+07	1,55716 10 <sup>7</sup>	-1,09 %
KI_15	1.73130E+07	1,74586 10 <sup>7</sup>	-0,834 %

## 4.3.2 Résultats sur KII :

Identification	Code_Aster	Référence
CALC_G		
KII_1	-2,7313 10 <sup>2</sup>	0
KII_2	-2,8454 10 <sup>2</sup>	0
KII_3	-3,0026 10 <sup>2</sup>	0
KII_4	-3,2069 10 <sup>2</sup>	0
KII_5	-3,4643 10 <sup>2</sup>	0
KII_6	-3,7828 10 <sup>2</sup>	0
KII_7	-4,1724 10 <sup>2</sup>	0
KII_8	-4,6462 10 <sup>2</sup>	0
KII_9	-5,2209 10 <sup>2</sup>	0
KII_10	-5,9177 10 <sup>2</sup>	0
KII_11	-6,7643 10 <sup>2</sup>	0
KII_12	-7,7966 10 <sup>2</sup>	0
KII_13	-9,0621 10 <sup>2</sup>	0
KII_14	-1,0624 10 <sup>3</sup>	0
KII_15	-1,2568 10 <sup>3</sup>	0

## 5 Modélisation D : Méthode géométrique

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la méthode GEOMETRIQUE est testée pour la propagation de fissure. Les level-sets sont recalculées à chaque pas de propagation.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

On utilise ici le même maillage que dans la modélisation A (§2.1).

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de propagation, on teste la valeur des facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  données par CALC\_G.

#### 5.3.1 Résultats sur KI :

Identification	Code_Aster	Référence	Différence
CALC_G			
KI_1	4,174476 10 <sup>6</sup>	4,205998 10 <sup>6</sup>	-0,749%
KI_2	4,601963 10 <sup>6</sup>	4,63286 10 <sup>6</sup>	-0,667%
KI_3	5,066799 10 <sup>6</sup>	5,09492 10 <sup>6</sup>	-0,522%
KI_4	5,574998 10 <sup>6</sup>	5,59908 10 <sup>6</sup>	-0,430%
KI_5	6,133404 10 <sup>6</sup>	6,15349 10 <sup>6</sup>	-0,326%
KI_6	6,749911 10 <sup>6</sup>	6,76776 10 <sup>6</sup>	-0,264%
KI_7	7,433777 10 <sup>6</sup>	7,4531 10 <sup>6</sup>	-0,259%
KI_8	8,195987 10 <sup>6</sup>	8,2224 10 <sup>6</sup>	-0,322%
KI_9	9,049722 10 <sup>6</sup>	9,0905 10 <sup>6</sup>	-0,449%
KI_10	1,001096 10 <sup>7</sup>	1,0074 10 <sup>7</sup>	-0,627%
KI_11	1,109928 10 <sup>7</sup>	1,1192 10 <sup>7</sup>	-0,828%
KI_12	1,233893 10 <sup>7</sup>	1,2465 10 <sup>7</sup>	-1,01%
KI_13	1,376027 10 <sup>7</sup>	1,3916 10 <sup>7</sup>	-1,12%
KI_14	1,540181 10 <sup>7</sup>	1,55716 10 <sup>7</sup>	-1,09%
KI_15	1,731302 10 <sup>7</sup>	1,74586 10 <sup>7</sup>	-0,834%

## 5.3.2 Résultats sur KII :

Identification	Code_Aster	Référence
CALC_G		
KII_1	0,0	0
KII_2	$1,30 \times 10^2$	0
KII_3	0,0	0
KII_4	$2,48 \times 10^1$	0
KII_5	0,0	0
KII_6	0,0	0
KII_7	0,0	0
KII_8	0,0	0
KII_9	0,0	0
KII_10	0,0	0
KII_11	0,0	0
KII_12	0,0	0
KII_13	0,0	0
KII_14	0,0	0
KII_15	0,0	0

## 6 Synthèses des résultats

---

### 6.1 Performance des méthodes

On peut comparer le temps de calcul pour le même nombre de pas de propagation (15) des quatre méthodes. On remarque ici que la méthode GEOMETRIQUE est nettement plus rapide que les trois autres méthodes pour une même discrétisation.

Maillage	Méthode	Temps ( s )
40×101	MAILLAGE	129
	SIMPLEXE	290
	UPWIND	244
	GEOMETRIQUE	30

### 6.2 Conclusion

Les objectifs de ce test sont atteints :

- valider sur un cas simple le calcul des facteurs d'intensité de contraintes en mode  $I$  pour les éléments X-FEM pour les quatre méthodes MAILLAGE, SIMPLEXE, UPWIND et GEOMETRIQUE.
- distinguer la meilleure méthode pour ce cas. Pour des résultats égaux, la méthode géométrique est la plus performante. On préconise donc ici de choisir cette méthode pour ce cas.