
SHLL101 - Poutre droite. Analyse harmonique

Résumé :

Ce problème bidimensionnel consiste à calculer les efforts présents dans une poutre soumise à une traction ou à une flexion lors d'une analyse harmonique. La solution de référence est obtenue à partir des équations discrétisées.

Ce test comporte deux modélisations.

Pour la première modélisation, quatre sollicitations sont testées :

- force de traction,
- force de traction et matériau présentant un amortissement,
- force de flexion,
- force de flexion et matériau présentant un amortissement.

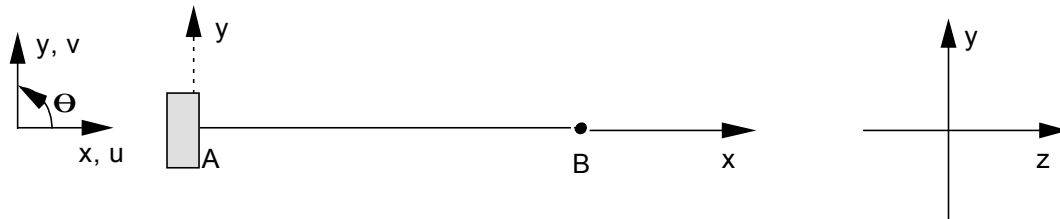
Pour la deuxième modélisation, deux sollicitations sont testées :

- force de traction,
- force de traction et matériau présentant un amortissement.

La deuxième modélisation permet de tester les chargements complexes imposés par la commande `AFFE_CHAR_MECA_C`.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Les caractéristiques géométriques de la poutre constituant le modèle mécanique sont les suivantes :

Longueur : $L = 10\text{ m}$

Section transversale	Aire	$IZ = IY$	JX
	$3.439\ 10^{-3}\text{ m}^2$	$1.377\ 10^{-5}\text{ m}^4$	$2.754\ 10^{-5}\text{ m}^4$

Les coordonnées (en mètres) des points caractéristiques de la poutre sont :

	A	B
x	0.	10.
y	0.	0.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés du matériau constituant la poutre sont :

$$E = 1.658\ 1010\text{ Pa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\rho = 1.3404106\ 104\text{ kg/m}^3$$

$$\alpha = \text{AMOR_ALPHA} = 0.001$$

$$\beta = \text{AMOR_BETA} = 0.$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

La condition aux limites qui caractérise ce problème est l'encastrement du point A et s'écrit :

$$u = v = 0.$$

$$\theta = 0.$$

Pour le chargement on a :

$F_x = 3000.\text{ N}$	$F_y = F_z = 0.$	(effort de traction)
$F_x = 0.$	$F_y = 3000.\text{ N}$	$F_z = 0.$ (effort de flexion)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Si la poutre est modélisée par une poutre d'Euler-Bernoulli et par un seul élément fini, le problème harmonique peut s'écrire de la façon suivante :

problème en traction :

$$(1+i\alpha\omega)\frac{ES}{L}u(B)-\omega^2\frac{\rho SL}{6}u(B)=F_x(B)$$

$$\text{d'où } u(B)=\frac{F(B)}{\frac{ES}{L}-\omega^2\frac{\rho SL}{6}+i\alpha\omega\frac{ES}{L}}$$

problème en flexion :

$$\left[-\omega^2 \begin{pmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210} \\ \frac{-11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} \end{pmatrix} + (1+i\alpha\omega)\frac{12EI_y}{L^3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-L}{2} \\ \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v(B) \\ \theta(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_y(B) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque :

|Si le matériau ne présente pas d'amortissement, on a alors : AMOR_ALPHA = $\alpha=0$.

Les efforts au point B se calculent de la manière suivante :

problème en traction :

$$N(B)=\left(\frac{ES}{L}-\omega^2\frac{\rho SL}{6}\right)u(B)$$

problème en flexion :

$$\begin{pmatrix} VY(B) \\ MFZ(B) \end{pmatrix} = \left[-\omega^2 \begin{pmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210} \\ \frac{-11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} \end{pmatrix} + \frac{12EI_y}{L^3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-L}{2} \\ \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v(B) \\ \theta(B) \end{pmatrix}$$

On résout analytiquement les systèmes 2×2 pour obtenir la solution.

2.2 Résultats de référence

Les résultats de référence sont les déplacements, les vitesses, les accélérations et les efforts généralisés obtenus au point B lors de l'analyse harmonique.

2.3 Remarque pour la modélisation B

Pour la modélisation B, on veut tester dans le cas du problème en traction le mot-clé `FORCE_POUTRE` qui permet d'appliquer des efforts répartis. Pour obtenir la même solution que la poutre soumise à force nodale en son extrémité, la relation entre l'effort réparti constant et la force nodale est :

$$F_x(B) = \frac{f L}{2}$$

Avec les valeurs données au paragraphe 1.3, on a : $f = 600 \text{ N/m}$

2.4 Incertitude sur la solution

Si les hypothèses sont vérifiées (poutre d'Euler-Bernoulli), la solution est analytique.

2.5 Références bibliographiques

- 1) Documentation de Référence du `Code_Aster` : Eléments de poutres "exacts" (droits et courbes) - [R3.08.01].

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



La poutre est constituée d'une seule maille.

La modélisation utilisée pour la poutre est celle d'Euler-Bernoulli (POU_D_E).

L'extrémité A est encastree :

$$DX = DY = DZ = 0. \quad DRX = DRY = DRZ = 0.$$

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de mailles et types : 1 maille de type SEG 2

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point $A = A$

Point $B = B$

3.3 Grandeurs testées (forme réel-imaginaire)

Problème 1 : traction

Point/Grandeur			Référence	Aster	% différence
déplacement	B	DX	(5.318 10 ⁻⁵ , 0.)	(5.318 10 ⁻⁵ , 0.)	0.
vitesse	B	DX	(0., 3.341 10 ⁻³)	(0., 3.341 10 ⁻³)	0.
accélération	B	DX	(-2.099 10 ⁻¹ , 0.)	(-2.099 10 ⁻¹ , 0.)	0.
effort généralisé	B	N	(3000., 0.)	(3000., 0.)	0.

Problème 2 : flexion

Point/Grandeur			Référence	Aster	% différence
déplacement	B	DY	(1.828 10 ⁻² , 0.)	(1.828 10 ⁻² , 0.)	0.
		DRZ	(1.82 10 ⁻² , 0.)	(1.82 10 ⁻² , 0.)	0.
vitesse	B	DY	(0., 1.1489)	(0., 1.1489)	0.
		DRZ	(0., 1.1438)	(0., 1.1438)	0.
accélération	B	DY	(-7.219 10 ⁻¹)	(-7.219 10 ⁻¹ , 0.)	0.
		DRZ	(-7.186 10 ⁻¹ , 0.)	(-7.186 10 ⁻¹ , 0.)	0.
effort généralisé	B	VY	(3000., 0.)	(3000., 0.)	0.
		MFZ	(0., 0.)	(-1.164 10 ⁻¹⁰ , 0.)	0.

Problème 3 : traction + amortissement

Point/Grandeur			Référence	Aster	% diff
déplacement	B	D X	(5.296 10 ⁻⁵ , -3.363 10 ⁻³)	(5.296 10 ⁻⁵ , -3.363 10 ⁻³)	0.
vitesse	B	D X	(2.113 10 ⁻⁴ , 3.327 10 ⁻³)	(2.113 10 ⁻⁴ , 3.327 10 ⁻³)	0.
accélération	B	D X	(-2.091 10 ⁻¹ , 1.327 10 ⁻²)	(-2.091 10 ⁻¹ , 1.327 10 ⁻²)	0.
effort généralisé	B	N	(2.987 10 ³ , -1.8975 10 ²)	(2.987 10 ³ , -1.8975 10 ²)	0.

Problème 4 : flexion + amortissement

Point/Grandeur			Référence	Aster	% diff
déplacement	B	DY	(1.746 10 ⁻² , -4.469 10 ⁻³)	(1.746 10 ⁻² , -4.469 10 ⁻³)	0.
		DRZ	(1.757 10 ⁻² , -3.402 10 ⁻³)	(1.757 10 ⁻² , -3.402 10 ⁻³)	0.
vitesse	B	DY	(2.808 10 ⁻¹ , 1.097)	(2.808 10 ⁻¹ , 1.097)	0.
		DRZ	(2.138 10 ⁻¹ , 1.104)	(2.138 10 ⁻¹ , 1.104)	0.
accélération	B	DY	(-6.895 10 ⁻¹ , 1.764 10 ⁻¹)	(-6.895 10 ⁻¹ , 1.764 10 ⁻¹)	0.
		DRZ	(-6.94 10 ⁻¹ , 1.343 10 ⁻¹)	(-6.94 10 ⁻¹ , 1.343 10 ⁻¹)	0.
effort généralisé	B	VY	(3.021 10 ³ , 1.212 10 ²)	(3.021 10 ³ , 1.212 10 ²)	0.
		MFZ	(-1.567 10 ² , -8.583 10 ²)	(-1.567 10 ² , -8.583 10 ²)	0.

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



La poutre est constituée d'une seule maille.

La modélisation utilisée pour la poutre est celle d'Euler-Bernoulli (POU_D_E).

L'extrémité A est encastree :

$$DX = DY = DZ = 0. \quad DRX = DRY = DRZ = 0.$$

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de mailles et types : 1 maille de type SEG 2

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point $A = A$

Point $B = B$

4.3 Grandeurs testées (forme réel-imaginaire)

Problème 1 : traction (effort réparti réel : partie imaginaire nulle)

Point/Grandeur			Référence	Aster	% différence
déplacement	B	DX	(5.318 10 ⁻⁵ , 0.)	(5.318 10 ⁻⁵ , 0.)	0.
vitesse	B	DX	(0., 3.341 10 ⁻³)	(0., 3.3414 10 ⁻³)	0.
accélération	B	DX	(-2.099 10 ⁻¹ , 0.)	(-2.0994 10 ⁻¹ , 0.)	0.
effort généralisé	B	N	(3000., 0.)	(3000., 0.)	0.

Problème 2 : traction (effort réparti complexe : partie réelle nulle)

Point/Grandeur			Référence	Aster	% différence
déplacement	B	DX	(0., 5.318 10 ⁻⁵)	(0., 5.318 10 ⁻⁵)	0.
vitesse	B	DX	(-3.341 10 ⁻³ , 0.)	(-3.3414 10 ⁻³ , 0.)	0.
accélération	B	DX	(0., -2.099 10 ⁻¹)	(0., -2.0994 10 ⁻¹)	0.
effort généralisé	B	N	(0., 3000.)	(0., 3000.)	0.

Problème 3 : traction + amortissement (effort réparti réel : partie imaginaire nulle)

Point/Grandeur			Référence	Aster	% diff
déplacement	B	DX	(5.296 10 ⁻⁵ , -3.363 10 ⁻³)	(5.2966 10 ⁻⁵ , -3.3637 10 ⁻³)	0.
vitesse	B	DX	(2.113 10 ⁻⁴ , 3.327 10 ⁻³)	(2.1135 10 ⁻⁴ , 3.3279 10 ⁻³)	0.
accélération	B	DX	(-2.091 10 ⁻¹ , 1.327 10 ⁻²)	(-2.091 10 ⁻¹ , 1.3279 10 ⁻²)	0.
effort généralisé	B	N	(2.9879 10 ³ , -1.897 10 ²)	(2.987 10 ³ , -1.8975 10 ²)	0.

Problème 4 : flexion + amortissement (effort réparti complexe : partie réelle nulle)

Point/Grandeur			Référence	Aster	% diff
déplacement	B	DX	(3.363 10 ⁻³ , 5.296 10 ⁻⁵)	(5.296 10 ⁻⁵ , -3.363 10 ⁻³)	0.
vitesse	B	DX	(-3.327 10 ⁻³ , 2.113 10 ⁻⁴)	(-3.3279 10 ⁻³ , 2.1135 10 ⁻⁴)	0.
accélération	B	DX	(-1.327 10 ⁻² , -2.091 10 ⁻¹)	(-1.3279 10 ⁻² , -2.091 10 ⁻¹)	0.
effort généralisé	B	N	(1.897 10 ² , 2.9879 10 ³)	(1.8975 10 ² , 2.98794 10 ³)	0.

Quand l'effort réparti est appliqué en tant que partie imaginaire du chargement, la solution de référence est obtenue à partir de celle de la modélisation A en échangeant partie réelle et partie imaginaire et en changeant le signe des nouvelles parties réelles.

5 Synthèse des résultats

On retrouve bien les résultats analytiques.