

## SDLL135 - Réponse dynamique d'une poutre-tuyau encastrée-libre

---

### Résumé

Le domaine d'application est la dynamique linéaire, et plus particulièrement l'analyse modale puis l'analyse transitoire linéaire.

Les différentes modélisations :

- 1) éléments finis de poutre d'Euler `POU_D_E`,
- 2) éléments finis de poutre de Timoshenko `POU_D_T`,
- 3) éléments finis de tuyaux (`TUYAU_3M` et `TUYAU_6M`).
- 4) éléments finis de barres

Ce cas test est l'étude d'une poutre-tuyau élastique linéaire isotrope homogène, encastrée à sa base, soumise à un échelon de force et de couple en tête.

L'objectif est de tester les fréquences propres, les déplacements et les réactions d'appuis dans le régime transitoire (propagation d'une onde d'accélération), en petites transformations avec un schéma d'intégration temporelle implicite. Cette poutre-tuyau est courte et l'effet de l'énergie de cisaillement transverse est notable. Pour valider la prise en compte du terme dû aux forces d'inertie, on teste la réaction nodale au point chargé, celle-ci devant être nulle.

La comparaison est réalisée par rapport à une solution analytique dont les grandes lignes sont présentées ; inter-comparaison entre modélisations. La comparaison est également réalisée pour des solutions obtenues avec d'autres logiciels de calcul : *Circus* (par fonctions de transfert) et *EuroPlexus* (en dynamique rapide explicite). Pour les barres la comparaison est réalisée sur les résultats obtenus par les commandes `DYNA_VIBRA` et `DYNA_NON_LINE` afin de tester l'option `M_GAMMA`.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Hypothèses et géométrie

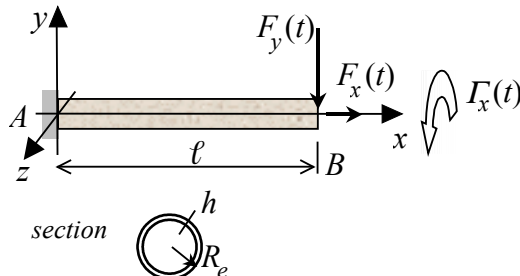


Figure 1.1-a

On considère une poutre-tuyau élastique homogène isotrope, chargée à son extrémité et encastree à l'autre. Ce problème possède une solution analytique en théorie des poutres, confer par exemple [bib1], [bib2].

Les dimensions sont les suivantes (exemple tiré de [bib3]) :

- 1) longueur  $l = 1,00 \text{ m}$ ,
- 2) rayon extérieur du tuyau :  $R_e = 0.16 \text{ m}$ ,
- 3) épaisseur :  $h = 0.01 \text{ m}$

### 1.2 Propriétés des matériaux

On choisit les données de l'exemple tiré de [bib3] :

Module de Young :  
 $E = 200000 \text{ MPa}$

Coefficient de Poisson :  $\nu = 0,29$

Masse volumique :  $\rho = 7830 \text{ kg/m}^3$

On n'introduit pas d'amortissement visqueux dans le problème.

### 1.3 Conditions aux limites et chargement

#### Conditions aux limites

L'extrémité  $A$  a ses déplacements de poutre bloqués en  $x$ ,  $y$  et  $z$  ainsi que les rotations ; par contre, la section peut se déformer librement : les modes d'ovalisation-gonflement du tuyau sont libres.

#### Conditions initiales

La poutre-tuyau est initialement au repos dans un état vierge.

#### Chargement

On exerce un échelon de force axiale  $F_x = 1,0 \text{ N}$ , de force transversale  $F_y = 1,0 \text{ N}$ , de couple axial  $\Gamma_x = 1,0 \text{ Nm}$  sur l'extrémité  $B$  à l'instant  $t = 0 \text{ s}$ .

La durée d'analyse est suffisante pour accéder à la première réflexion d'onde sur l'encastrement.

On néglige la pesanteur.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On note  $C_\ell = \sqrt{E/\rho}$  la célérité des ondes de traction-compression.

La section de la poutre-tuyau est :  $S = \pi h (2 R_e - h)$ .

L'inertie de flexion de la poutre-tuyau est :  $I = \pi h (R_e (R_e^2 + h^2) - 3 h R_e^2 / 2 - h^3 / 4)$ .

L'inertie de torsion de la poutre-tuyau est :  $J_x = 2 \pi h (R_e (R_e^2 + h^2) - 3 h R_e^2 / 2 - h^3 / 4)$ .

L'élanement est donné par :  $\eta = l \sqrt{S/I}$ ,  $l$  étant la longueur de la poutre.

Pour les dimensions données au § 1, on a :

$$S = 0.0097389 \text{ m}^2 ; I = 0.0001171 \text{ m}^4 ; \eta = 9.1192 .$$

Le comportement vibratoire de la structure est constitué de modes de « poutre », et de modes de « coques » (ovalisation...). Cette poutre-tuyau est courte : on peut s'attendre à un effet de l'énergie de cisaillement transverse. On construit la solution dynamique transitoire sous excitation forcée par recombinaison modale.

#### 2.1.1 Solution élasto-dynamique de la poutre en traction-compression

◇ L'équilibre élastique dynamique des vibrations libres en traction-compression s'écrit :

$$ESu_{,xx} - \rho Su_{,tt} = 0 , \text{ car l'effort normal est } N = ESu_{,x}$$

Les fréquences des  $j^{\text{èmes}}$  modes propres de poutre sont données par [bib2] dans la situation encastree-libre en extension axiale :

$$f_j^{\text{axial}} = \frac{C_\ell}{4\ell} (2j-1) , \text{ pour } j=1,2,\dots , \text{ les modes étant : } u_j(x) = \sin \frac{\pi(2j-1)x}{2\ell}$$

Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve les fréquences :

$$f_1 = 1263,497 \text{ Hz} , f_2 = 3790,490 \text{ Hz} , f_3 = 6317,484 \text{ Hz} , f_4 = 8844,477 \text{ Hz} \dots$$

Ceci donne l'ordre de grandeur des périodes de pulsation harmonique de la réponse au chargement.

◇ Traitons maintenant la solution transitoire en chargement imposé à l'extrémité.

Le déplacement axial transitoire de la poutre, sous l'action d'une force  $F_x$ , est donné par [bib1] :

$$u(x, t) = \frac{4 C_\ell}{\pi ES} \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} \sin \left( \frac{(2j-1)\pi x}{2\ell} \right) \int_0^t F_x(\tau) \sin \left( \frac{(2j-1)\pi C_\ell(t-\tau)}{2\ell} \right) d\tau$$

Pour une force échelon  $F_x$  appliquée à  $t=0$  en  $B$ , l'onde se propage à la célérité  $C_\ell$  et vient se réfléchir en  $A$  à l'instant  $\ell/C_\ell$ ; avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve que cet instant est :  $0,000197864 \text{ s}$ .

On a :

$$u(x, t) = \frac{8 \ell F_x}{\pi^2 ES} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^2} \sin \frac{(2j-1)\pi x}{2\ell} \left( 1 - \cos \frac{(2j-1)\pi C_\ell t}{2\ell} \right)$$

Cette série converge rapidement à cause du terme  $(2j-1)^2$ . En  $x = \ell$ , on obtient :

$$u(\ell, t) = \frac{F_x \ell}{ES} - \frac{8 F_x \ell}{\pi^2 ES} \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_\ell t}{2\ell}\right)$$

Car :  $\sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , d'où  $u(\ell, t) \in \left[0, \frac{2 F_x \ell}{ES}\right]$

Avant la première réflexion d'onde sur l'encastrement, on obtient simplement :  $u(\ell, t) = \frac{F_x t}{S \sqrt{E \rho}}$ .

Calcul des efforts

L'effort normal est simplement :  $N(x, t) = ES u_{,x}(x, t)$ . D'où :

$$N(x, t) = \frac{4 F_x}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2\ell}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_\ell t}{2\ell}\right)\right)$$

D'où la réaction en  $A$  :

$$R_x^A(t) = -N(0, t) = \frac{4 F_x}{\pi} \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_\ell t}{2\ell}\right) - F_x$$

La réaction en  $A$  est nulle sur l'intervalle de temps  $[0 s; 0,000197864 s]$  avant l'arrivée de l'onde, puis vaut  $-2 F_x$ .

## 2.1.2 Solution élasto-dynamique de la poutre en flexion

On se limite aux mouvements dans le plan moyen  $xOy$ .

◇ Prenons d'abord la modélisation des poutres de Navier-Bernoulli-Euler. L'inertie de rotation n'est pas traitée, cf. [bib4].

L'équation locale d'équilibre élastique dynamique s'écrit [bib1,2,3] :

$$v_{,xxxx} + \frac{\rho S}{EI_z} v_{,tt} = 0.$$

L'équation de « dispersion » relie la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$  :  $\omega = k^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}}$ .

Pour les conditions aux limites « encastré-libre », on a l'expression des modes :

$$v(x, t) = e^{i\omega t} (c_1 (\cos kx - \cosh kx) + c_2 (\sin kx - \sinh kx))$$

$$\text{avec } \cos k\ell \cosh k\ell = -1 \quad \text{et} \quad c_2 / c_1 = (\sin k\ell - \sinh k\ell) / (\cos k\ell + \cosh k\ell)$$

Les fréquences des modes sont obtenues par :

$$f_n = \frac{(k\ell)_n^2}{2\pi \ell^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}} = \frac{(k\ell)_n^2 C_\ell}{2\pi \ell^2} \sqrt{\frac{I_z}{S}}$$

avec pour les premiers modes :

| n° de mode  | 1            | 2            | 3            | 4            | 5            | $n \geq 6$    |
|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| $(k\ell)_n$ | 1,875104069  | 4,694091133  | 7,854757438  | 10,99554073  | 14,13716839  | $(2n-1)\pi/2$ |
| $c_2 / c_1$ | -0.734095514 | -1.018467319 | -0.999224497 | -1.000033553 | -0.999998550 | $\approx -1$  |

Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve les fréquences :

$$f_1 = 310.133 \text{ Hz}, \quad f_2 = 1943.568 \text{ Hz}, \quad f_3 = 5442.048 \text{ Hz}, \quad f_4 = 10664.242 \text{ Hz}, \quad f_5 = 17628.755 \text{ Hz}$$

◇ Prenons ensuite la modélisation des poutres de Timoshenko avec cisaillement transverse et inertie de rotation, cette dernière étant alors traitée, cf. [bib4], de *Code\_Aster*.

L'équation locale d'équilibre élastique dynamique couple la flèche et la rotation et s'écrit [bib3] :

$$\begin{cases} GS_r(v_{xx} - \theta_{z,x}) - \rho S v_{,tt} = 0 \\ EI_z \theta_{z,xx} + GS_r(v_{,x} - \theta_z) - \rho I_z \theta_{z,tt} = 0 \end{cases}$$

L'équation de « dispersion » relie la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$  :

$$k^4 + \left( \frac{\rho}{E} + \frac{\rho S}{GS_r} \right) \omega^2 k^2 - \frac{\rho S \omega^2}{EI_z} + \frac{\rho^2 S}{GES_r} \omega^4 = 0$$

Deux racines sont toujours imaginaires, les deux autres sont complexes : réelles en dessous d'une fréquence de coupure :  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GS_r}{\rho I_z}}$ , et imaginaires pures au-delà de cette fréquence de coupure : les modes sont alors uniquement sinusoïdaux (pas de termes hyperboliques).

Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve [bib3] les fréquences (modes en sinusoïdes et exponentielles) :

$$f_1 = 269,932 \text{ Hz} , f_2 = 1077,199 \text{ Hz} , f_3 = 2270,705 \text{ Hz} , f_4 = 3249,207 \text{ Hz} , f_5 = 4649,212 \text{ Hz}$$

et la première fréquence du mode en sinusoïdes seules :  $f_5^{bis} = 4002,830 \text{ Hz}$  .

Il faut noter que dans [bib3] la valeur du coefficient de section réduite à l'effort tranchant est choisie égale à 0,530659727, tandis que dans *Code\_Aster*, la formule choisie [bib4] donne : 0,510805163. On peut en attendre une légère conséquence sur les fréquences propres calculées.

◇ Traitons maintenant la solution transitoire en chargement imposé à l'extrémité  $x = \ell$ . La solution s'écrit sous la forme d'une somme sur les modes propres obtenus ci-dessus (avec l'encastrement en  $A$ ) :

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(t) \cdot w_j(x) ; \quad \theta_z(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(t) \cdot \beta_j(x) \text{ (cas Timoshenko)}$$

On décompose le chargement à l'extrémité  $x = \ell$  sur les modes. Ainsi :

$$F_j(t) = w_j(\ell) \cdot F(t)$$

La solution vérifie :

$$\ddot{\eta}_j(t) + \omega_j^2 \eta_j(t) = F_j(t)$$

D'où :

$$\eta_j(t) = \frac{1}{\omega_j} \int_0^t F_j(\tau) \cdot \sin \omega_j(t - \tau) d\tau + \eta_j(0) \cos \omega_j t + \frac{1}{\omega_j} \dot{\eta}_j(0) \sin \omega_j t$$

$\eta_j(0)$  et  $\dot{\eta}_j(0)$  sont obtenus par les conditions initiales (ici dans le cas Euler-Bernoulli) :

$$\eta_j(0) = \int_0^{\ell} w_j(x) \cdot \rho S v(x, 0) dx \quad \text{et} \quad \dot{\eta}_j(0) = \int_0^{\ell} w_j(x) \cdot \rho S \dot{v}(x, 0) dx$$

## 2.1.3 Solution élasto-dynamique de la poutre-tuyau en torsion

◇ L'équilibre élastique dynamique des vibrations libres en torsion (modèle torsion libre) s'écrit :

$$M_{x,x} - \rho J \theta_{x,tt} = 0 , \text{ car le moment de torsion est } M_x = GJ \theta_{x,x}$$

Les fréquences des  $j^{\text{èmes}}$  modes propres de poutre sont données par [bib2] dans la situation encastree-libre en torsion :

$$f_j^{tors} = \frac{C_\ell}{4\ell} \frac{2j-1}{\sqrt{2(1+\nu)}}, \text{ pour } j=1,2,\dots, \text{ les modes étant : } \theta_{xj}(x) = \sin \frac{\pi(2j-1)x}{2\ell}$$

Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve les fréquences :

$$f_1 = 786,619 \text{ Hz}, f_2 = 2359,856 \text{ Hz}, f_3 = 3933,094 \text{ Hz}, f_4 = 5506,331 \text{ Hz} \dots$$

◊ La solution dynamique transitoire, sous chargement imposé à l'extrémité, présente une similarité complète avec la traction ; la rotation axiale transitoire de la poutre est donnée par, cf. [bib1] :

$$\theta_x(x, t) = \frac{4C_\ell}{\pi GJ} \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2\ell}\right) \int_0^t \Gamma_x(\tau) \sin\left(\frac{(2j-1)\pi C_\ell(t-\tau)}{2\ell}\right) d\tau$$

Pour un couple échelon  $\Gamma_x$ , appliqué à  $t=0$  en  $B$ , l'onde se propage à la célérité  $C_\ell$  et vient se réfléchir en  $A$  à l'instant  $\ell\sqrt{2(1+\nu)}/C_\ell$  ; avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve que cet instant est : 0,000317816 s.

On a :

$$\theta_x(x, t) = \frac{8\Gamma_x \ell}{\pi^2 GJ} \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^2} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2\ell}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_\ell t}{2\ell}\right)\right)$$

Cette série converge rapidement à cause du terme  $(2j-1)^2$ . En  $x = \ell$ , on obtient :

$$\theta_x(\ell, t) = \frac{\Gamma_x \ell}{GJ} - \frac{8\Gamma_x \ell}{\pi^2 GJ} \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_\ell t}{2\ell}\right)$$

$$\text{Car } \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ d'où } \theta_x(\ell, t) \in \left[0, \frac{2\Gamma_x \ell}{GJ}\right].$$

Avant la première réflexion d'onde sur l'encastrement, on obtient simplement :  $\theta_x(\ell, t) = \frac{\Gamma_x t}{J\sqrt{G\rho}}$ .

Calcul des efforts

Le moment de torsion est simplement :  $M_x(x, t) = GJ \theta_{x,x}(x, t)$ . D'où :

$$M_x(x, t) = \frac{4\Gamma_x}{\pi} \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2\ell}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_\ell t}{2\ell}\right)\right)$$

D'où le couple d'encastrement en  $A$  :

$$\Gamma_x^A(t) = -M_x(0, t) = \frac{4\Gamma_x}{\pi} \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)} \cos\left(\frac{(2j-1)\pi C_\ell t}{2\ell}\right) - \Gamma_x$$

Le moment d'encastrement en  $A$  est nul sur l'intervalle de temps  $[0 \text{ s}; 0,000317816 \text{ s}]$  avant l'arrivée de l'onde, puis vaut  $-2\Gamma_x$ .

## 2.1.4 Solution élasto-dynamique du tuyau en modèle coque cylindrique

Les conditions aux limites du problème étudié ne fixent que les modes rigides de la structure, sur les ddl de poutre. La cinématique de la coque cylindrique autour de celle de poutre est libre. Les paramètres de configuration du modèle de tuyau [bib5] sont donc libres.

Pour une coque cylindrique de longueur finie (longueur  $l$ , rayon extérieur  $R_e$ , épaisseur  $h$  rayon moyen  $R_m = R_e - h/2$ ), en admettant que les déformations membranaires suivantes sont nulles :

$\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{xx} \approx 0$  (la flexion étant prédominante ; mais on n'impose rien sur  $\epsilon_{xx}$ ), les modes propres sont de la forme suivante [bib2] avec  $j = 2, 3, 4, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  :

$$\begin{cases} u_x(x, \theta, t) = -\frac{R_m}{j^2} U_{n,x} \cos(j\theta) \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ u_\theta(x, \theta, t) = -\frac{1}{j} U_n \sin(j\theta) \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ u_r(x, \theta, t) = U_n \cos(j\theta) \cdot \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

où  $n$  désigne le numéro du mode axial et  $j$  le numéro du mode circonférentiel.

Et les fréquences sont [bib2] :

$$f_{jn} = \frac{C_\ell}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{\lambda_{jn}}{2\pi R_m}$$

où  $\lambda_{jn}$  est obtenu par :

$$\lambda_{jn}^2 = \frac{j^4 (a_{11} a_{22} a_{33} + 2a_{12} a_{23} a_{13} - a_{11} a_{23}^2 - a_{22} a_{31}^2 - a_{33} a_{12}^2)}{(j^4 + j^2 + \lambda_n^2 \alpha_{n2} R_m^2 / \ell^2) \cdot (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)}$$

où  $\lambda_n = (k \ell)_n$  est associé au mode de poutre d'Euler, pour les conditions aux limites choisies (cf. [§ 2.1.2]), où  $\alpha_{n2} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell U_{n,x}^2 dx$  est calculé à partir du mode axial de type poutre, en fonction des conditions aux limites du cylindre, et où les constantes  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{13}$  sont données par (en notant  $\chi = h^2 / (12 R_m^2)$ ) :

$$a_{11} = \lambda_n^2 R_m^2 / \ell^2 + \frac{1}{2} j^2 \alpha_{n2} (1-\nu)(1+\chi)$$

$$a_{22} = j^2 + \frac{1}{2} \alpha_{n2} \lambda_n^2 R_m^2 (1-\nu)(1+3\chi) / \ell^2$$

$$a_{33} = 1 + \chi \left( \lambda_n^4 R_m^4 / \ell^4 + (j^2 - 1)^2 + 2\nu j^2 \lambda_n^2 R_m^2 \alpha_{n1} / \ell^2 + 2j^2 \lambda_n^2 R_m^2 \alpha_{n2} (1-\nu) / \ell^2 \right)$$

$$a_{12} = -j \lambda_n R_m \left( \nu \alpha_{n1} + \frac{1}{2} \alpha_{n2} (1-\nu) \right) / \ell$$

$$a_{23} = j \left( 1 + \chi \frac{3}{4} R_m^2 \left( \nu \alpha_{n1} + \frac{3}{2} \alpha_{n2} (1-\nu) \right) / \ell^2 \right)$$

$$a_{31} = \lambda_n R_m \left( -\nu \alpha_{n1} + \chi \left( \frac{1}{2} j^2 \alpha_{n2} (1-\nu) - \lambda_n^2 R_m^2 / \ell^2 \right) \right) / \ell$$

$$\text{où } \alpha_{n1} = -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell U_{n,xx} \cdot U_n dx.$$

Les valeurs sont données par le tableau ci-dessous pour le cas encasté-libre (où les déplacements et les rotations sont totalement bloquées en  $x = 0$ ) :

| n° de mode poutre | 1           | 2           | 3           | 4           | 5           |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $(k \ell)_n$      | 1,875104069 | 4,694091133 | 7,854757438 | 10,99554073 | 14,13716839 |
| $\alpha_{n1}$     | -0.2241     | 0.6033      | 0.7440      | 0.8182      | 0.8585      |
| $\alpha_{n2}$     | 1.3219      | 1.4712      | 1.2529      | 1.1820      | 1.1415      |

Dans la modélisation proposée ici, l'encastrement est assuré uniquement sur les ddls de poutre, à la manière de la liaison COQ\_POU, voir [bib6], ce qui assure que seuls les moyennes et les moments d'ordre 1 des déplacements à l'extrémité  $x=0$  sont nuls. La cinématique des éléments tuyaux découple les termes engendrant la déformée de « poutre » de ceux les complétant pour engendrer une cinématique de coques, à l'aide des premiers modes de Fourier circonférentiels, voir [bib5], au

sens du produit scalaire des déplacements sur la structure, c'est-à-dire aussi au sens des forces d'inertie (matrice de masse).

C'est pourquoi, on donne ci-dessous les deux familles de modes propres totalement inextensionnels  $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{x\theta} = \epsilon_{xx} = 0$ , pour un cylindre « libre-libre », de longueur  $\ell$ , avec  $j = 2, 3, 4, \dots$  :

modes de Rayleigh

$$\begin{cases} u_x(x, \theta, t) = 0 \\ u_\theta(x, \theta, t) = -\frac{1}{j} \sin(j\theta) \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ u_r(x, \theta, t) = \cos(j\theta) \cdot \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

et

modes de Love

$$\begin{cases} u_x(x, \theta, t) = \frac{R_m}{j^2} \cos(j\theta) \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ u_\theta(x, \theta, t) = -\frac{(x - \ell/2)}{j} \sin(j\theta) \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ u_r(x, \theta, t) = (x - \ell/2) \cos(j\theta) \cdot \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Ces modes vérifient bien la condition en  $x = 0$  d'encastrement en moyenne de « poutre ».

Les fréquences des  $j^{\text{èmes}}$  modes propres sont respectivement pour les premiers, puis pour les seconds :

$$f_j^{\text{Rayleigh}} = \frac{C_\ell \sqrt{\chi}}{2\pi R_m \sqrt{1-\nu^2}} \frac{j(j^2-1)}{\sqrt{j^2+1}} \quad \text{et} \quad f_j^{\text{Love}} = \frac{C_\ell \sqrt{\chi}}{2\pi R_m \sqrt{1-\nu^2}} j(j^2-1) \sqrt{\frac{j^2 \ell^2 + 24(1-\nu) R_m^2}{j^2 \ell^2 + 12 R_m^2}}$$

avec  $j = 2, 3, 4, \dots$ . Avec les caractéristiques mécaniques de ce problème, on trouve les fréquences :

Rayleigh :  $f_2 = 78,22613 \text{ Hz}$ ,  $f_3 = 221,2569 \text{ Hz}$ ,  $f_4 = 424,2407 \text{ Hz}$ ,  $f_5 = 686,0885 \text{ Hz}$  ...

Love :  $f_2 = 179,7433 \text{ Hz}$ ,  $f_3 = 708,6504 \text{ Hz}$ ,  $f_4 = 1762,019 \text{ Hz}$ ,  $f_5 = 3514,927 \text{ Hz}$  ...

## 2.2 Résultats de référence

Fréquences propres, référence analytique ;

Déplacements, rotations en  $B$  : composantes  $DX$  et  $DRX$  référence analytique par séries ;

Réactions en  $A$  : composantes  $DX$  et  $DRX$  référence analytique par séries.

## 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

Comparaison de quelques fréquences en modèle poutre obtenues avec le logiciel Circus [bib7].  
Comparaison de quelques déplacements et rotations transitoires en modèle poutre d'Euler obtenues par S.Potapov avec le logiciel EuroPlexus (en dynamique rapide explicite), pour lequel on a choisi un maillage plus grossier (100 éléments finis de poutre, schéma explicite de différences centrées et pas de temps optimal de l'ordre de  $\Delta t = 10^{-10} \text{ s}$ ). On ne compare pas les efforts obtenus par EuroPlexus, car ils sont entachés d'oscillations provenant du schéma d'intégration explicite à différences centrées.

## 2.4 Références bibliographiques

- [1] L.MEIROVITCH : *Analytical methods in vibrations*. McMillan Ed., 1967.
- [2] R.D.BLEVINS : *Formulas for natural frequency and mode shape*. R.E.Krieger Publ. Co., 1984.
- [3] S.M.HAN, H.BENAROYA et T.WEI : *Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories*. Journal of Sound and Vibration (1999), vol. 225, n°5, pp. 935-988.
- [4] J.M.PROIX et al. *Éléments « exacts » de poutres (droites et courbes)*. [R3.08.01-A], 12/1996.

- [5] P.MASSIN et al. *Éléments finis de tuyau droit et courbe avec ovalisation, gonflement et gauchissement en élasto-plasticité*. [R3.08.06-B], 12/12/03.
- [6] J.M.PROIX. *Liaison coque-poutre*, [R3.03.06], 06/12/00.
- [7] S.CAILLAUD, P.VAUGRANTE. *Note théorique et validation numérique de l'élément droit couplé fluide-structure du code CIRCUS*, note EDF/AMV HT-64/00/002/A, 8/09/00.
- [8] J.L.BATOZ. *Modélisation des structures par éléments finis*. Éditions Hermès, 1995.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

On adopte une modélisation par éléments de poutre d'Euler `POU_D_E`.

Le maillage du modèle calculé avec *Code\_Aster* est constitué de 1001 nœuds et de 1000 mailles `SEG2`. Il faut un maillage très fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4].

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de  $t=0\text{ s}$ , afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle  $[0\text{ s}; 0,00032\text{ s}]$ .

Le schéma d'intégration temporelle choisi est :

schéma de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et  $\Delta t = 10^{-7}\text{ s}$ .

### 3.2 Grandeurs testées et résultats

#### 3.2.1 Modes vibratoires

On met pour information quelques valeurs de fréquences propres obtenues avec le logiciel *Circus* [bib7].

Fréquences propres de poutre d'Euler (en  $\text{Hz}$ )

| Type de mode | référence | nature     | Code_Aster | Circus  |
|--------------|-----------|------------|------------|---------|
| Flexion 1    | 310,133   | analytique | 310.132    | 310.13  |
| Flexion 2    | 1943,568  | analytique | 1943.566   | 1943.56 |
| Flexion 3    | 5442,048  | analytique | 5442.046   |         |
| Flexion 4    | 10664,242 | analytique | 10664.242  |         |
| Flexion 5    | 17628,755 | analytique | 17628.756  |         |
| Traction 1   | 1263,497  | analytique | 1263.497   | 1263.48 |
| Traction 2   | 3790,490  | analytique | 3790.494   |         |
| Traction 3   | 6317,484  | analytique | 6317.500   |         |
| Traction 4   | 8844,477  | analytique | 8844.522   |         |
| Torsion 1    | 786,619   | analytique | 786.619    | 786.62  |
| Torsion 2    | 2359,856  | analytique | 2359.858   |         |
| Torsion 3    | 3933,094  | analytique | 3933.104   |         |
| Torsion 4    | 5506,331  | analytique | 5506.359   |         |

#### 3.2.2 Réponse transitoire

Déplacements de l'extrémité - point *B* (en  $\text{m}$ ), rotations de l'extrémité - point *B*

| Instant (s) | Composant<br>e | référence               | nature     | Code_Aster              | EuroPlexus             |
|-------------|----------------|-------------------------|------------|-------------------------|------------------------|
| 0.00010     | DX             | $2.5947 \cdot 10^{-10}$ | analytique | $2.5934 \cdot 10^{-10}$ | $2.568 \cdot 10^{-10}$ |
| 0.00015     | DX             | $3.8921 \cdot 10^{-10}$ | analytique | $3.8908 \cdot 10^{-10}$ | $3.865 \cdot 10^{-10}$ |
| 0.00020     | DX             | $5.1895 \cdot 10^{-10}$ | analytique | $5.1882 \cdot 10^{-10}$ | $5.163 \cdot 10^{-10}$ |
| 0.00010     | DRX            | $1.7329 \cdot 10^{-8}$  | analytique | $1.7321 \cdot 10^{-8}$  | $1.715 \cdot 10^{-8}$  |
| 0.00020     | DRX            | $3.4659 \cdot 10^{-8}$  | analytique | $3.4651 \cdot 10^{-8}$  | $3.448 \cdot 10^{-8}$  |

Réactions à l'encastrement - point *A* (en  $\text{N}$ ), moments à l'encastrement - point *A* (en  $\text{N.m}$ )

| Instant (s) | Composante | référence | nature     |
|-------------|------------|-----------|------------|
| 0.00010     | DX         | 0.00      | analytique |
| 0.00015     | DX         | 0.00      | analytique |

---

|         |     |       |            |
|---------|-----|-------|------------|
| 0.00020 | DX  | -2.00 | analytique |
| 0.00010 | DRX | 0.00  | analytique |
| 0.00020 | DRX | 0.00  | analytique |
| 0.00032 | DRX | -2.00 | analytique |

---

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

On adopte une modélisation par éléments de poutre de Timoshenko `POU_D_T`.

Le maillage du modèle calculé avec *Code\_Aster* est constitué de 1001 nœuds et de 1000 mailles `SEG3`. Il faut un maillage très fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4]. C'est le même maillage que dans la modélisation A.

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de  $t=0\text{ s}$ , afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle  $[0\text{ s}; 0,00032\text{ s}]$ .

Le schéma d'intégration temporelle choisi est :

schéma de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et  $\Delta t = 10^{-7}\text{ s}$ .

### 4.2 Grandeurs testées et résultats

#### 4.2.1 Modes vibratoires

On met pour information quelques valeurs de fréquences propres obtenues avec le logiciel Circus [bib7], pour lequel le coefficient de section réduite est obtenue selon [bib8] : 0.5011, c'est-à-dire une valeur plus faible que celle choisie dans la référence [bib3] d'où des fréquences plus basses. Pour se confronter avec la référence [bib3], on met aussi les valeurs des prédictions de Circus avec le coefficient de section réduite égal à 0,530659727 de [bib3]. On constate que les résultats sont alors identiques à  $10^{-4}$  près ; la valeur du coefficient de section réduite au cisaillement joue un rôle important sur cet exemple.

Fréquences propres de poutre de Timoshenko (en *Hz*)

| Type de mode  | référence | nature     | Code_Aster | Circus<br>coef Batoz | Circus<br>coef [bib3] |
|---------------|-----------|------------|------------|----------------------|-----------------------|
| Flexion 1     | 269,932   | analytique | 269.261    | 268.3                |                       |
| Flexion 2     | 1077,199  | analytique | 1059.305   |                      |                       |
| Flexion 3     | 2270,705  | analytique | 2226.699   |                      |                       |
| Flexion 4     | 3249,207  | analytique | 3173.253   |                      |                       |
| Flexion 5     | 4649,212  | analytique | 4554.463   | 4557.2               | 4649.6                |
| Flexion 5 bis | 4002,830  | analytique |            | 3903.0               | 4003.2                |
| Traction 1    | 1263,497  | analytique | 1263.497   | 1263.48              |                       |
| Traction 2    | 3790,490  | analytique | 3790.494   |                      |                       |
| Traction 3    | 6317,484  | analytique | 6317.500   |                      |                       |
| Traction 4    | 8844,477  | analytique | 8844.522   |                      |                       |
| Torsion 1     | 786,619   | analytique | 786.619    | 786.62               |                       |
| Torsion 2     | 2359,856  | analytique | 2359.858   |                      |                       |
| Torsion 3     | 3933,094  | analytique | 3933.104   |                      |                       |
| Torsion 4     | 5506,331  | analytique | 5506.359   |                      |                       |

#### 4.2.2 Réponse transitoire

Déplacements de l'extrémité - point *B* (en *m*), rotations de l'extrémité - point *B*

| Instant (s) | Composant<br>e | référence               | nature     |
|-------------|----------------|-------------------------|------------|
| 0.00010     | DX             | $2.5947 \cdot 10^{-10}$ | analytique |
| 0.00015     | DX             | $3.8921 \cdot 10^{-10}$ | analytique |
| 0.00020     | DX             | $5.1895 \cdot 10^{-10}$ | analytique |
| 0.00010     | DRX            | $1.7329 \cdot 10^{-8}$  | analytique |

---

0.00020      DRX      3.4659 10<sup>-8</sup>      analytique

---

Réactions à l'encastrement - point  $A$  (en  $N$ ), moments à l'encastrement - point  $A$  (en  $N.m$ )

| Instant (s) | Composante | référence | nature     |
|-------------|------------|-----------|------------|
| 0.00010     | DX         | 0.00      | analytique |
| 0.00015     | DX         | 0.00      | analytique |
| 0.00020     | DX         | -2.00     | analytique |
| 0.00010     | DRX        | 0.00      | analytique |
| 0.00020     | DRX        | 0.00      | analytique |
| 0.00032     | DRX        | -2.00     | analytique |

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

On adopte une modélisation par éléments de poutre-tuyau TUYAU\_3M.

Le maillage du modèle calculé avec Code\_Aster est constitué de 1001 nœuds et de 500 mailles SEG3. Il faut un maillage assez fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4]. C'est le même maillage que dans la modélisation A.

On crée deux modèles : un où le tuyau est bloqué en  $B$  sur les seuls 6 degrés de liberté de poutre ; un second où le tuyau est lié (par une LIAISON\_DDL) à un élément discret DIS\_TR (sur une maille point POI1) à 6 degrés de liberté, qui lui est totalement fixé.

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de  $t=0\text{ s}$ , afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle  $[0\text{ s}; 0,00032\text{ s}]$ .

Le schéma d'intégration temporelle choisi est :

schéma de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et  $\Delta t = 10^{-7}\text{ s}$ .

### 5.2 Grandeurs testées et résultats

#### 5.2.1 Modes vibratoires

Fréquences propres de « poutre » et de « coque » (en  $\text{Hz}$ ), cas TUYAU\_3M

| Type de mode     | référence | nature     |
|------------------|-----------|------------|
| Flexion 1        | 269,932   | analytique |
| Flexion 2        | 1077,199  | analytique |
| Flexion 3        | 2270,705  | analytique |
| Flexion 4        | 3249,207  | analytique |
| Flexion 5        | 4649,212  | analytique |
| Traction 1       | 1263,497  | analytique |
| Traction 2       | 3790,490  | analytique |
| Traction 3       | 6317,484  | analytique |
| Traction 4       | 8844,477  | analytique |
| Torsion 1        | 786,619   | analytique |
| Torsion 2        | 2359,856  | analytique |
| Torsion 3        | 3933,094  | analytique |
| Torsion 4        | 5506,331  | analytique |
|                  |           |            |
| Coque Rayleigh 2 | 78,22613  | analytique |
| Coque Rayleigh 3 | 221,2569  | analytique |
| Coque Rayleigh 4 | 424,2407  | analytique |
| Coque Rayleigh 5 | 686,0885  | analytique |
| Coque Love 2     | 179,7433  | analytique |
| Coque Love 3     | 708,6504  | analytique |
| Coque Love 4     | 1762,019  | analytique |
| Coque Love 5     | 3514,927  | analytique |

#### 5.2.2 Réponse transitoire

Déplacements de l'extrémité - point  $B$  (en  $\text{m}$ ), rotations de l'extrémité - point  $B$ , cas TUYAU\_3M

| Instant (s) | Composante | référence               | nature     |
|-------------|------------|-------------------------|------------|
| 0.00010     | DX         | $2.5947 \cdot 10^{-10}$ | analytique |
| 0.00015     | DX         | $3.8921 \cdot 10^{-10}$ | analytique |
| 0.00020     | DX         | $5.1895 \cdot 10^{-10}$ | analytique |

|         |     |                        |            |
|---------|-----|------------------------|------------|
| 0.00005 | DRX | $8.6648 \cdot 10^{-9}$ | analytique |
| 0.00010 | DRX | $1.7330 \cdot 10^{-8}$ | analytique |
| 0.00020 | DRX | $3.4659 \cdot 10^{-8}$ | analytique |

Réactions à l'encastrement - point  $A$  (en  $N$ ), moments à l'encastrement - point  $A$  (en  $Nm$ ), cas TUYAU\_3M

| Instant (s) | Composante | référence | nature     |
|-------------|------------|-----------|------------|
| 0.00010     | DX         | 0.00      | analytique |
| 0.00015     | DX         | 0.00      | analytique |
| 0.00020     | DX         | -2.00     | analytique |
| 0.00032     | DRX        | -2.00     | analytique |

Enfin, à l'extrémité libre point  $B$ , les valeurs des REAC\_NODA sont de l'ordre de  $10^{-12}$ , voire même nettement inférieures, aux mêmes instants, ce qui est bien proche de la valeur nulle attendue.

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

On adopte une modélisation par éléments de poutre-tuyau TUYAU\_6M à 3 nœuds.

Le maillage du modèle calculé avec *Code\_Aster* est constitué de 1001 nœuds et de 500 mailles SEG3. Il faut un maillage assez fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4]. C'est le même maillage que dans la modélisation A.

On crée deux modèles : un où le tuyau est bloqué en *A* sur les seuls 6 degrés de liberté de poutre ; un second où le tuyau est lié (par une LIAISON\_DDL) à un élément discret DIS\_TR (sur une maille point POI1) à 6 degrés de liberté, qui lui est totalement fixé.

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de  $t=0\text{ s}$ , afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle  $[0\text{ s}; 0,00032\text{ s}]$ .

Le schéma d'intégration temporelle choisi est :

schéma de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et  $\Delta t = 10^{-7}\text{ s}$ .

### 6.2 Grandeurs testées et résultats

#### 6.2.1 Modes vibratoires

Fréquences propres de « poutre » et de « coque » (en *Hz*), cas TUYAU\_6M

| Type de mode     | référence | nature     |
|------------------|-----------|------------|
| Flexion 1        | 269,932   | analytique |
| Flexion 2        | 1077,199  | analytique |
| Flexion 3        | 2270,705  | analytique |
| Flexion 4        | 3249,207  | analytique |
| Flexion 5        | 4649,212  | analytique |
| Traction 1       | 1263,497  | analytique |
| Traction 2       | 3790,490  | analytique |
| Traction 3       | 6317,484  | analytique |
| Traction 4       | 8844,477  | analytique |
| Torsion 1        | 786,619   | analytique |
| Torsion 2        | 2359,856  | analytique |
| Torsion 3        | 3933,094  | analytique |
| Torsion 4        | 5506,331  | analytique |
| Coque Rayleigh 2 | 78,22613  | analytique |
| Coque Rayleigh 3 | 221,2569  | analytique |
| Coque Rayleigh 4 | 424,2407  | analytique |
| Coque Rayleigh 5 | 686,0885  | analytique |
| Coque Love 2     | 179,7433  | analytique |
| Coque Love 3     | 708,6504  | analytique |
| Coque Love 4     | 1762,019  | analytique |
| Coque Love 5     | 3514,927  | analytique |

#### 6.2.2 Réponse transitoire

Déplacements de l'extrémité - point *B* (en *m*), rotations de l'extrémité - point *B*, cas TUYAU\_6M

| Instant (s) | Composante | référence               | nature     |
|-------------|------------|-------------------------|------------|
| 0.00010     | DX         | $2.5947 \cdot 10^{-10}$ | analytique |
| 0.00015     | DX         | $3.8921 \cdot 10^{-10}$ | analytique |
| 0.00020     | DX         | $5.1895 \cdot 10^{-10}$ | analytique |

|         |     |                        |            |
|---------|-----|------------------------|------------|
| 0.00005 | DRX | $8.6648 \cdot 10^{-9}$ | analytique |
| 0.00010 | DRX | $1.7330 \cdot 10^{-8}$ | analytique |
| 0.00020 | DRX | $3.4659 \cdot 10^{-8}$ | analytique |

Réactions à l'encastrement - point  $A$  (en  $N$ ), moments à l'encastrement - point  $A$  (en  $Nm$ ), cas  
TUYAU\_6M

| Instant (s) | Composante | référence | nature     |
|-------------|------------|-----------|------------|
| 0.00010     | DX         | 0.00      | analytique |
| 0.00015     | DX         | 0.00      | analytique |
| 0.00020     | DX         | -2.00     | analytique |
| 0.00032     | DRX        | -2.00     | analytique |

Enfin, à l'extrémité - point  $B$ , les valeurs des REAC\_NODA sont de l'ordre de  $10^{-12}$ , voire même nettement inférieures, aux mêmes instants, ce qui est bien proche de la valeur nulle attendue.

## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation est faite par des éléments de barre (BARRE).

Le maillage du modèle *Code\_Aster* est constitué de 1001 nœuds et de 1000 mailles SEG2. Il faut un maillage très fin, car les forces d'inertie donnent des solutions qui ne sont pas dans la base des fonctions de forme des éléments de poutre, voir [bib4]. On a changé l'orientation du maillage par rapport à la modélisation A.

On choisit une discrétisation temporelle serrée à partir de  $t=0\text{ s}$ , afin de capter au mieux le choc initial. On choisit de résoudre sur l'intervalle  $[0\text{ s}; 0,00032\text{ s}]$ .

Le schéma d'intégration temporelle choisi est celui de Newmark, en accélération moyenne (valeurs par défaut) et  $\Delta t = 10^{-7}\text{ s}$ .

### 7.2 Grandeurs testées et résultats

Calcul des modes vibratoires :

Fréquences propres de poutre d'Euler (en Hz)

| Type de mode | référence | Nature     | Tolérance |
|--------------|-----------|------------|-----------|
| Traction 1   | 1263.5    | analytique | 1.0E-03   |
| Traction 2   | 3790.49   | analytique | 1.0E-03   |
| Traction 3   | 6317.48   | analytique | 1.0E-03   |
| Traction 4   | 8844.48   | analytique | 1.0E-03   |

Calcul avec DYNALIB :

Déplacements de l'extrémité - point B (en m), rotations de l'extrémité - point B

| Instant (s) | Composante | référence  | Nature     | Tolérance |
|-------------|------------|------------|------------|-----------|
| 0.00010     | DX         | 1.8347E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00010     | DY         | 1.8347E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00015     | DX         | 2.7521E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00015     | DY         | 2.7521E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00020     | DX         | 3.6695E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00020     | DY         | 3.6695E-10 | analytique | 1.0E-03   |

Réactions à l'encastrement - point A (en N), moments à l'encastrement - point A (en N.m)

| Instant (s) | Composante | référence | Nature     | Tolérance |
|-------------|------------|-----------|------------|-----------|
| 0.00010     | DX         | 0.00      | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00010     | DY         | 0.00      | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00015     | DX         | 0.00      | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00015     | DY         | 0.00      | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00020     | DX         | -1.414213 | analytique | 5.0%      |
| 0.00020     | DY         | -1.414213 | analytique | 5.0%      |

Calcul avec DYNALIB :

Déplacements de l'extrémité - point B (en m), rotations de l'extrémité - point B

| Instant (s) | Composante | Référence  | Nature     | Tolérance |
|-------------|------------|------------|------------|-----------|
| 0.00010     | DX         | 1.8347E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00010     | DY         | 1.8347E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00015     | DX         | 2.7521E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00015     | DY         | 2.7521E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00020     | DX         | 3.6695E-10 | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00020     | DY         | 3.6695E-10 | analytique | 1.0E-03   |

Réactions à l'encastrement - point  $A$  (en  $N$ ), moments à l'encastrement - point  $A$  (en  $N.m$ )

| Instant (s) | Composante | référence | nature     | Tolérance |
|-------------|------------|-----------|------------|-----------|
| 0.00010     | DX         | 0.00      | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00010     | DY         | 0.00      | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00015     | DX         | 0.00      | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00015     | DY         | 0.00      | analytique | 1.0E-03   |
| 0.00020     | DX         | -1.414213 | analytique | 5.0%      |
| 0.00020     | DY         | -1.414213 | analytique | 5.0%      |

## 8 Synthèse des résultats

Un maillage relativement fin est nécessaire pour obtenir des résultats précis (propagation d'onde).

On constate que le modèle de poutre de Timoshenko est plus précis en flexion, mais que la valeur du coefficient de section réduite au cisaillement joue un rôle important sur cet exemple. Le logiciel de dynamique fréquentielle des tuyauteries *Circus* donne des valeurs très proches des fréquences déterminées par *Code\_Aster* pour les modèles de poutres d'Euler et Timoshenko.

Le logiciel de dynamique rapide *EuroPlexus* donne des valeurs très proches par rapport à celles de *Code\_Aster* pour les éléments de poutres d'Euler.

Le modèle par éléments finis de coque permet de définir le domaine de validité des modélisations en éléments de poutre et en éléments tuyaux.