SDLL02 - Poutre élancée, encastrée-libre, repliée sur elle même

Résumé :

Ce problème bidimensionnel consiste à rechercher les fréquences et les modes de vibration d'une structure mécanique, composée d'une poutre élancée, encastrée libre et repliée sur elle-même.

Le problème posé n'a pas de signification physique. Il permet par contre de valider la recherche des fréquences propres de flexion multiples et la recherche des modes doubles dans un sous-espace d'ordre 2.

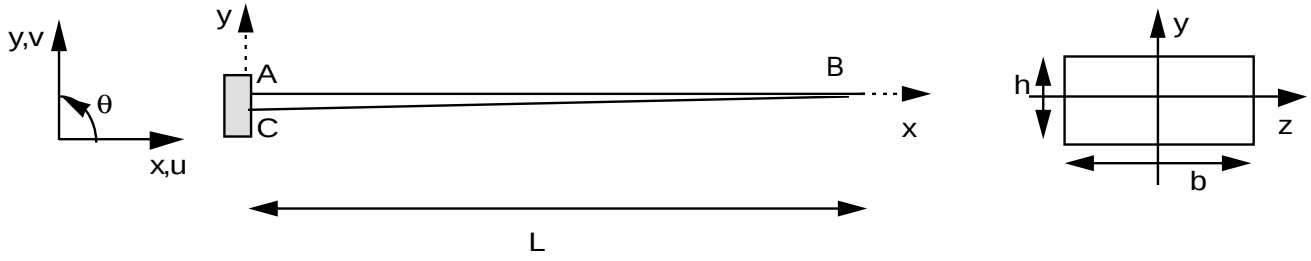
Dans ce test, on effectue trois modélisations différentes :

dans la première modélisation, les conditions aux limites sont imposées à l'aide de paramètres de Lagrange (commande AFFE_CHAR_MECA) et les valeurs et vecteurs propres sont calculés par la méthode de Lanczos (commande MODE_ITER_SIMULT, méthode : 'TRI_DIAG'),
dans la deuxième modélisation, les conditions aux limites sont imposées en supprimant des degrés de liberté dans les matrices de masse et de raideur (commande AFFE_CHAR_CINE) et les valeurs et vecteurs propres sont calculés par la méthode de Bathe et Wilson (commande MODE_ITER_SIMULT, méthode : 'JACOBI'),
dans la troisième modélisation, on vérifie le comportement de la modélisation COQUE_C_PLAN en dynamique. Les valeurs propres et les modes propres sont calculés avec la commande MODE_ITER_SIMULT et avec la méthode de SORENSEN.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Les caractéristiques géométriques de la poutre constituant le modèle mécanique sont les suivantes :

Longueur : $L=0.5\,m$

Section droite rectangulaire :

Hauteur :	$h=0.005\,m$
Largeur :	$b=0.050\,m$
Aire :	$A=2.5\,10^{-4}\,m^2$
Moment d'inertie :	$I_z=5.208\,10^{-10}\,m^4$

Les coordonnées (en mètres) des points caractéristiques de l'ensemble des poutres sont :

	A	B	C
x	0.	0.5	0.
y	0.	0.	0.

1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés du matériau constituant la poutre sont :

$E=2.1\,10^{11}\,Pa$
$\nu=0.3$
$\rho=7\,800.\,kg/m^3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

La condition aux limites qui caractérise ce problème est l'encastrement du point A et s'écrit :

$u=v=0.$, $\theta=0$.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle donnée dans la fiche SDLL02/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante :

Par la méthode de raideur dynamique, on montre que la poutre repliée admet des fréquences doubles, solution de :

$$\cos(\lambda)=0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_i=(2i-1)\frac{\pi}{2}$$

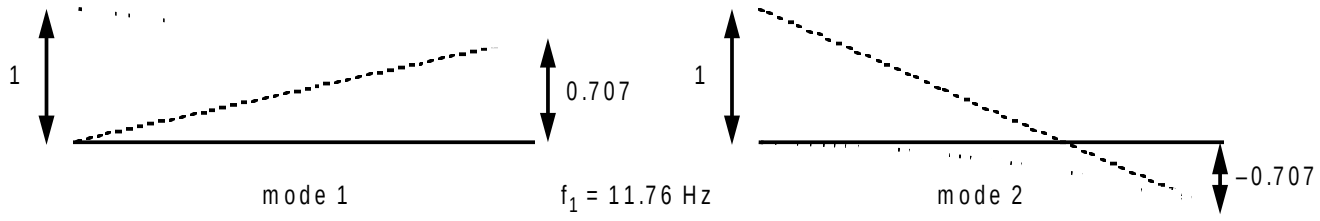
$$f_i=\frac{1}{2\pi}\frac{\lambda_i^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}} \qquad i=1,2,...$$

Pour une section rectangulaire, on obtient :

$$f_i=(2i-1)^2\pi\frac{R}{8L^2}\sqrt{\frac{E}{12\rho}} \quad i=1,2,...$$

Cette formulation néglige les déformations d'effort tranchant et d'inertie de rotation (poutre d'Euler-Bernoulli).

Pour les modes propres, les formes sont données dans le guide VPCS. Ils sont normés à 1 ou –1 au point de plus grande amplitude. On a des résultats seulement pour les modes 1, 2, 3, 4, 7 et 8. Par exemple, les formes des deux premiers modes propres sont les suivantes :



2.2 Résultats de référence

Les résultats de référence sont les huit premières fréquences propres et les déplacements des points B , C pour les modes propres 1, 2, 3, 4, 7 et 8. Dans *Code_Aster*, les modes sont normés à 1 au point de plus grande amplitude (commande NORM_MODE). Pour pouvoir faire des comparaisons avec les résultats de référence, ces derniers ont été corrigés (multiplication par –1 si nécessaire).

2.3 Incertitude sur la solution

Il n'y a pas d'incertitude sur la solution car elle est analytique.

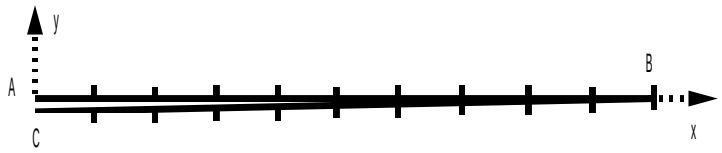
2.4 Références bibliographiques

1) PIRANDA J. : Cours et Travaux Dirigés de Vibrations des Structures - Option Mécanique - Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et Micromécanique - Laboratoire de Mécanique Appliquée - Besançon (France (1983).)

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



On a découpé la poutre en 20 mailles SEG2 (10 pour la partie AB et 10 pour la partie BC).

La modélisation utilisée pour les poutres est celle d'Euler Bernoulli (POU_D_E).

On recherche des solutions bidimensionnelles. On peut donc bloquer pour tous les nœuds le déplacement DZ et les rotations DRX et DRY .

L'extrémité de la poutre (point A) est encastrée d'où en ce point :

$$DX=DY=0. \quad DRZ=0.$$

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 21 nœuds et 20 mailles de type SEG2.

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point $A=A$ Point $B=B$ Point $C=C$

3.3 Grandeurs testées et résultats

Pour les fréquences de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Référence
Fréquence 1	11.76
Fréquence 2	11.76
Fréquence 3	105.88
Fréquence 4	105.88
Fréquence 5	294.10
Fréquence 6	294.10
Fréquence 7	576.44
Fréquence 8	576.44

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour les modes de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Points	Grandeur	Référence
Fréquence 1	B	DY	–0.707
	C	DY	1.
Fréquence 2	B	DY	0.707
	C	DY	1.
Fréquence 3	B	DY	0.707
	C	DY	1.
Fréquence 4	B	DY	–0.370
	C	DY	0.523
Fréquence 7	B	DY	0.707
	C	DY	1.
Fréquence 8	B	DY	–0.388
	C	DY	0.549

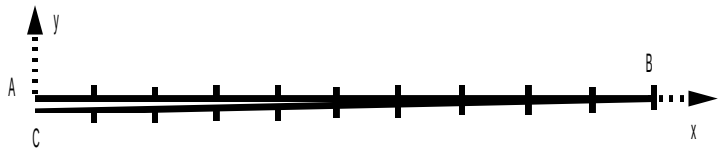
3.4 Remarques

Pour les fréquences propres, les résultats obtenus sont corrects. Il en est de même pour les résultats obtenus concernant les modes propres. La tolérance est inférieure à 2% pour l'ensemble des modes sauf pour le mode 2 où la tolérance est comprise entre 2 et 3% .

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



On a découpé la poutre en 20 mailles SEG2 (10 pour la partie AB et 10 pour la partie BC).

La modélisation utilisée pour les poutres est celle d'Euler Bernouilli (POU_D_E).

On recherche des solutions bidimensionnelles. On peut donc bloquer pour tous les nœuds le déplacement DZ et les rotations DRX et DRY .

L'extrémité de la poutre (point A) est encastrée d'où en ce point :

$$DX=DY=0. \quad DRZ=0.$$

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 21 nœuds et 20 mailles de type SEG2.

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point $A=A$ Point $B=B$ Point $C=C$

4.3 Grandeurs testées et résultats

Pour les fréquences de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Référence
Fréquence 1	11.76
Fréquence 2	11.76
Fréquence 3	105.88
Fréquence 4	105.88
Fréquence 5	294.10
Fréquence 6	294.10
Fréquence 7	576.44
Fréquence 8	576.44

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour les modes de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Points	Grandeur	Référence
Fréquence 1	B	DY	–0.707
	C	DY	1.
Fréquence 2	B	DY	0.707
	C	DY	1.
Fréquence 3	B	DY	0.707
	C	DY	1.
Fréquence 4	B	DY	–0.370
	C	DY	0.523
Fréquence 7	B	DY	0.707
	C	DY	1.
Fréquence 8	B	DY	–0.388
	C	DY	0.549

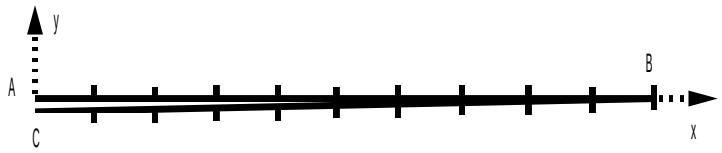
4.4 Remarques

Pour les fréquences propres, les résultats obtenus sont corrects. Il en est de même pour les résultats obtenus concernant les modes propres. La tolérance est inférieure à 2% pour l'ensemble des modes sauf pour le mode 2 où la tolérance est comprise entre 3 et 4% .

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



On a découpé la poutre en 20 mailles SEG3 (10 pour la partie AB et 10 pour la partie BC).

La modélisation utilisée est COQUE_C_PLAN.

L'extrémité de la poutre (point A) est encastrée d'où en ce point :

$DX = DY = DRZ = 0$.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 41 nœuds et 20 mailles de type SEG3.

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point $A = A$ Point $B = B$ Point $C = C$

5.3 Grandeurs testées et résultats

Pour les fréquences de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Référence
Fréquence 1	11.76
Fréquence 2	11.76
Fréquence 3	105.88
Fréquence 4	105.88
Fréquence 5	294.10
Fréquence 6	294.10
Fréquence 7	576.44
Fréquence 8	576.44

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour les modes de vibration de la structure, on a les résultats suivants :

Identification	Points	Grandeur	Référence
Fréquence 1	B	DY	–0.707
	C	DY	1.
Fréquence 2	B	DY	0.707
	C	DY	1.
Fréquence 3	B	DY	0.707
	C	DY	1.
Fréquence 4	B	DY	–0.370
	C	DY	0.523
Fréquence 7	B	DY	0.707
	C	DY	1.
Fréquence 8	B	DY	–0.388
	C	DY	0.549

5.4 Remarques

Dans ce cas-test, où les résultats sont indépendants du module d'Young, il n'est pas nécessaire de modifier le module d'Young retenu pour la modélisation, comme dans le cas de l'analyse statique linéaire, pour tenir compte de la largeur réelle de la poutre.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Modélisations A et B de type Poutre :
Le problème est traité avec une très bonne précision sur les huit premières fréquences (tolérance $< 0.1\%$) pour les deux modélisations testées. Les composantes des modes 3, 4, 7 et 8 sont obtenues aussi avec une bonne précision de l'ordre de 0.1% . La précision sur le mode 1 est de l'ordre de 1% pour la méthode de Lanczos et de 0.5% pour la méthode de Bathe et Wilson. En ce qui concerne le mode 2, la précision se dégrade : elle est de l'ordre de 2.7% pour la méthode de Lanczos et de l'ordre de 3.3% pour la méthode de Bathe et Wilson. Des tests complémentaires (utilisation de la méthode de Lanczos en imposant des conditions aux limites par la commande AFFE_CHAR_CINE) permettent de penser que ces différences proviennent de la méthode de recherche des valeurs propres utilisée.

Modélisation COQUE_C_PLAN
La précision sur les résultats est bonne pour les trois premières fréquences, l'erreur est de l'ordre de 0.6% . Elle se dégrade au fur et à mesure que la fréquence augmente, l'erreur passe de la 4ième fréquence à la 8ième de 1.5% à 6.4% . Plus la fréquence est élevée plus l'écart entre les fréquences doubles est important. L'erreur sur les modes est satisfaisante pour les 7 premiers modes ($<0.7\%$), elle est plus élevée pour le 8ième ($<4\%$). Un maillage plus fin devrait permettre de mieux représenter les déformées modales associées au fréquences élevées.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)