SDLD103 - Réponse sismique d'un système 3 masses et 4 ressorts multi-supporté

Résumé

Le problème consiste à analyser la réponse d'une structure mécanique de type poutre encastrée-encastrée et non amortie, modélisée par un système 3 masses et 4 ressorts et soumise à un chargement sismique quelconque.

On teste l'élément discret en traction et rotation, le calcul des modes propres et des modes statiques et le calcul de la réponse transitoire par superposition modale d'une structure soumise à un accélérogramme de translation (modélisation A) ou de rotation (modélisation B).

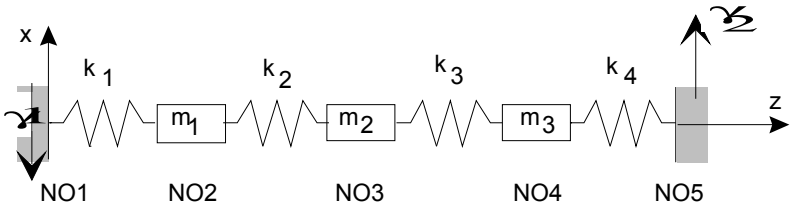
Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats de référence (résultats analytiques).

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La poutre est modélisée par un ensemble de 4 ressorts et de 3 masses ponctuelles.



1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison : $k=k_1=k_2=k_3=k_4=104\ N/m$;
masse ponctuelle : $m=m_1=m_2=m_3=10\ kg$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites :
Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe x .
Les points $NO1$ et $NO5$ sont encastrés : $dx=dy=dz=drx=dry=drz=0$.
Les autres points sont libres en translation selon la direction x : $dy=dz=drx=dry=drz=0$.

Chargement :
Les points d'ancrage $NO1$ et $NO5$ sont chacun soumis à une accélération transversale $\gamma_1(t)=at^2$ avec $a=2.10^5 m/s^4$ en $NO1$ et $\gamma_2(t)=0\ m/s^2$ en $NO5$.

1.4 Conditions initiales

Le système est au repos : à $t=0$, $dx(0)=0$, $dx/dt(0)=0$ en tout point.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le problème consiste à calculer la réponse d'un système à cinq degrés de liberté soumis à deux accélérations $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ distinctes de forme quelconque. Il est exposé en détail dans la référence [bib2].

On calcule dans un premier temps les fréquences propres f_i, les vecteurs propres associés normalisés par rapport à la masse modale Φ_{Ni} et les modes statiques Ψ du système (valeurs analytiques). On calcule ensuite la réponse généralisée du système multi-supporté en résolvant analytiquement l'intégrale de Duhamel [bib1]. Enfin, on restitue sur la base physique le vecteur des déplacements relatifs (sur les degrés de liberté actifs) X_r , ce qui nous permet, après avoir calculé le vecteur des déplacements d'entraînement X_e, de calculer le vecteur des déplacements absolus $X_a = X_r + X_e$.

2.2 Résultats de référence

- Calcul des trois fréquences propres f_i, des vecteurs propres associés normalisés par rapport à la masse modale Φ_{Ni} et des modes statiques Ψ du système

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(2+\sqrt{2})\,m/2\mathrm{k}}} = 3.85\ Hz \\ f_2 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{m/2\mathrm{k}}} = 7.12\ Hz \\ f_3 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})\,m/2\mathrm{k}}} = 9.30\ Hz \end{cases}, \quad \Phi_N = \frac{1}{2\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \Psi = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Calcul de la réponse généralisée du système multi-supporté

L'équation fondamentale de la dynamique, dans le repère relatif sur les degrés de liberté actifs s'écrit : $M\,\ddot{X}_r + K\,X_r = (M\,\Psi + M_{XS})\,\ddot{X}_S$ avec $\ddot{X}_S = \begin{bmatrix} at^2 \\ 0 \end{bmatrix}$, le vecteur des accélérations imposées au niveau des différents points d'ancrage.

L'équation du mouvement projetée sur la base des modes dynamiques normalisés par rapport à la masse modale Φ_N s'écrit, en ne considérant que les degrés de liberté actifs :

$$\ddot{q}(t) + K_G\,q(t) = -\Phi_N^T M\,\Psi\,\ddot{X}_S = \frac{a\sqrt{m}\,t^2}{4}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La réponse de ce système linéaire, à un instant t , consiste alors à calculer l'intégrale de Duhamel :

$$q(t)=-\frac{a\sqrt{m^3}}{4\mathrm{k}}\begin{bmatrix}(3+2\sqrt{2})(t^2+(2+\sqrt{2})(\cos\omega_1 t-1)m/k)\\(t^2+(\cos\omega_2 t-1)m/k)/\sqrt{2}\\(3-\sqrt{2})(t^2+(2-\sqrt{2})(\cos\omega_3 t-1)m/k)\end{bmatrix}$$

- Calcul du déplacement relatif aux degrés de liberté actifs : $X_r=\sum_i \Phi_{\mathrm{Ni}} q_i$ soit :

$$X_r=-\frac{am}{8\mathrm{k}}\begin{bmatrix}7t^2+\left[(10+7\sqrt{2})\frac{m}{k}(\cos\omega_1 t-1)+(\cos\omega_2 t-1)+(10-7\sqrt{2})(\cos\omega_3 t-1)\right]m/k\\8t^2+\left[(10\sqrt{2}+14)\frac{m}{k}(\cos\omega_1 t-1)+(-10\sqrt{2}+14)(\cos\omega_3 t-1)\right]m/k\\5t^2+\left[(10+7\sqrt{2})\frac{m}{k}(\cos\omega_1 t-1)-(\cos\omega_2 t-1)+(10-7\sqrt{2})(\cos\omega_3 t-1)\right]m/k\end{bmatrix}.$$

- Calcul des déplacements d'entraînement aux degrés de liberté actifs : $X_e=\Psi X_S=a\frac{t^4}{48}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$.

- Calcul des déplacements absolus aux degrés de liberté actifs : $X_a=X_r+X_e$.

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune si l'on calcule l'intégrale de Duhamel analytiquement [bib1].

2.4 Références bibliographiques

1) J.S. PRZEMIENIECKI : Theorie of matrix structural analysis. New York, Mac Graw-Hill, 1968, pages 351-357.

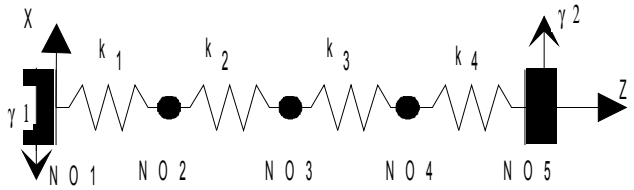
2) Fe WAECKEL : Documentations utilisation et validation des développements réalisés pour calculer la réponse sismique de structures multi-supportées. HP-52/96/002

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les éléments sont modélisés par des éléments discrets à 3 degrés de liberté DIS_T.



Le nœud $NO1$ est soumis à une accélération imposée $\gamma_1(t)$, le nœud $NO5$ à $\gamma_2(t)$. On calcule le déplacement relatif des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$ par rapport à leur déformée statique, leur déplacement d'entraînement et leur déplacement absolu.

L'intégration temporelle est réalisée avec les algorithmes d'Euler (pas de temps : 10^{-3} seconde), de Devogelaere (pas de temps : 10^{-3} seconde) et avec un algorithme à pas de temps adaptatif d'ordre 2.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 5 noeuds et de 4 éléments discrets (DIST_T).

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées de la modélisation A

4.1.1 Déplacements relatifs des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$

- Déplacements relatifs du nœud $NO2$ avec les algorithmes d'intégration numérique d'Euler, Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (32 et 54) :

Temps (s)	Référence
0,1	–8,47734E–01
0,3	–1,55202E+01
0,5	–4,36449E+01
0,7	–8,50830E+01
1,0	–1,74790E+02

- Déplacements relatifs du nœud $NO3$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler :

Temps (s)	Référence
0,01	9,87666E–10
0,02	2,49501E–07
0,03	6,25468E–06
0,04	6,05829E–05
0,05	3,47191E–04
0,06	1,42349E–03
0,07	4,62144E–03
0,08	1,26245E–02
0,09	3,01825E–02
0,1	–7,68449E–01

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

0,3	–1,76923E+01
0,5	–4,99310E+01
0,7	–9,70711E+01
1,0	–1,99722E+02

- Déplacements relatifs du nœud $NO3$ avec les algorithmes d'intégration numérique de Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (54 et 32) :

Temps (s)	Référence
0,1	–7,68449E–01
0,3	–1,76923E+01
0,5	–4,99310E+01
0,7	–9,70711E+01
1,0	–1,99722E+02

- Déplacements relatifs du nœud $NO4$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler, Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (54 et 32) :

Temps (s)	Référence
0,1	–4,09632E–01
0,3	–1,10372E+01
0,5	–3,12415E+01
0,7	–6,05833E+01
1,0	–1,24803E+02

4.1.2 Déplacements absolus des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$

- Déplacements absolus du nœud $NO2$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler, Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (54 et 32) :

Temps (s)	Référence
0,1	4,02266E–01
0,3	8,57298E+01
0,5	7,37605E+02
0,7	2,91617E+03
1,0	1,23252E+04

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Déplacements absolus du nœud $NO3$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler , Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (54 et 32):

Temps (s)	Référence
0,1	6,48847E–02
0,3	4,98077E+01
0,5	4,70902E+02
0,7	1,90376E+03
1,0	8,13361E+03

- Déplacements absolus du nœud $NO4$ avec l'algorithme d'intégration numérique d'Euler , Devogelaere, adaptatif d'ordre 2 et Runge-Kutta (54 et 32):

Temps (s)	Référence
0,1	7,03506E-03
0,3	2,27128E+01
0,5	2,29175E+02
0,7	9,39833E+02
1,0	4,04186E+03

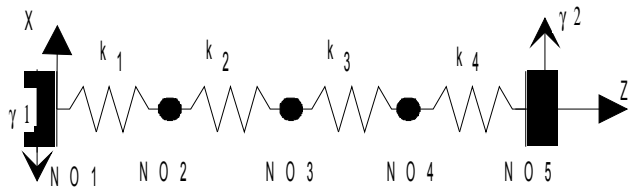
Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation B

C'est la même modélisation que la précédente à l'exception du chargement qui est un accélérogramme de rotation.

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Les éléments sont modélisés par des éléments discrets à 3 degrés de liberté DIS_T.



Le nœud $NO1$ est soumis à une accélération imposée $\gamma_1(t)$, le nœud $NO5$ à $\gamma_2(t)$. On calcule le déplacement relatif des nœuds $NO2$, $NO3$ et $NO4$ par rapport à leur déformée statique, leur déplacement d'entraînement et leur déplacement absolu.

L'intégration temporelle est réalisée avec l'algorithme d'Euler (pas de temps : 10^{-3} seconde).

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 5 noeuds et de 4 éléments discrets (DIST_TR).

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées de la modélisation B

6.1.1 Déplacements relatifs des nœuds *NO2* , *NO3* et *NO4*

- Déplacements relatifs du nœud *NO2* :

Temps (s)	Référence
0,1	–8,47734E–01
0,3	–1,55202E+01
0,5	–4,36449E+01
0,7	–8,50830E+01
1,0	–1,74790E+02

- Déplacements relatifs du nœud *NO3* :

Temps (s)	Référence
0,1	–7,68449E–01
0,3	–1,76923E+01
0,5	–4,99310E+01
0,7	–9,70711E+01
1,0	–1,99722E+02

- Déplacements relatifs du nœud *NO4* :

Temps (s)	Référence
0,1	–4,09632E–01
0,3	–1,10372E+01
0,5	–3,12415E+01
0,7	–6,05833E+01
1,0	–1,24803E+02

6.1.2 Déplacements absolus des nœuds *NO2* , *NO3* et *NO4*

- Déplacements absolus du nœud *NO2* :

Temps (s)	Référence
0,1	4,02266E–01
0,3	8,57298E+01
0,5	7,37605E+02
0,7	2,91617E+03
1,0	1,23252E+04

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

•Déplacements absolus du nœud $NO3$:

Temps (s)	Référence
0,01	9,87666E–10
0,02	2,49501E–07
0,03	6,25468E–06
0,04	6,05829E–05
0,05	3,47191E–04
0,06	1,42349E–03
0,07	4,62144E–03
0,08	1,26245E–02
0,09	3,01825E–02
0,10	6,48847E–02
0,30	4,98077E+01
0,50	4,70902E+02
0,70	1,90376E+03
1,0	8,13361E+03

•Déplacements absolus du nœud $NO4$:

Temps (s)	Référence
0,1	7,03506E-03
0,3	2,27128E+01
0,5	2,29175E+02
0,7	9,39833E+02
1,0	4,04186E+03

7 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus avec *Code_Aster* sont conformes aux résultats de référence (l'erreur est en générale inférieure à 0,03%).

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)