
Modèles de Weibull, de Bordet et de Rice et Tracey

Résumé

On rappelle tout d'abord les fondements de ces modèles d'approche locale de la rupture permettant de modéliser, pour deux d'entre eux, la rupture fragile (modèles de Beremin, dit de WEIBULL, et de Bordet), pour le troisième l'amorçage ductile (modèle de Rice et Tracey).

Dans le cas des modèles de rupture fragile (Beremin et Bordet), on décrit comment est calculée la probabilité de rupture d'une structure à partir de la connaissance des champs mécaniques la sollicitant. En se plaçant dans le cas général d'un trajet de chargement thermomécanique non monotone et en supposant que certains paramètres des modèles ne dépendent pas de la température, on établit l'expression générale des probabilités de rupture cumulées. Le modèle de Beremin permet également d'inclure le cas d'une correction de déformation plastique.

Puis, on présente le modèle conduisant à la loi de croissance des cavités de Rice et Tracey ainsi que le critère d'amorçage ductile s'y rapportant. Enfin, des indications concernant l'implémentation de ces modèles dans *Code_Aster* sont résumées.

Table des Matières

1 Introduction.....	3
2 Le modèle de Beremin (ou Weibull).....	3
2.1 Fondements.....	3
2.1.1 Hypothèses générales.....	3
2.1.2 Probabilité de rupture cumulée de la structure.....	4
2.2 Expressions de la probabilité de rupture cumulée des sites.....	4
2.2.1 Paramètres de clivage indépendants de la température.....	4
2.2.2 Contrainte de clivage dépendant de la température.....	5
2.3 Correction de déformation.....	6
2.4 Implantation dans Code_Aster.....	7
3 Le Modèle de Bordet.....	8
3.1 Probabilité de rupture locale par clivage du modèle de bordet.....	8
3.1.1 Probabilité locale de nucléation.....	8
3.1.2 Probabilité locale de propagation.....	9
3.1.3 Probabilité locale de clivage.....	9
3.2 Probabilité globale de rupture par clivage de Bordet.....	10
3.3 Discussion.....	10
3.3.1 Bordet ou Beremin ?.....	10
3.3.2 Paramètres matériau.....	11
3.4 Mise en oeuvre dans Code_Aster.....	11
4 Le Modèle de Rice et Tracey.....	12
4.1 Cavité isolée dans une matrice rigide plastique infinie.....	12
4.2 Loi approchée de la croissance des cavités.....	12
4.3 Critère d'amorçage ductile.....	14
4.4 Implantation dans Code_Aster.....	15
4.4.1 Recherche de la valeur maximale du taux de croissance.....	15
4.4.2 Calcul de la valeur moyenne du taux de croissance.....	15
5 Bibliographie.....	15
6 Description des versions du document.....	16

1 Introduction

On s'intéresse ici à une structure métallique sollicitée thermomécaniquement. On cherche à déterminer des critères de rupture de cette structure, représentatifs des deux mécanismes rencontrés sur certains aciers :

à basse température, certains matériaux métalliques (comme l'acier de cuve) peuvent se comporter comme des matériaux fragiles en rompant brutalement par clivage,
à plus haute température, apparaît la déchirure ductile.

Par opposition à l'approche globale, les modèles de Beremin, de Bordet et de Rice - Tracey présentés ici s'appuient sur la connaissance des champs mécaniques dans les zones les plus sollicitées pour obtenir un critère local de rupture représentatif des mécanismes physiques mis en jeu (instabilité des microfissures de clivage ou accroissement puis coalescence de la porosité).

Des conseils d'utilisation des modèles Beremin et Bordet sont donnés dans la documentation U2.05.08.

2 Le modèle de Beremin (ou Weibull)

Le mécanisme généralement admis de rupture par clivage est le suivant : la plastification du matériau conduit à l'amorçage de microfissures. Compte tenu de l'hétérogénéité métallurgique du matériau, ces microfissures possèdent une taille et une position aléatoires. La rupture globale est alors obtenue lorsque la contrainte normale à une de ces microfissures devient suffisamment grande pour la rendre instable.

Le modèle de Beremin, proposé au début des années 1980 [bib1] reprend ces idées en s'appuyant sur la connaissance des champs mécaniques locaux sollicitant la structure considérée. Nous en présentons ici les grandes lignes en adoptant le cadre plus général établi dans [bib2]. Par abus de langage, nous appelons ce modèle, dans ce qui suit, modèle de Weibull, en référence à la loi de probabilité auquel il conduit.

Pour cela, on considère une structure soumise à une histoire de sollicitations thermomécaniques à partir de l'instant $t=0$ fixé arbitrairement. On cherche à déterminer la probabilité de rupture cumulée de cette structure à tout instant.

Par hypothèse, cette structure est constituée (au moins en partie) d'un acier, susceptible de rompre par clivage à basse température, dont la loi de comportement élastoviscoplastique utilise le critère de Von Mises, et dont l'une des variables internes correspond à la déformation plastique équivalente cumulée : une liste de ces lois est fournie au paragraphe 2.4.

2.1 Fondements

2.1.1 Hypothèses générales

Considérons tout d'abord un volume élémentaire représentatif V_{rep} du matériau considéré. On suppose que l'hétérogénéité microstructurale du matériau conduit à l'existence de sites d'endommagement (microdéfauts) apparaissant avec la plasticité. On note V_0 le volume de chaque

site, de sorte que dans un volume plastifié V_{rep} , le nombre de sites d'endommagement est $\frac{V_{rep}}{V_0}$.

Pour chacun de ces sites, on note $g(\sigma)d\sigma$ la probabilité d'avoir une contrainte critique de clivage comprise dans $[\sigma; \sigma+d\sigma]$. La probabilité que l'un des sites d'endommagement possède une contrainte de clivage inférieure à σ_{lc} est donc :

$$\int_0^{\sigma_{lc}} g(\sigma) d\sigma$$

En pratique, on postule une forme de g pour les contraintes positives : $g(\sigma) = \alpha' \sigma^{m-1}$
($g(\sigma) = 0$ si $\sigma < 0$).

Si, on considère à présent la structure, nous supposons que $\sqrt[3]{\delta V} \geq \sqrt[3]{V_0}$, où δV est un volume élémentaire dont la dimension caractéristique est inférieure aux fluctuations macroscopiques des champs mécaniques.

Enfin, les événements de rupture des sites d'endommagement sont supposés indépendants les uns des autres, la rupture d'un des sites entraînant la rupture de l'ensemble de la structure (hypothèse du maillon le plus faible).

2.1.2 Probabilité de rupture cumulée de la structure

On suppose ici connaître la probabilité de rupture cumulée de chaque site, noté $p_r(\text{site})$. On peut alors successivement écrire la probabilité de rupture cumulée d'un volume élémentaire, puis de la structure complète. Le champ de contrainte étant homogène dans δV , la première vaut :

$$1 - p_r(\delta V) = \prod_{\text{site} \in \delta V} (1 - p_r(\text{site})) ,$$

soit :

$$p_r(\delta V) = 1 - \left(1 - p_r(\text{site}) \right)^{\frac{\delta V}{V_0}} .$$

La probabilité pour qu'à la fin du chargement, notre structure (volume Ω) ne soit pas rompue s'élève alors à :

$$1 - P_r = \prod_{\delta V \in \Omega} (1 - p_r(\delta V)) = \prod_{\delta V \in \Omega} \left(1 - p_r(\text{site}) \right)^{\frac{\delta V}{V_0}} = \prod_{\delta V \in \Omega} \exp \left(\ln(1 - p_r(\text{site})) \frac{\delta V}{V_0} \right) .$$

Sachant que $p_r(\text{site})$ reste petit, devant l'unité, l'expression précédente peut se simplifier pour donner finalement :

$$P_r \approx 1 - \prod_{\delta V \in \Omega} \exp \left(- p_r(\text{site}) \frac{\delta V}{V_0} \right) = 1 - \exp \left(- \int_{\Omega} p_r(\text{site}) \frac{\delta V}{V_0} \right) .$$

Soit :

$$P_r = 1 - \exp(-x) \quad \text{avec} \quad x = \int_{\Omega} p_r(\text{site}) \frac{\delta V}{V_0}$$

2.2 Expressions de la probabilité de rupture cumulée des sites.

A tout instant, l'évolution des champs mécaniques dans chaque élément δV est supposée radiale et non nécessairement monotone. Cette évolution est caractérisée en tout point par une histoire de contrainte principale maximale $\sigma_I(u)_{0 \leq u \leq t}$.

2.2.1 Paramètres de clivage indépendants de la température

Le chargement étant radial, la direction de contrainte principale maximale est supposée constante.

Lorsqu'il y a plastification, les sites d'endommagement apparaissent.

Nous supposons qu'une condition nécessaire de rupture d'un site d'endommagement est que la plasticité soit active. Pour que ce volume n'ait pas cassé à l'instant t , il faut et il suffit que :

$$\sigma_{lc} \geq \sigma_I(u), u < t \quad \text{tel que} \quad \dot{p}(u) > 0 ,$$

$\dot{p}(u)$ étant le taux de déformation plastique cumulée à l'instant u .

Nota :

Soulignons que cette condition de plasticité active est différente de la condition classiquement adoptée ($p > 0$). Il est clair que ces deux conditions sont équivalentes dans le cas d'un trajet de chargement monotone.
Pour des trajets de chargement plus généraux, cette condition de plasticité active conduit en revanche à de bien meilleurs résultats [bib7].

On ne considère que les temps u pour lesquels la plasticité est active, puisque la rupture n'est possible qu'à ces instants là. On note $[u < t, \dot{p}(u) > 0]$ l'ensemble de ces instants pour l'élément dV considéré. La condition précédente s'écrit donc :

$$\sigma_{Ic} \geq \max_{[u < t, \dot{p}(u) > 0]} \sigma_I(u) .$$

Sa probabilité de rupture étant égale, comme dans la section précédente, à la probabilité pour qu'il possède une contrainte critique de clivage inférieure ou égale au membre de droite de l'inégalité précédente, elle s'écrit donc :

$$p_r(\text{site}) = \int_0^{\max_{[u < t, \dot{p}(u) > 0]} \sigma_I(u)} g(\sigma) d\sigma = \left(\frac{\max_{[u < t, \dot{p}(u) > 0]} \sigma_I(u)}{\sigma_u} \right)^m ,$$

$\sigma_u = \left(\frac{m}{\alpha} \right)^{\frac{1}{m}}$ désignant la contrainte de clivage (contrainte pour laquelle la probabilité de rupture cumulée des sites potentiels de clivage vaut 1).

La probabilité de rupture de la structure s'écrit alors d'après le [§2.1.2] :

$$P_r = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma_W}{\sigma_u} \right)^m \right)$$

où la contrainte de Weibull à l'instant t est donnée par :

$$\sigma_W(t) = \left[\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_I^m \frac{\delta V}{V_0} \right]^{\frac{1}{m}} \text{ avec } \tilde{\sigma}_I = \max_{[u < t, \dot{p}(u) > 0]} \sigma_I(u)$$

Remarquons que dans le cas d'un trajet de chargement monotone, l'expression précédente de la contrainte de Weibull se réduit à :

$$\sigma_W = \left[\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_I^m \frac{\delta V}{V_0} \right]^{\frac{1}{m}} \text{ avec } \tilde{\sigma}_I = \begin{cases} \sigma_I & \text{si l'élément est plastifié} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

2.2.2 Contrainte de clivage dépendant de la température

Soit $\theta(u)_{0 \leq u \leq t}$ l'évolution de température dans δV .

Pour tout instant (u) , nous supposons qu'au voisinage de chaque site d'endommagement, la contrainte normale "microscopique" vérifie :

$$\sigma_{I(\text{micro})}(u) = f \cdot \sigma_I(u) ,$$

f étant un paramètre de localisation ne dépendant que de la température moyenne $\theta(u)$ dans δV . Pour que le site d'endommagement n'ait pas cassé, il faut donc que :

$$\sigma_{Ic} \geq \sigma_{I(\text{micro})}(u), u < t, \text{ tel que } \dot{p}(u) > 0.$$

soit :

$$\sigma_{Ic} \geq f \cdot \sigma_{I(\text{micro})}(u), u < t, \text{ tel que } \dot{p}(u) > 0.$$

de sorte que la probabilité de rupture cumulée d'un site s'élève à :

$$p_r(\text{site}) = \left[\max_{[u < t, \dot{p}(u) > 0]} \left\{ \frac{\sigma_I(u) \cdot f(\theta(u))}{\sigma_u} \right\} \right]^m,$$

ou encore :

$$p_r(\text{site}) = \left[\max_{[u < t, \dot{p}(u) > 0]} \left\{ \frac{\sigma_I(u)}{\sigma_u(\theta(u))} \right\} \right]^m,$$

avec : $\sigma_u(\theta) = \frac{\sigma_u}{f(\theta)}$, une fonction de la température. L'introduction du paramètre de localisation f conduit donc à une dépendance apparente de la contrainte de clivage.

De façon générale, la probabilité de rupture cumulée de la structure s'élève à :

$$p_r = 1 - \exp \left(- \int_{\Omega} \left[\max_{[u < t, \dot{p}(u) > 0]} \left\{ \frac{\sigma_I(u)}{\sigma_u(\theta(u))} \right\} \right]^m \frac{\delta V}{V_0} \right)$$

La contrainte de Weibull n'a alors plus que le sens conventionnel suivant : en notant σ_u^o une valeur choisie arbitrairement, on peut écrire :

$$p_r = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma_w^o}{\sigma_u^o} \right)^m \right),$$

σ_w^o étant définie par :

$$\sigma_w^o = \left[\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_I^m \frac{\delta V}{V_0} \right]^{\frac{1}{m}} \text{ avec } \tilde{\sigma}_I = \max_{[u < t, \dot{p}(u) > 0]} \left\{ \frac{\sigma_u^o \sigma_I(u)}{\sigma_u(u)} \right\}$$

2.3 Correction de déformation

Une grande déformation des sites ayant pour effet d'en diminuer la nocivité (contraction relative des microfissures dans le plan transverse à l'axe de traction), la contrainte critique de clivage à un instant u augmente sous l'effet de cette déformation $\underline{\varepsilon}(u)$ selon :

$$\sigma_{Ic}(u) = \sigma_{Ic}(u=0) \exp\left(\frac{1}{2} \varepsilon_I(u)\right) \text{ avec } \varepsilon_I(u) = \underline{n}_\sigma \cdot \underline{\varepsilon}(u) \cdot \underline{n}_\sigma$$

où $\underline{n}_\sigma(u)$ désigne la direction associée à la contrainte principale maximale à l'instant u .

La probabilité de rupture d'un site à un instant u donné s'écrit à présent :

$$p_r(\text{site}) = \max_{|u < t, p(u) > 0|} \left\{ \frac{\sigma_I(u)}{\sigma_u(\theta(u))} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon_I(u)\right) \right\}^m.$$

Pour un trajet de chargement monotone (température constante et uniforme), la relation précédente conduit à l'expression classique [bib2] :

$$p_r(\text{site}) = \left[\frac{\sigma_I}{\sigma_u} \right]^m \exp\left(-\frac{m}{2} \varepsilon_I\right).$$

2.4 Implantation dans Code_Aster

Des conseils d'utilisation de ce modèle sont donnés dans la documentation U2.05.08.

Considérons un domaine Ω_c de la structure étudiée qui peut être l'ensemble du maillage étudié, un groupe de maille ou une maille. Suite à un calcul thermomécanique élastoplastique, on connaît l'évolution des champs de contrainte, de déformation et de déformation plastique cumulée dans ce domaine et on souhaite déterminer sa probabilité de rupture cumulée.

Pour ce faire, on utilise le mot-clé `WEIBULL` de la commande `POST_ELEM`.

Soulignons que pour le calcul avec correction de déformation (option `CORR_PLAST : 'OUI'`), un calcul préalable du champ de déformation de Green-Lagrange sur la zone de la structure étudiée (via la commande `CALC_CHAMP`) est nécessaire. Dans le cas contraire, le post-traitement s'arrête.

De plus, la loi de comportement du matériau doit comporter une variable interne correspondant à la déformation plastique équivalente cumulée p . Il s'agit en particulier des lois (liste non exhaustive) : `VMIS_ISOT*`, `VMIS_ECMI*`, `VMIS*_CHAB`, `ROUSS*`, `LEMAITRE`, `MONOCRISTAL`. Dans le cas contraire, le post-traitement s'arrête.

L'intégration numérique correspondante dans *Code_Aster* s'effectue en deux temps :

on calcule en chaque point de Gauss $\tilde{\sigma}_I$ si le taux de déformation plastique cumulée en ce point est strictement positif,

par quadrature sur chaque maille puis simple sommation sur le domaine Ω_c visé, on en déduit la contrainte de Weibull ainsi que la probabilité de rupture associée. La sommation est pondérée par un coefficient multiplicatif qui tient compte des symétries éventuelles et du type de modélisation retenue (axi, ...). On veillera bien à définir ce coefficient (`COEF_MULT`) conformément aux indications données dans [U4.61.04].

La première étape permet d'introduire une variante (mot-clé `SIGM_ELMOY` au lieu de `SIGM_ELGA`) conduisant à des résultats sensiblement différents dans le cas d'une structure fissurée (présence de

gradient) : dans chaque maille, $\tilde{\sigma}_I$ est déterminée à partir de la moyenne sur cette maille du champ de contrainte (et, éventuellement, du champ de déformation de Green - Lagrange).

Elle est non nulle si le taux de déformation plastique cumulée à l'instant considéré est strictement positif en un point de Gauss au moins.

3 Le Modèle de Bordet

On présente ici rapidement le modèle de Bordet. Pour plus de détails, on pourra se référer à [8], [9] ou [10].

Le modèle de Bordet se base sur les mêmes fondements que celui de Beremin. Il définit une probabilité de rupture par clivage local.

Cependant, dans le modèle de Beremin, on suppose la création de microfissures au moment de l'atteinte du seuil de plasticité, et ces microfissures restent potentiellement actives tout au long du chargement qui s'en suit. Toutefois, dans les aciers, la rupture globale est principalement liée à des microfissures nouvellement créées. Il convient donc de prendre en compte le niveau de déformation plastique atteint à chaque instant. Ceci est déjà possible dans le modèle de Beremin via l'option de correction plastique définie dans la doc [U4.81.22].

Dans le modèle de Bordet, ceci est pris en compte en considérant que la probabilité de rupture par clivage est le produit de la probabilité de nucléation et de propagation au même instant.

3.1 Probabilité de rupture locale par clivage du modèle de bordet

Le critère local est ici défini comme l'évènement statistique de remplir simultanément les conditions de nucléation et de propagation des microfissures. Dans le modèle, la nucléation et la propagation des microfissures sont considérées comme des évènements indépendants ; la nucléation désigne la rupture d'un carbure conduisant à la formation d'une microfissure, alors que la propagation est définie comme l'instabilité locale de clivage guidée uniquement par les contraintes locales.

La probabilité de rupture locale par clivage s'écrit alors :

$$P_{cliv} = P_{nucl} P_{propa}$$

Attention, dans toute la suite, on entend par déformation plastique ε_p la déformation plastique équivalente définie par :

$$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_p : \varepsilon_p}$$

Cette définition est valable uniquement pour les lois de comportement élastoplastiques à critère de von Mises. Dans Code_Aster, seules les lois de comportement de ce type sont donc adaptées à ce modèle.

3.1.1 Probabilité locale de nucléation

Avec la définition donnée plus haut, la probabilité de nucléation d'une microfissure durant un incrément de déformation plastique $d\varepsilon_p$ est proportionnelle à la limite élastique $\sigma_{ys}(T, \dot{\varepsilon}_p)$ à la température T et la vitesse de déformation plastique $\dot{\varepsilon}_p$.

$$P_{nucl} \propto N_{unc}(\varepsilon_p) \sigma_{ys}(T, \dot{\varepsilon}_p) d\varepsilon_p$$

Ceci demeure vrai tant que le nombre de carbures microfissurés demeure faible devant le nombre de carbures sains $N_{unc}(\varepsilon_p)$. Le taux de microfissuration des carbures est constant pour une déformation plastique donnée ; le nombre de sites sains varie exponentiellement avec

ε_p . En appelant $\sigma_{ys,0}$ la limite élastique à une température et une vitesse de déformation plastique de référence, et $\varepsilon_{p,0}$ une déformation plastique de référence, la probabilité P_{nucl} peut s'exprimer comme suit :

$$P_{nuc} \propto \frac{\sigma_{ys}(T, \dot{\epsilon}_p)}{\sigma_{ys,0}} \exp\left(\frac{-\sigma_{ys}(T, \dot{\epsilon}_p)}{\sigma_{ys,0}} \cdot \frac{\epsilon_p}{\epsilon_{p,0}}\right)$$

Si la déformation plastique est petite, donc si la fissuration de carbures est assez limitée, i.e.

$$\frac{\sigma_{ys,0} \epsilon_{p,0}}{\sigma_{ys}(T, \dot{\epsilon}_p)} \gg \epsilon_p, \text{ alors la probabilité de nucléation se réduit à } P_{nuc} \propto \frac{\sigma_{ys}(T, \dot{\epsilon}_p)}{\sigma_{ys,0}}.$$

3.1.2 Probabilité locale de propagation

Comme dans le modèle de Beremin présenté en Section 2, la densité de taille des microfissures de carbures est supposée distribuée selon une loi puissance inverse (avec α et β des paramètres matériau indépendants de la température et des vitesses de déformation et l).

$$f(l) = \frac{\alpha}{l^\beta}$$

La fissuration d'un carbure ne va se propager dans la ferrite (plus profondément que du fait de l'inertie seule de propagation, par effet dynamique) qu'à la condition de la présence d'une contrainte locale suffisamment élevée. Une limite supérieure de taille de microfissure ferritique $l_{max} = l(\sigma_{th})$ nucléée est donc introduite ; elle permet de définir le minimum de contrainte locale nécessaire à la propagation de la plus grande microfissure ferritique possible.

$$P_{propa}(\sigma_1) = \int_{l_c(\sigma_1)}^{l_{max}} f(l) dl$$

avec σ_1 la contrainte principale maximale, σ_{th} le seuil en dessous duquel la propagation ne peut avoir lieu et l_c la taille critique de microfissure ferritique, obéissant à la relation de Griffith pour une microfissure elliptique :

$$l_c(\sigma) = \frac{\pi E \gamma_p}{2(1-\nu^2) \sigma^2}$$

avec E , ν et γ_p le module d'Young, le coefficient de Poisson et la densité surfacique d'énergie. On obtient finalement :

$$\begin{cases} P_{propa}(\sigma_1) = 0 & \sigma_1 < \sigma_{th} \\ P_{propa}(\sigma_1) = \left(\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_u} \right)^m - \left(\frac{\sigma_{th}}{\sigma_u} \right)^m \right) & \sigma_1 \geq \sigma_{th} \end{cases}$$

Avec m paramètre indépendant de la température, à l'instar de α et β , et σ_u qui peut en dépendre (si le module d'Young en dépend).

Comme pour le modèle de Beremin, les effets de l'orientation des microfissures par rapport à la direction de la contrainte principale maximale ne sont pris en compte que via le paramètre σ_u .

3.1.3 Probabilité locale de clivage

Comme précisé précédemment, la probabilité locale de clivage est supposée être le produit de la probabilité de nucléation et de la probabilité de propagation ; pour cela on considère que durant un incrément de déformation plastique infinitésimal, la contrainte active est constante. D'où, si $\sigma_1 \geq \sigma_{th}$:

$$P_{cliv}(\sigma_1, d\varepsilon_p) \propto P_{nucl}(d\varepsilon_p) \cdot P_{propa}(\sigma_1)$$

$$\propto \frac{\sigma_{ys}(T, \dot{\varepsilon}_p)}{\sigma_{ys,0}} \exp\left(\frac{-\sigma_{ys}(T, \dot{\varepsilon}_p)}{\sigma_{ys,0}} \cdot \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{p,0}}\right) \left(\left(\frac{\sigma_1(\varepsilon_p)}{\sigma_u} \right)^m - \left(\frac{\sigma_{th}}{\sigma_u} \right)^m \right) d\varepsilon_p$$

Cette équation n'indique pas que les microfissures nucléées demeurent actives durant l'incrément de déformation plastique, mais bien que la condition de propagation pour chacune de ces microfissures est déterminée par la valeur du champ de contrainte local au moment de la création.

La probabilité qu'une microfissure ferritique soit créée et se propage sur un intervalle de déformation plastique $[0, \varepsilon_{p,u}]$ est alors :

$$P_{cliv}(\sigma_1, \varepsilon_{p,u}) \propto \int_0^{\varepsilon_{p,u}} \frac{\sigma_{ys}(T, \dot{\varepsilon}_p)}{\sigma_{ys,0}} \exp\left(\frac{-\sigma_{ys}(T, \dot{\varepsilon}_p)}{\sigma_{ys,0}} \cdot \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{p,0}}\right) \left(\left(\frac{\sigma_1(\varepsilon_p)}{\sigma_u} \right)^m - \left(\frac{\sigma_{th}}{\sigma_u} \right)^m \right) d\varepsilon_p$$

Cette probabilité se réduit bien à 0 si la contrainte demeure inférieure à σ_{th} durant tout le trajet de chargement.

3.2 Probabilité globale de rupture par clivage de Bordet

Le paragraphe précédent a permis de déterminer la probabilité locale de rupture par clivage. En suivant le principe de maillon faible, la probabilité globale de rupture par clivage sur n_c sites potentiels d'initiation s'écrit :

$$P_{Bordet} = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^{n_c} P_{cliv}(\sigma_{1,i}, \varepsilon_{p,u,i})\right)$$

Cette équation peut être exprimée en fonction du volume de la process zone en introduisant un volume infinitésimal dV sur lequel les déformations et contraintes sont constantes (dans le cas numérique, le point de Gauss). Afin de comparer simplement les probabilités de Beremin et de Bordet sur un exemple donné, on peut définir une contrainte de Bordet du même type que celle de Weibull :

$$\sigma_{Bordet} = \left(\int_{V_p} \left(\int_0^{\varepsilon_{p,u}} \frac{\sigma_{ys}(T, \dot{\varepsilon}_p)}{\sigma_{ys,0}} \left(\left(\sigma_1(\varepsilon_p, dV) \right)^m - \left(\sigma_{th} \right)^m \right) \exp\left(\frac{-\sigma_{ys}(T, \dot{\varepsilon}_p)}{\sigma_{ys,0}} \cdot \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{p,0}}\right) d\varepsilon_p \right) \frac{dV}{V_0} \right)^{\frac{1}{m}}$$

et la probabilité de rupture globale par clivage s'écrit avec une répartition de Weibull :

$$P_{Bordet} = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma_{Bordet}}{\sigma_u}\right)^m\right)$$

Si le nombre de carbures microfissurés est faible devant le nombre de carbures sains, le terme en exponentiel est proche de 1 et la contrainte de Bordet s'en trouve simplifiée.

3.3 Discussion

3.3.1 Bordet ou Beremin ?

Le modèle de Bordet est légèrement plus complexe et fin que le modèle de Beremin.

L'un de ses avantages est de considérer la contrainte principale maximale à chaque instant, et pas la contrainte principale maximale durant le chargement ; par conséquent rien n'empêche la probabilité de Bordet de diminuer, contrairement à celle de Beremin.

De plus, le modèle de Bordet rend compte du fait qu'une région avec une contrainte plus faible mais une déformation plastique plus importante peut être plus critique qu'une zone dans laquelle les contraintes sont plus élevées mais le niveau de déformation plastique plus faible.

Cependant, le modèle de Bordet nécessite la connaissance de paramètres matériau supplémentaires, comme on va le décrire dans le paragraphe ci-après.

3.3.2 Paramètres matériau

Le modèle de Beremin usuel nécessite la connaissance de trois paramètres matériaux : les deux paramètres de forme de la loi de Weibull, m et σ_u , ainsi que le volume élémentaire de la zone plastique V_0 ; seul le paramètre σ_u dépend de la température. A ces trois paramètres, il est possible d'ajouter la déformation plastique seuil permettant de définir la zone plastique sur laquelle l'intégration est réalisée.

Les trois premiers paramètres sont formellement conservés par le modèle de Bordet ;
ATTENTION : formellement seulement ; ils peuvent être différents et nécessiter un calibrage du même type que celui fait pour Beremin, et présenté en [R7.02.09].

S'y ajoutent d'autres paramètres.

Le seuil de plasticité fonction *a minima* de la température et potentiellement de la vitesse de déformation plastique $\sigma_{ys}(T, \dot{\epsilon}_p)$ et sa valeur de référence $\sigma_{ys,0}$.

La contrainte critique en dessous de laquelle la propagation des microfissures ferritiques ne peut avoir lieu, σ_{th} , indépendante des conditions de chargement.

Dans la version complète uniquement (avec le terme exponentiel pris en compte), une déformation plastique de référence $\epsilon_{p,0}$ dont la méthode d'identification n'est pas donnée et qui semble assez délicate. On notera que l'auteur lui même (cf. [8], [9]) semble utiliser pour certaines études et validation la version du modèle dans laquelle ce paramètre n'intervient pas (pour l'utilisateur de Code_Aster, il suffit de spécifier `PROBA_NUCL='NON'`)

3.4 Mise en oeuvre dans Code_Aster

Le calcul de la probabilité et de la contrainte de Bordet est effectué par l'opérateur `POST_BORDET`. Il nécessite d'avoir réalisé un calcul thermomécanique élastoplastique via l'opérateur `STAT_NON_LINE`. Des conseils d'utilisation de ce modèle sont donnés dans la documentation U2.05.08.

Dans la version actuellement implantée, la température du milieu sur lequel le calcul est effectué doit être uniforme (mais peut évoluer au cours du temps) ; cette limitation ne semble pas rédhibitoire dans la mesure où la zone plastique en pointe de fissure est en règle générale assez petite.

Il est possible de réaliser le calcul avec ou sans le terme en exponentielle ; si ce terme est demandé, le paramètre matériau $\epsilon_{p,0}$ doit être renseigné.

Dans tous les cas, on calcule à chaque instant dans Code_Aster les grandeurs telles que la contrainte principale maximale et la déformation plastique équivalente. On détermine la valeur des paramètres $\sigma_u(T)$ et $\sigma_{ys}(T, \dot{\epsilon}_p)$ en fonction des données matériau fournies par l'utilisateur, puis on calcule la contrainte de Bordet globale par sommation sur les points de gauss des éléments du groupe de mailles indiqué par l'utilisateur, puis enfin la probabilité globale de rupture de Bordet sur tous les instants jusqu'à celui demandé.

Le calcul effectué s'écrit au final comme suit :

$$\sigma_{Bordet} = \left(\sum_{o=1}^{n_{inst}} \sum_{el=1}^{n_{elem}} \sum_{pg=1}^{n_{pg}} \exp \left(\frac{\sigma_{ys} \left(T(o), \dot{\varepsilon}_{p,el,pg}(o) \right)}{\sigma_{ys,0}} \frac{Max \left(\bar{\sigma}_{1,el,pg}^m(o) - \sigma_{th}^m, 0 \right)}{\sigma_{ys,0}} \frac{\bar{\varepsilon}_{p,el,pg}(o)}{\varepsilon_{p,0}} \right) \right)^{1/m}$$

$$\Delta \varepsilon_{p,el,pg}(o) = \frac{V_{el,pg}}{V_0}$$

avec n_{inst} le nombre d'instants sur lequel le calcul est fait, n_{elem} le nombre d'éléments contenus dans le groupe de mailles demandé par l'utilisateur et n_{pg} le nombre de points de gauss de chacun de ces éléments ; de plus, pour tout scalaire a , $\bar{a}(o) = \frac{a(o) + a(o-1)}{2}$, $\dot{a}(o) = \frac{a(o) - a(o-1)}{t(o) - t(o-1)}$ et $\Delta a(o) = a(o) - a(o-1)$.

Le résultat est une table contenant les valeurs globales de la contrainte de Bordet et de la probabilité de rupture de Bordet.

Pour que le calcul soit correct, il faut que l'utilisateur renseigne le mot clé `COEF_MULT` comme préconisé dans la documentation utilisateur de `POST_BORDET`.

4 Le Modèle de Rice et Tracey

On s'intéresse à présent au cas de l'amorçage ductile. En considérant un élément de volume initialement sain, la déchire ductile de cet élément résulte des mécanismes élémentaires suivants :

nucléation de cavités provoquées par la décohésion d'inclusions présentes dans le matériau, croissance puis coalescence de ces cavités.

4.1 Cavité isolée dans une matrice rigide plastique infinie

Dans une démarche de compréhension analytique, Rice et Tracey [bib3] ont étudié le comportement d'une cavité, initialement sphérique (surface S_v), isolée dans un milieu isotrope infini (volume V), de comportement de Von Mises rigide plastique (limite d'élasticité σ_0), incompressible, soumis à l'infini à une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}^\infty$ quelconque (contrainte notée σ^∞ à l'infini).

Ils montrent que le champ de vitesse de déplacement, solution du problème mécanique posé, minimise la fonctionnelle :

$$Q(\dot{u}) = \int_V \left[s_{ij}(\dot{\varepsilon}) - s_{ij}^\infty \right] \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \sigma_{ij}^\infty \int_{S_v} n_i \dot{u}_j dS$$

4.2 Loi approchée de la croissance des cavités

En parvenant à minimiser cette fonctionnelle dans différentes situations, Rice et Tracey ont alors

montré l'influence prépondérante du taux de triaxialité $\frac{\sigma_m^\infty}{\sigma_{eq}^\infty}$ (avec $\sigma_m^\infty, \sigma_{eq}^\infty$: trace et équivalent de von Mises de la contrainte imposée à l'élément de volume considéré) sur le taux de croissance des cavités.

Ils exhibent même une loi de croissance des cavités, certes approchée, mais très proche des résultats du modèle précédent. Ainsi, dans chacune des directions principales (K) associées à la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}^\infty$, le taux d'élongation d'une cavité s'élève à :

$$\dot{R}_K = \left[c \dot{\epsilon}_K^\infty + \dot{\epsilon}_{eq}^\infty D \right] R_K$$

(R_K : rayon de la cavité dans la direction (K), $\dot{\epsilon}_K^\infty$, $\dot{\epsilon}_{eq}^\infty$: valeur principale dans la direction (K) et équivalent de von Mises de la vitesse de déformation imposée à l'infini), relation dans laquelle les coefficients χ et D dépendent de la situation envisagée :

$\chi = \frac{5}{3}$ pour une matrice d'écrouissage linéaire ou une matrice parfaitement plastique à

faible taux de triaxialité ou $\chi = 2$ dans le cas d'une matrice parfaitement plastique à fort taux de triaxialité,

$D = \alpha \exp\left(\frac{3\sigma_m^\infty}{2\sigma_0}\right)$ pour une matrice parfaitement plastique ou $D = \frac{\sigma_m^\infty}{4\sigma_{eq}^\infty}$ pour une matrice d'écrouissage linéaire.

$\alpha = 0,283$ est la valeur donnée par Rice et Tracey alors que des calculs plus précis (cf. [bib4]) ont montré que ce coefficient est plus élevé ($\alpha = 1,28$).

Mudry [bib6] a alors proposé d'appliquer ces résultats théoriques au cas de l'acier de cuve, i.e. :

comportement intermédiaire entre les cas de comportement extrêmes étudiés par Rice et Tracey avec un écrouissage non nul mais raisonnable, structures fissurées (taux de triaxialité élevé).

Il en a déduit la loi approchée suivante, valable pour des taux de triaxialité suffisamment élevés (supérieurs à 0,5) :

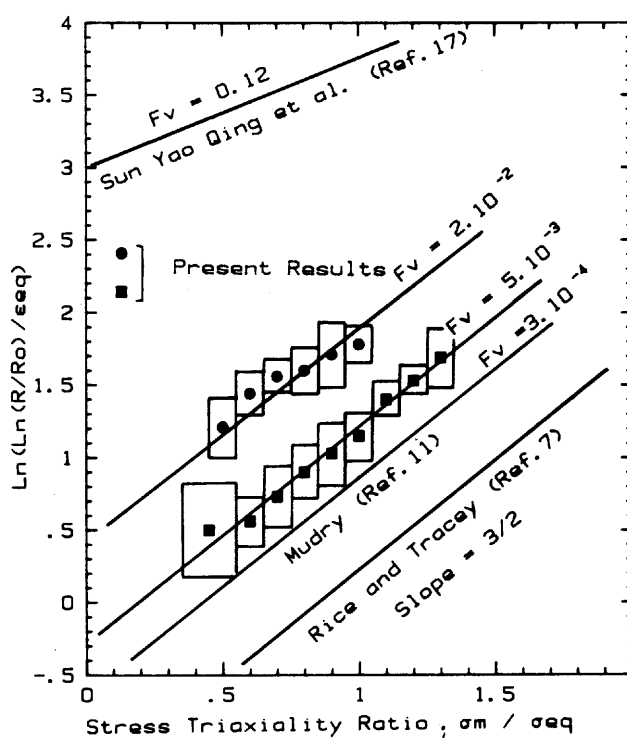
$$\dot{R} = \alpha \dot{\epsilon}_{eq}^{p^\infty} \exp\left(\frac{3\sigma_m^\infty}{2\sigma_{eq}^\infty}\right) R,$$

expression dans laquelle :

$\dot{\epsilon}_{eq}^\infty$ a été substituée par $\dot{\epsilon}_{eq}^{p^\infty}$ (équivalent (von Mises) de la partie plastique de la vitesse de déformation) afin d'étendre la loi de Rice et Tracey au cas élastoplastique,

la limite d'élasticité σ_0 a été substituée par σ_{eq}^∞ afin de tenir compte du durcissement de la matrice autour de la cavité.

Des mesures expérimentales de croissance de porosité pour différents taux de triaxialité ont permis de valider cette expression (cf. Figure suivante). Ces résultats montrent que, lorsque le taux de porosité initial reste faible, le caractère exponentiel de la relation entre le rayon des cavités et le taux de triaxialité est bien confirmé. En revanche, le coefficient α dépend du matériau considéré ainsi que de la fraction initiale de porosité.



Résultats de mesures expérimentales de la croissance de cavités dans différents matériaux métalliques (figure extraite de la réf. 6, ε_{eq} désignant l'équivalent de la déformation plastique noté ε_{eq}^p dans le

corps du texte) en fonction du taux de triaxialité $\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)$

4.3 Critère d'amorçage ductile

R_0 et $R(t)$ désignant le rayon des cavités initial et à l'instant t considéré, le critère d'amorçage ductile adopté ici est :

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)_c,$$

expression dans laquelle le premier membre résulte de l'intégration de la loi de croissance, conformément aux indications du paragraphe précédent.

On peut objecter plusieurs arguments de principe contre l'utilisation directe de cette loi de croissance des cavités de Rice et Tracey comme critère d'amorçage ductile. Ainsi :

- les inclusions, et donc les cavités, ne sont pas en réalité isolées. Pire, elles sont souvent regroupées en amas,
- la coalescence des cavités résulte sans doute d'interactions qui, elles aussi, ne sont pas décrites dans le modèle établi,
- dans une structure fissurée, la présence de gradients en fond de fissure rend moins directement applicable l'analyse précédente qui concerne un milieu infini soumis à des conditions aux limites homogènes.

Néanmoins, en utilisant le critère précédent, on espère que cette loi reste réaliste, en moyenne, même dans des amas ou dans des zones de forts gradients (moyenne sur un élément de dimensions comparables à celle du modèle de Beremin). Par ailleurs, on fait l'hypothèse que la taille critique retenue, en général recalée sur des géométries données (éprouvette CT, par exemple), traduit la

coalescence, ce qui revient à supposer que la coalescence ne dépend pas trop de la nature des sollicitations mécaniques imposées à l'élément de volume (triaxialité, cisaillement, ...).

Remarquons pour finir que le modèle de Rice et Tracey n'est qu'une loi approchée, valable pour des taux de triaxialité importants (*i.e.* supérieurs à 0,5).

4.4 Implantation dans Code_Aster

Considérons un domaine Ω_c de la structure étudiée qui peut être l'ensemble du maillage étudié, un groupe de maille ou une maille. Suite à un calcul thermomécanique élastoplastique, on connaît l'évolution des champs de contrainte, de déformation et de déformation plastique dans ce domaine et on souhaite déterminer les variations spatiales et temporelles du taux de croissance des cavités dans ce domaine.

Pour ce faire, on utilise le mot-clé `RICE_TRACEY` de la commande `POST_ELEM`.

En chaque point de Gauss du domaine Ω_c , on assimile les contraintes et vitesses de déformation calculées à chaque instant aux quantités appliquées au milieu infini considéré précédemment. La loi de croissance de Rice et Tracey est ainsi intégrée pas à pas à l'aide de la formule approchée suivante :

$$\text{Log} \left(\frac{R(t_n)}{R_0} \right) = \text{Log} \left(\frac{R(t_{n-1})}{R_0} \right) + 0,283 \, \text{signe} \left(\frac{\sigma_m(t_n)}{\sigma_{eq}(t_n)} \right) \text{Exp} \left(1,5 \cdot \left| \frac{\sigma_m(t_n)}{\sigma_{eq}(t_n)} \right| \left(\varepsilon_{eq}^p(t_n) - \varepsilon_{eq}^p(t_{n-1}) \right) \right)$$

On obtient ainsi à chaque instant les valeurs du rapport $\frac{R}{R_0}$ en chaque point de Gauss du domaine

Ω_c , le signe du taux de triaxialité permettant la prise en compte d'évolutions aussi bien en traction qu'en compression. Deux fonctionnalités sont alors offertes dans *Code_Aster* :

4.4.1 Recherche de la valeur maximale du taux de croissance

A chaque instant, on cherche sur l'ensemble du domaine Ω_c le point de Gauss (et le volume de la sous-maille associée) maximisant $\frac{R}{R_0}$.

4.4.2 Calcul de la valeur moyenne du taux de croissance

Par quadrature sur chaque maille puis moyennation sur le domaine Ω_c visé, on déduit à chaque instant la valeur moyenne de $\frac{R}{R_0}$ sur Ω_c .

Comme dans le cas du modèle de Weibull, une variante est introduite : l'intégration temporelle précédente est alors réalisée à partir de la contrainte et de la déformation plastique moyenne par maille.

5 Bibliographie

- 1) F. BEREMIN : « A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel », Metall. Trans. 14A, pp 2277-2287, 1981.

- 2) R. MASSON et al. : « Définition de l'approche locale (en fragile) dans le cas d'un trajet de chargement quelconque », Note EDF HT-26/00/021.
- 3) J. R. RICE et D. M. TRACEY : « On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields », J. Mech. Phys. Solids, Vol. 17, pp. 202-217, 1969.
- 4) Y. HUANG : « Accurate Dilatation Rates for Spherical Voids in Triaxial Stress Fields », Transactions of the ASME J. App. Mech., vol. 58, n°4, pp 1084-86, 1991.
- 5) F. MUDRY : « Etude de la Rupture Ductile et de la Rupture par Clivage d'Aciers Faiblement Alliés », Thèse d'Etat, Université de Technologie de Compiègne, 1982.
- 6) B. MARINI, F. MUDRY, A. PINEAU : « Experimental study of cavity growth in ductile rupture », Engineering Fracture Mechanics Vol 22, No 6, pp. 989-996, 1985.
- 7) W. LEFEVRE, R. MASSON, G. BARBIER : « Simulations numériques à l'aide du modèle amélioré de Beremin d'essais de préchargement à chaud réalisés avec l'acier 18MND5 ». Note EDF HT-26/00/028.
- 8) S.R BORDET, A.D. KARSTENSEN, .D.M. KNOWLES, C.S. WIESNER : «A new statistical local criterion for cleavage fracture in steel. Part I: model presentation », Eng. Frac. Mech., Vol. 72, pp.435-452, 2005.
- 9) S.R BORDET, A.D. KARSTENSEN, .D.M. KNOWLES, C.S. WIESNER : «A new statistical local criterion for cleavage fracture in steel. Part II: application to an offshore structural steel », Eng. Frac. Mech., Vol. 72, pp.453-474, 2005.
- 10) B. TANGUY, C. BOUCHET, S.R. BORDET, J. BESSON, A. PINEAU: «Toward a better understanding of the cleavage in RPV steels: Local mechanical conditions and evaluation of a nucleation enriched Weibull model and of the Beremin model over a large temperature range », 9th European Mechanics of Materials Conference, Local approach to fracture, pp 129-134, Moret sur Loing, 2006.

6 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6	R. MASSON, G. BARBIER, G. ROUSSELIER (EDF/MMC)-	Texte initial
03/10/10	R. BARGELLINI (EDF/AMA)	Ajout du descriptif du modèle de Bordet