

Lois de comportement des joints des barrages : JOINT_MECA_RUPT et JOINT_MECA_FROT.

Résumé :

Ce document décrit des lois surfaciques permettant modéliser la rupture et le frottement entre les lèvres d'une fissure ou d'un joint. La loi JOINT_MECA_RUPT est basée sur une formulation cohésive de la rupture, la loi JOINT_MECA_FROT est une version élastoplastique de la loi de frottement Mohr-Coulomb en mécanique pure.

En mécanique celles-ci s'appuient sur les modélisations des joints standards XXX_JOINT . Les lois sont dédiés à la modélisation des barrages, plus précisément des joints béton/rocher ou des joints entre les plots d'un barrage. En fonction du type de chargement l'utilisation de l'une ou de l'autre loi peut être choisie pour différentes parties de l'ouvrage. Pour pouvoir simuler le comportement des barrages réels dans le cadre d'une même modélisation, certaines spécificités de la construction ont été introduites : notamment la procédure de clavage (injection de coulis de béton entre les plots d'un barrage : loi JOINT_MECA_RUPT , option PRES_CLAVAGE) , ou encore l'effet de pression hydrostatique sans couplage dû à la présence de fluide (option PRES_FLUIDE pour les deux lois).

Ces lois admettent également une modélisation couplée hydromécanique (XXX_JOINT_HYME) prenant en compte la propagation des sous-pressions à l'interface barrage-rocher.

Table des Matières

1	Introduction.....	3
1.1	Les joints – maillons faibles des barrages.....	3
1.2	Lois de comportement mécanique.....	4
1.3	Couplage hydromécanique.....	6
1.4	Procédure de clavage.....	6
1.5	Limite d'application et vocabulaire.....	8
2	Formulation théorique de JOINT_MECA_RUPT.....	9
2.1	Loi cohésive en mécanique.....	9
2.2	Énergie de surface pour le comportement normal.....	10
2.3	Vecteur contrainte.....	12
2.3.1	Contraintes normales.....	12
2.3.2	Contrainte de pénalisation du contact.....	13
2.3.3	Contrainte tangentielle.....	14
2.4	Opérateur tangent.....	15
2.5	Réalisation numérique du clavage.....	15
2.6	Variables internes.....	16
3	Formulation théorique de JOINT_MECA_FROT	17
3.1	Discrétisation implicite de la loi de frottement.....	18
3.2	Matrice tangente.....	21
3.3	Variables internes.....	21
4	Prise en compte de la pression hydrostatique sans couplage.....	22
5	Formulation théorique du couplage hydromécanique.....	23
5.1	Modélisation hydraulique.....	23
5.2	Influence de l'hydraulique sur la mécanique : hydro => méca.....	23
5.3	Influence de la mécanique sur l'hydraulique : méca => hydro.....	24
5.4	Couplage hydromécanique.....	24
5.5	Matrice tangente.....	24
6	Fonctionnalités et validation.....	25
7	Description des versions du document.....	25

1 Introduction

Les incidents survenus sur des barrages en béton (Bouzey 1895, Malpasset 1959), ainsi que les résultats d'auscultation, ont relevé que leur stabilité, et en conséquence leur sécurité, dépend très largement du comportement hydromécanique des zones les plus faibles de l'ensemble vallée-barrage. Localisés au niveau des discontinuités dans la structure et dans le rocher, ces points faibles sont principalement les failles des zones d'appui, les reprises de bétonnage dans le barrage, le contact béton-rocher de la fondation et les joints entre les plots du barrage. Le comportement mécanique de ces zones à risque est fortement non-linéaire, mais grâce à leur caractère surfacique, les études industrielles sur les ouvrages importants sont complexes mais envisageable. En plus de ces difficultés, le mode de construction des barrages, les techniques de clavage/sciage utilisées et ses multiples points de drainage en font des ouvrages dont la modélisation par éléments finis est d'autant plus complexe dans un code de calcul conventionnel.

Les deux lois de comportement décrites dans ce document, permettent de prendre en compte les principales non-linéarités du comportement des ouvrages : la phase d'ouverture de fissure (JOINT_MECA_RUPT) et la phase de glissement de ses lèvres (JOINT_MECA_FROT).

1.1 Les joints – maillons faibles des barrages

Comme mentionné précédemment, les joints des barrages ont une origine variée (Figure 1.1-a). D'une manière générale, on peut se représenter le joint comme une discontinuité rugueuse éventuellement renforcée par un matériau de remplissage.

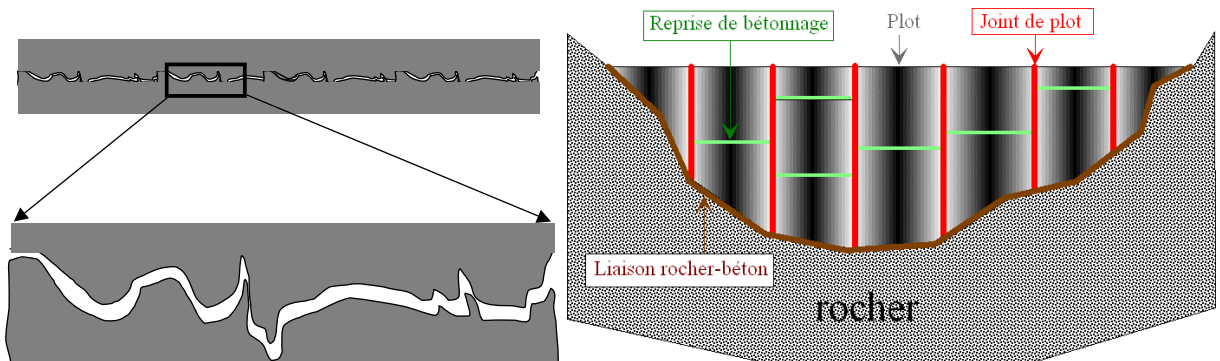


Figure 1.1-a: Image physique de joint

Figure 1.1-b: Différents types de joint d'un barrage

La loi de frottement de Coulomb, qui n'utilise qu'un seul paramètre (coefficient de frottement), ne capte qu'une partie infime du comportement mécanique très complexe d'une telle structure. En effet, à part le frottement, le joint exhibe les phénomènes importants suivants : la perte de résistance à la traction, le comportement élastique à très faible déplacement, la disparition progressive du pic de contrainte en cisaillement pour un chargement cyclique. La pertinence de ces phénomènes dépend fortement de plusieurs paramètres physiques notamment : du niveau de rugosité, de la taille moyenne des aspérités, des propriétés mécaniques des matériaux de remplissage et de la matrice rocheuse (comme le module d'Young, le coefficient de Poisson, ou encore le coefficient de frottement).

La modélisation complète du joint nécessite donc l'introduction d'une loi dépendant de nombreux paramètres (par exemple une loi à 18 paramètres intégrée dans le code *Gefdyn* par le CIH [1] pages 75-77). L'implémentation d'une telle loi dans un code de calcul implicite n'étant pas envisageable, nous proposons des lois plus simples, dépendant de peu de paramètres mais qui permettent néanmoins de capter le comportement essentiel du joint dans la plupart des conditions d'utilisation courantes. Ces dernières sont baptisées : JOINT_MECA_RUPT et JOINT_MECA_FROT. Elles permettent de modéliser le comportement des joints que l'on trouve entre les plots d'un barrage-voûte et/ou à l'interface entre le barrage-poids et sa fondation. Nous en faisons une description succincte ci dessous, avant de les détailler dans les parties qui suivent.

1.2 Lois de comportement mécanique

La loi `JOINT_MECA_RUPT` est une loi élastique adoucissante, dont la forme de comportement normal est basée sur la formulation cohésive de la rupture. Elle ouvre la possibilité de rupture en mode I (traction) et prend en compte le couplage entre l'ouverture normale et la rigidité tangentielle. Cette loi capte bien le comportement de joints réels à faibles déplacements, tant que le régime de glissement n'est pas atteint.

Pour identifier les régimes dans lesquels il est applicable on peut reprendre l'image physique du joint. Ce sont deux interfaces rugueuses contenant éventuellement un matériau de remplissage entre ses lèvres ; ceci peut être soit de l'argile soit les éléments de la roche pour les fissures barrage-fondation, soit du coulis de clavage pour les joints-plots. Une sollicitation de la fissure met d'abord en jeux les propriétés du matériau de remplissage et la géométrie des aspérités qui définissent le comportement de la structure à faibles déplacements. Tant que le matériau de remplissage n'est pas endommagé ou que les aspérités ne sont pas cassées, le comportement du joint reste élastique aussi bien en ouverture, qu'en cisaillement. Cependant les paramètres de rigidités normale et tangentielle, notés K_n et K_t , ne sont pas équivalents, car ils font intervenir deux phénomènes physiques distincts. Le premier dépend principalement de la rigidité du matériau de remplissage, le second dépend d'avantage de la rigidité en flexion des aspérités. Le joint présente une résistance à la traction, noté σ_{max} , qui peut être reliée aux matériaux de remplissage, mais aussi aux frottements transverses entre les aspérités des deux lèvres de la fissure.

La rupture du joint se passe de manière progressive. En effet, le joint s'endommage d'abord en diminuant partiellement sa rigidité avant de se casser complètement. Pour quantifier ce phénomène nous introduisons un paramètre adimensionnel de pénalisation en rupture P_{rupt} , qui représente une ouverture relative en adoucissement par rapport à l'ouverture élastique. Pour les valeurs de P_{rupt} faibles la rupture est brutale, les grandes valeurs $P_{rupt} \gg 1$ le passage est plus progressif, mais ceci augmentera significativement l'énergie de dissipation initiale. Les détails de ce comportement seront présentés dans les parties suivantes.

Afin de modéliser les différents types de profils des joints de plot des barrages (représentés sur la Figure 1.2-a ci-dessous), nous introduisons dans l'interface utilisateur un paramètre $\alpha \in [0, 2]$ supplémentaire. Celui-ci lie l'ouverture normale de joint avec la baisse de sa rigidité tangentielle. Physiquement il reflète la profondeur des aspérités et varie continûment entre $[0, 2]$. $\alpha = 0$ correspond à l'interface lisse sans aspérités (la rigidité tangentielle chute à zéro dès l'ouverture normale de joint, voir Figure 1.2-a à droite). $\alpha = 2$ représente un autre cas extrême, où l'interface est très rugueuse avec la profondeur des aspérités infinie soit le profil d'un joint de plot en créneau (Figure 1.2-a à gauche). Dans ce cas de figure la rigidité tangentielle n'est pas affectée par l'ouverture normale. La valeur par défaut est fixée à 1, ce qui représente une situation intermédiaire.

Si l'on sollicite le joint d'avantage en cisaillement pur il finira par glisser avec un certain coefficient de frottement. Avant de passer dans ce régime plastique, on observe expérimentalement un pic de la force de frottement. Ce phénomène est lié au fait que pour pouvoir glisser les aspérités doivent sortir de leur position enfoncée (dilatance). Durant cette phase les contacts frottants ne sont pas forcément parallèles à la surface des lèvres, ce qui augmente le coefficient de frottement effectif. Cette procédure de « sortie » s'accompagne en plus de l'augmentation du déplacement normal du joint. Si l'on répète ce cycle plusieurs fois, le pic de contrainte s'atténue et disparaît complètement. On note que plus les aspérités sont profondes, plus le pic de frottement est important. On peut même imaginer le cas limite où malgré l'ouverture normale, le joint reste toujours élastique au niveau du comportement tangentiel. La loi `JOINT_MECA_FROT` ne prend pas en compte le pic, elle ne représente que le phénomène de glissement pur, caractérisé par le coefficient de frottement μ et l'adhésion c , qui est liée à la résistance à la traction $R_t = c/\mu$. La perte de résistance à la traction n'est pas prise en compte dans la version actuelle du frottement.

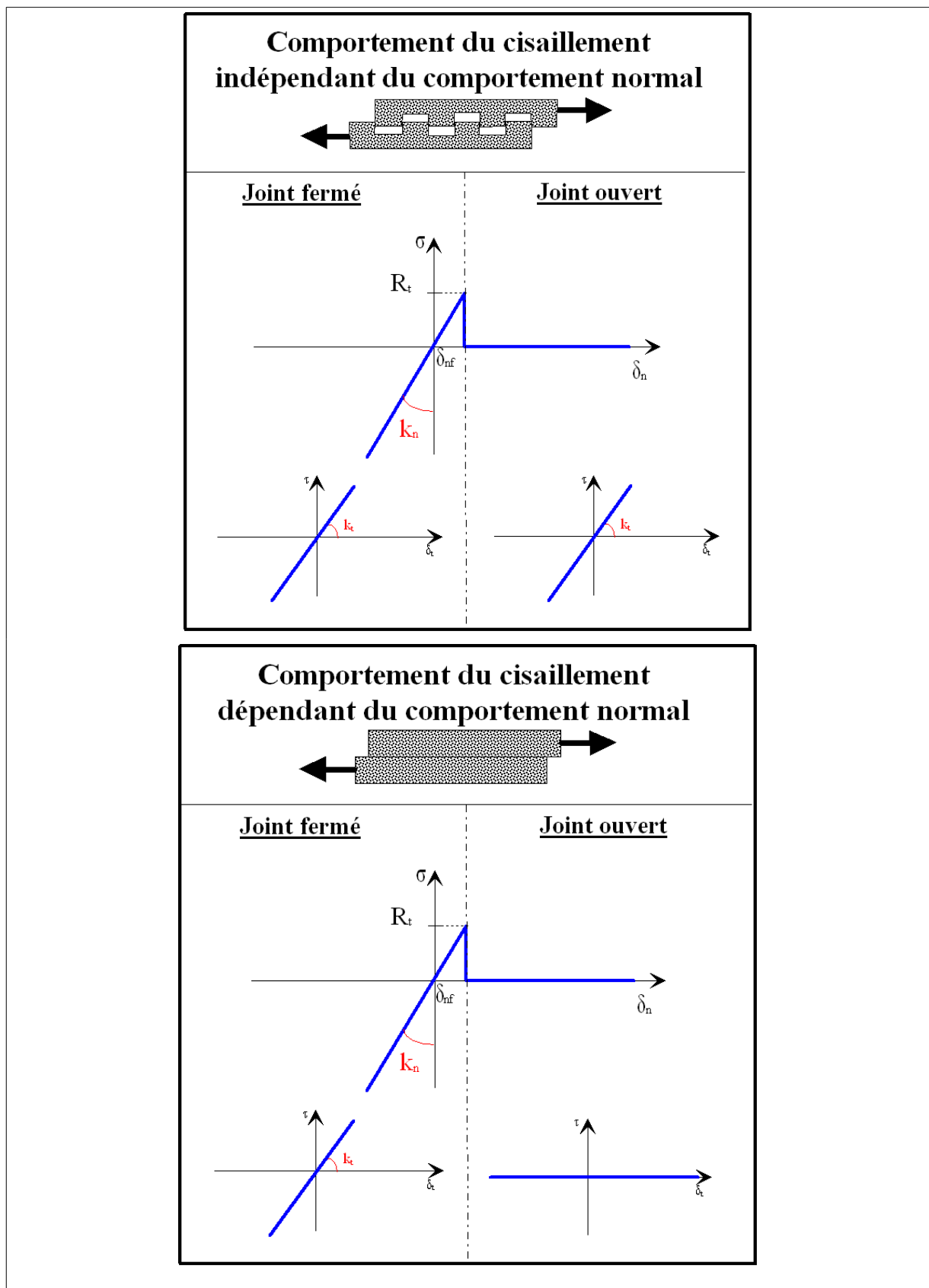


Figure 1.2-a: Comportement normal et tangentiel en fonction de profil de joint

1.3 Couplage hydromécanique

Pour évaluer la stabilité des barrages il est important de pouvoir modéliser la propagation des sous-pressions entre le rocher et la fondation du barrage. Deux possibilités sont offertes à l'utilisateur. D'abord, un profil de sous-pression peut être imposé, comme un paramètre d'entrée du chargement. Cette possibilité simple permet d'étudier la stabilité du barrage pour un chargement hydraulique conservatif (le moins favorable). D'autre part, la rapidité du calcul présente un avantage non négligeable. On peut tester ainsi un profil hydraulique extrême sans dépenser plus de temps que dans le calcul mécanique pur. De plus, cette fonctionnalité permet de faire un calcul de chaînage hydromécanique. Celui-ci consiste à démarrer par un calcul mécanique avec un état initial de pression dans les joints. En fonction de l'endommagement de ces derniers, le profil de pression (dont la forme est donnée *a priori*) est mis à jour. Une fois la pression modifiée, l'état mécanique des joints évolue à nouveau, ce qui peut générer la rupture de certains d'entre eux. Le fluide se propage alors plus facilement et le profil de pression subit à nouveau une évolution. Ce processus est chaîné grâce à une boucle de point fixe dans le fichier de commande afin d'obtenir des états mécanique et hydraulique convergés.

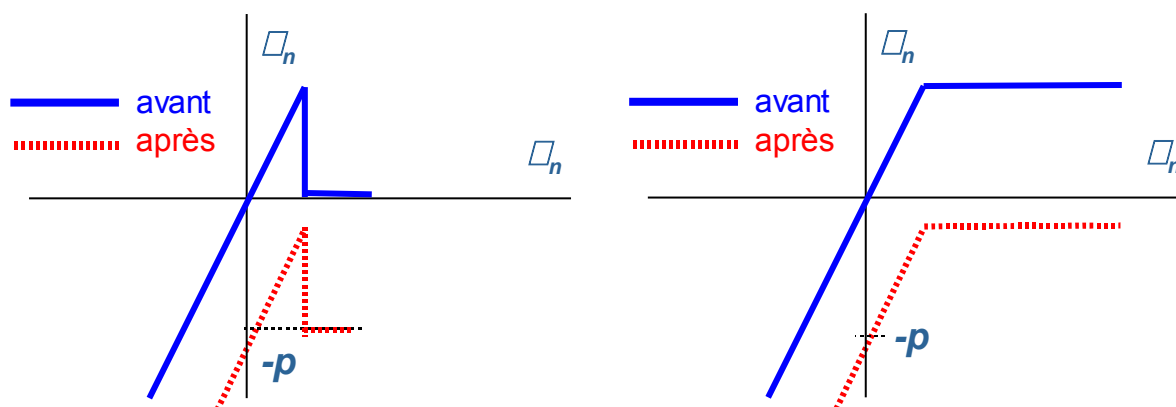


Figure 1.3-a: Prise en compte de la pression hydrostatique. Décalage de relation de comportement normal pour la loi `JOINT_MECA_RUPT` (gauche) et la loi `JOINT_MECA_FROT` (droite).

Du point de vue théorique l'introduction du fluide dans le joint modifie la contrainte mécanique normale $\sigma_n \rightarrow \sigma_n - p$. En pratique la loi de comportement en question est décalée vers le bas en fonction de la valeur de pression p en chaque point d'intégration (cf. Figure 3.7).

Ces lois acceptent aussi une modélisation hydromécanique couplée, nommée `xxx_JOINT_HYME`. La différence entre le modèle avec chaînage hydromécanique (présenté ci-dessus) porte sur la prise en compte plus précise de l'action de la mécanique sur l'hydraulique. En effet, dans le premier modèle le profil est donné *a priori*. Dans le second l'ouverture du joint modifie la loi d'écoulement du fluide, le profil de pression est une inconnue du problème. Lors du couplage hydromécanique, pour modéliser l'écoulement, la loi mécanique est enrichie en prenant en compte l'écoulement cubique de Poiseuille, qui est régularisée pour des ouvertures de fissure très faibles. Ainsi, le profil de pression n'est plus imposé, mais calculé pendant la simulation. En plus de l'équation mécanique standard on résout simultanément l'équation d'écoulement suivante : $\text{div } \vec{w} = 0 ; \vec{w} = \frac{\rho}{12\bar{\mu}} \delta_n^3 \vec{\nabla} p$.

où $\vec{w}$ correspond au flux hydraulique, δ_n est l'ouverture normale de joint, enfin ρ et $\bar{\mu}$ désignent respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide.

1.4 Procédure de clavage

Le clavage est une étape clef lors de la construction d'un barrage-voûte. Il se traduit par une injection de coulis de béton sous pression entre les plots du barrage. Il est donc important de pouvoir modéliser correctement ce processus. Dans la pratique la coulée du béton se décompose en plusieurs paliers où le béton est injecté à différents endroits et à des pressions variées. Du point de vue mécanique le

clavage s'interprète par une mise en compression des lèvres de joint clavé jusqu'à $\sigma_n = -\sigma_{nc}$ (pression du béton injecté, mot clé PRES_CLAVAGE).

Cette option est directement incluse dans les paramètres de la loi de comportement. Physiquement le clavage est accompagné par un processus de solidification du coulis injecté, la procédure est modélisée par la modification de l'épaisseur des joints concernés. Si le joint est en forte compression initialement, le clavage ne l'influence pas. Si par contre le joint est ouvert ou pas suffisamment comprimé ($\sigma_n > -\sigma_{nc}$), le clavage se traduira par le changement du paramètre d'épaisseur du joint noté δ_{nf} . Et, par conséquent, d'une translation de la contrainte normale.

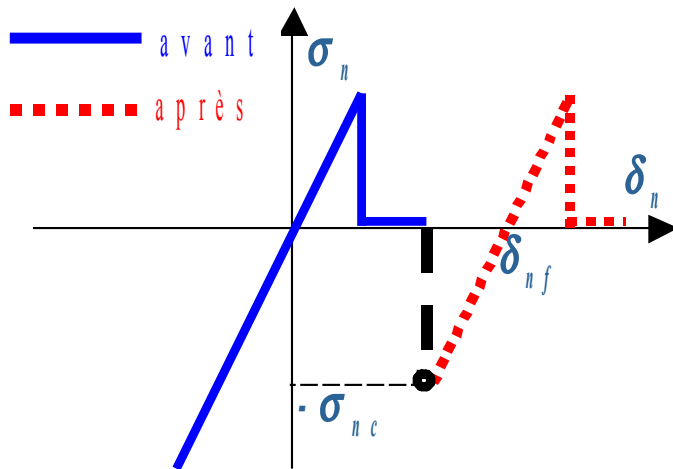


Figure 1.4-a: Illustration de la procédure de clavage

partiellement, soit complètement selon l'endommagement des joints avant la procédure de clavage. La procédure implémentée consiste à ne pas la restaurer, celle-ci garde sa valeur courante.

1.5 Limite d'application et vocabulaire

Les lois de comportement présentées dans cette section sont simples, robustes, dépendent de peu de paramètres et ont l'avantage non-négligeable d'être basé sur un formalisme théorique éprouvé dans la littérature scientifique. Les paramètres principaux sont les suivants :

Paramètre physique	Dénomination Aster	Valeur conseillée pour le barrage en béton
K_n Rigidité normale	K_N	$K_n = 3 \cdot 10^{12}$ Pa/m
K_t Rigidité tangentielle	K_T	Défaut $K_t = K_n$
σ_{max} Seuil de rupture	SIGMA_MAX	$\sigma_{max} = 3$ MPa
P_{rupt} Pénalisation rupture	PENA_RUPT	Défaut $P_{rupt} = 1$
P_{cont} Pénalisation contacte	PENA_CONTACT	Défaut $P_{cont} = 1$
α Rugosité relative	ALPHA	Défaut $\alpha = 1$
p_{flu} Pression fluide interne	PRES_FLUIDE	Défaut $p_{flu} = 0$ Pa (absence de fluide)
σ_{nc} Pression de clavage	PRES_CLAVAGE	Défaut $\sigma_{nc} = -1$ Pa (pas de clavage)
$\bar{\mu}$ Viscosité dynamique de fluide	VISC_FLUIDE	$\bar{\mu} = 10^{-3}$ Pa·s ¹
ρ Masse volumique	RHO_FLUIDE	$\rho = 1000$ kg/m ³
ϵ_{min} Ouverture minimale de joint	OUV_MIN	$\epsilon_{min} = 10^{-8}$ m
μ Coefficient de frottement	MU	$\mu = 1$
c Adhésion	ADHESION	Défaut $c = 0$ Pa
K Écrouissage	PENA_TANG	Défaut $K = (K_n + K_t) \cdot 10^{-6}$

Ces lois ne permettent pas actuellement de modéliser le comportement dans la phase de transition rupture-frottement. Pour la loi de frottement, qui présente une résistance à la traction non nulle, la rupture de joint n'est pas implémentée. De plus la modélisation du couplage hydromécanique se limite à la loi de rupture.

1 Cette valeur étant un multiplicateur de flux hydraulique (voir page 6), son unité peut être choisi de façon à avoir les flux et les contraintes mécaniques de même ordre de grandeur, ce qui simplifie l'analyse d'erreurs relatives.

2 Formulation théorique de JOINT_MECA_RUPT

La loi JOINT_MECA_RUPT accepte une modélisation couplée hydromécanique, mais ces deux phénomènes peuvent être traité séparément. Dans un premier temps on décrira la partie mécanique de la loi, qui englobe : rupture, contact, procédure de clavage et pression imposée. Elle s'appuie sur les modélisations XXX_JOINT (R3.06.09).

Remarque : Les deux prochaines sections présentent le concept théorique général. En première lecture on peut les omettre et passer directement à la section 12, qui fournit suffisamment d'éléments pour comprendre l'implémentation numérique de la loi.

2.1 Loi cohésive en mécanique

Le cadre théorique choisi pour modéliser la rupture des joints de barrages en béton est basé sur les modèles cohésifs (R7.02.11, [Bar62], [Lav04]), car en rupture fragile, pour lever le problème de contraintes infinies en fond de fissure, on peut introduire des forces de cohésion qui imposent un critère d'amorçage en contrainte. Les forces à caractère évanescent s'exercent alors entre les particules de part et d'autre du plan de séparation de la fissure pendant son ouverture (voir Figure 2.1-a).

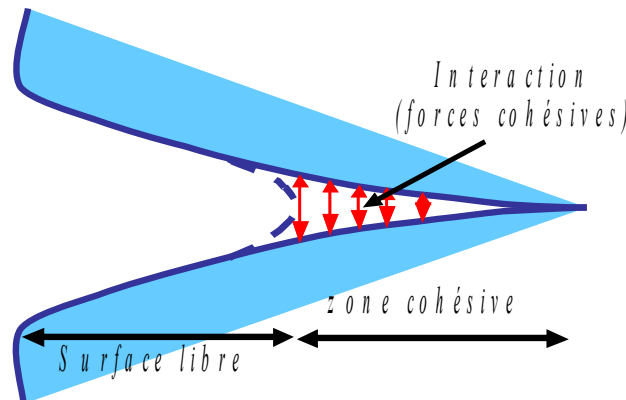


Figure 2.1-a: Schéma d'une fissure cohésive

Du point de vue physique on considère que l'ouverture de la fissure coûte une énergie proportionnelle à sa longueur en 2D et à sa surface en 3D. On l'appelle énergie de surface que l'on exprime à l'aide de la densité d'énergie $\Psi = \int_{\Gamma} \psi(\vec{\delta}) d\Gamma$ ². Le champ de déplacement à l'équilibre $\mathbf{u}$ est obtenu en minimisant la somme de l'énergie élastique Φ , de l'énergie de surface, et du travail des efforts extérieurs $\mathcal{W}^{ext}$. La solution est obtenue en utilisant une approche variationnelle de la rupture. L'état qui réalise le minimum de l'énergie totale correspond à un état d'équilibre mécanique:

$$\min_{\mathbf{u}} \left(\Phi(\mathbf{u}) + \Psi(\vec{\delta}(\mathbf{u})) + \mathcal{W}^{ext} \right)$$

La surface de discontinuité est discrétisée en 2D ou 3D par des éléments finis de joint (voir documentation : R3.06.09). Le saut de déplacement dans l'élément $\vec{\delta} = (\delta_n, \delta_{t1}, \delta_{t2})$ est une fonction linéaire des déplacements nodaux. La force³ de cohésion qui s'exerce sur les lèvres de la fissure est notée $\vec{\sigma}$, elle est définie par la dérivée de la densité d'énergie de surface par rapport au saut de déplacement.

On appelle loi cohésive une relation entre $\vec{\sigma}$ et le saut de déplacement $\vec{\delta}$.

Les paramètres matériaux les plus pertinents, qui décrivent le joint d'un barrage sont :

- les deux rigidités en sollicitations normale K_n et tangentielle K_t , qui caractérisent la surface et les matériaux de remplissage de la fissure ;

² Γ représente le contour de la fissure

³ force par unité de surface, homogène à une contrainte.

•et la contrainte critique à la rupture σ_{max}

On introduit, par ailleurs, trois paramètres numériques adimensionnels : P_{rupt} , P_{cont} et α . Le premier pilote la régularisation de la pente d'adoucissement en rupture, le second la pénalisation du contact et le troisième assure une reprise progressive d'efforts tangentiels en fonction de l'ouverture normale. Ce dernier peut être associé à la taille relative des aspérités des surfaces en contact : $\alpha \in [0, 2]$.

Dans les lois cohésives standards (R7.02.11) l'énergie de surface dépend du vecteur de déplacement⁴ et les contraintes sont définies en tant que les dérivées premières de l'énergie :

$$\Psi(\vec{\delta}) \equiv \int_{\Gamma} \psi(\delta_n, \vec{\delta}_t) d\Gamma \quad \sigma_n = \frac{\partial \psi_n(\delta_n)}{\partial \delta_n} ; \vec{\sigma}_t = \frac{\partial \psi_t(\vec{\delta}_t)}{\partial \vec{\delta}_t}$$

À la différence de ces lois cohésives standards, dans ce modèle, uniquement la partie normale de la loi est dérivée à partir de l'énergie de surface, alors que la composante tangentielle de la loi est donnée d'une manière explicite.⁵

Dans les deux cas, l'irréversibilité de la fissuration est prise en compte via une condition d'accroissement d'ouverture normale maximale de joint.

2.2 Énergie de surface pour le comportement normal

La densité d'énergie de surface ψ , en un point donné de la fissure, dépend explicitement du saut de déplacement normal entre les lèvres de la fissure δ_n . Elle varie aussi en fonction de l'état du joint, ce qui est pris en compte via une variable interne seuil $\kappa \geq 0$, qui gère l'irréversibilité de la fissuration. Cette dernière mémorise la plus grande norme du saut atteinte au cours de l'ouverture. Sa loi d'évolution entre deux incréments de chargement successifs - et + s'écrit :

$$\kappa^+ = \max(\kappa^-, \delta_n^+)$$

Suivant la valeur d'ouverture de joint on pourra se retrouver dans une des trois situations. Le joint comprimé se trouve dans le régime de contact ; pour une ouverture normale positive, si cette dernière dépasse le seuil on parle de régime dissipatif (dissipation d'énergie au cours de la fissuration) ; enfin dans le cas intermédiaire le joint est dans un régime linéaire (décharge ou recharge linéaire sans dissipation d'énergie).

$$\psi_n(\delta_n, \kappa) = \begin{cases} \psi_n^{con}(\delta_n, \kappa) & si \quad \delta_n < 0 \\ \psi_n^{lin}(\delta_n, \kappa) & si \quad 0 \leq \delta_n < \kappa \\ \psi_n^{dis}(\delta_n) & si \quad \delta_n \geq \kappa \end{cases} \quad \psi_t(\vec{\delta}_t) = \begin{cases} \psi_t^{fer}(\vec{\delta}_t) & si \quad \delta_n < 0 \\ \psi_t^{ouv}(\vec{\delta}_t) & si \quad \delta_n \geq 0 \end{cases}$$

D'une manière synthétique l'énergie de surface s'écrit de la manière suivante :

$$\psi(\delta_n, \kappa) = H(\delta_n - \kappa) \psi_n^{dis}(\delta_n) + H(\delta_n) \cdot H(\kappa - \delta_n) \psi_n^{lin}(\delta_n, \kappa) + H(-\delta_n) \cdot \psi_n^{con}(\delta_n) \quad \text{éq 2.2-1}$$

où $H(x)$ est la fonction de Heaviside ($H(x) = 0$ si $x < 0$, $H(x) = 1$ si $x \geq 0$).

Une des particularités de la loi `JOINT_MECA_RUPT` est que, tous les régimes confondus, le comportement est toujours linéaire au niveau des contraintes. Au niveaux des énergies nous obtenons des fonctions quadratiques, qui sont données dans la suite à une constante additive près, qui elle dépend du seuil.

4 Le vecteur à deux composantes $\vec{\delta}_t = (\delta_{t1}, \delta_{t2})$ désigne le saut tangentiel.

5 Notre formulation sort donc du formalisme énergétique de la rupture. Nous pouvons imaginer une amélioration future de la loi en y introduisant une fonction de régularisation dérivable.

Le comportement normal de joint est séparé en trois régimes : contact, linéaire et dissipatif. La fonction $\psi_n^{con}(\delta_n) = P_{con} K_n \delta_n^2 / 2$ assure la condition de contact (non interpénétration des lèvres de la fissure) elle est régularisée afin d'obtenir une meilleure convergence numérique. En faisant varier le paramètre P_{con} , on peut changer la rigidité normale pour le joint fermé.

En régime linéaire dans le cas où une fissure existante évolue sans dissiper d'énergie, la densité d'énergie correspondante ne dépend que du paramètre de rigidité normale : $\psi_n^{lin}(\delta_n, \kappa) = K_a(\kappa) \delta_n^2 / 2$, où $K_a(\kappa) = (P_{rupt}^{-1} + 1) \sigma_{max} / \kappa - K_n P_{rupt}^{-1}$ est une fonction décroissante du seuil de rupture κ .

Dans le régime dissipatif, afin d'obtenir un adoucissement linéaire, la densité de l'énergie correspondante a une forme quadratique en fonction de l'ouverture :

$$\psi_n^{dis}(\delta_n) = \begin{cases} \sigma_{max}(1 + P_{rupt}^{-1}) \delta_n - K_n P_{rupt}^{-1} \delta_n^2 / 2 & \text{si } \delta_n < \sigma_{max}(1 + P_{rupt}) / K_n \\ \sigma_{max}^2 (1 + P_{rupt})^2 / (2 P_{rupt} K_n) & \text{si } \delta_n \geq \sigma_{max}(1 + P_{rupt}) / K_n \end{cases}$$

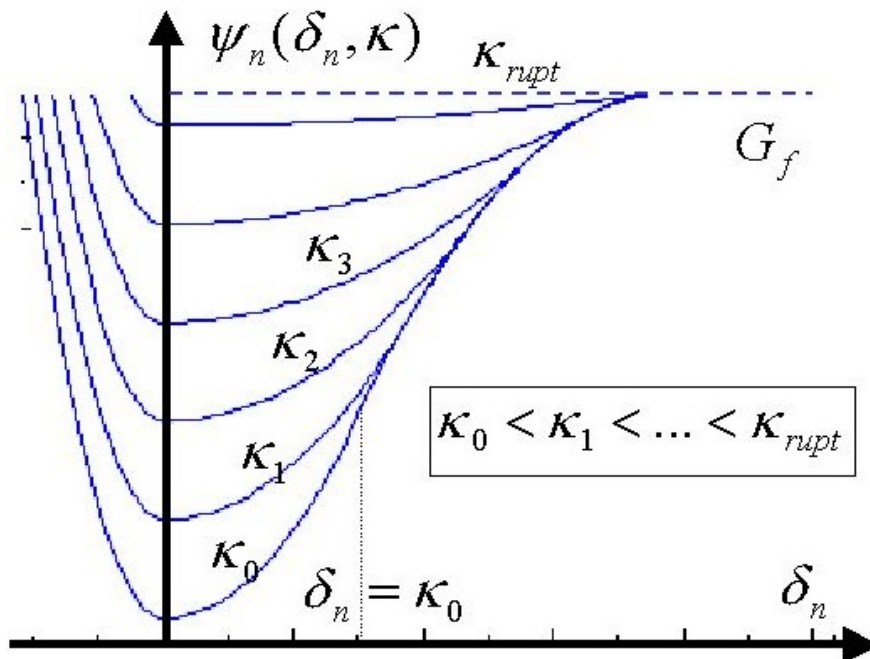


Figure 2.2-a: Densité d'énergie de surface en fonction du saut de déplacement pour différentes valeurs du seuil d'endommagement κ

La constante additive fait translater les énergies élastique ψ_n^{lin} ; ψ_n^{con} définies précédemment de sorte que peu importe l'état d'endommagement du joint on obtient toujours le même taux de restitution de l'énergie (constante de Griffith G_f , voir Figure 2.2-a et eq. 2.2-2). Elle ne dépend que du seuil et n'affecte pas l'expression des contraintes.

P_{rupt} est introduit de telle sorte que plus il augmente plus l'ouverture critique à la rupture est importante et par conséquent plus cela fait accroître l'énergie dissipative de Griffith G_f .

En résumé : le comportement normal de la loi `JOINT_MECA_RUPT` est piloté par l'évolution de la densité d'énergie surfacique, celle ci se présente sous la forme d'un puits potentiel. Elle comporte trois régimes principaux : contact, traction linéaire élastique, endommagement/adoucissement, dont les

profils correspondant sont approximés par des fonctions quadratiques en ouverture. Le joint commence à s'endommager quand la contrainte normale atteint la valeur critique $\sigma_n = \sigma_{max}$. Plus le joint est endommagé plus le puits énergétique s'aplatit voir (Figure 2.2-a). Le paramètre d'endommagement (le seuil) lui évolue seulement dans ce dernier régime en partant de sa valeur initiale pour le joint sain $\kappa_0 = \sigma_{max} / K_n$ jusqu'à la valeur ultime pour le joint complètement endommagé $\kappa_{rupt} = \sigma_{max} (1 + P_{rupt}) / K_n$. P_{con} est une constante définie par l'utilisateur qui change le niveau de pénalisation en contact (voir Figure 2.3.2-a). P_{rupt} change énergie dissipée par unité de surface unitaire : $G_f = \sigma_{max}^2 (1 + P_{rupt}) / (2K_n)$.

$$\psi_n(\delta_n, \kappa) = \begin{cases} \sigma_{max} (1 + P_{rupt}^{-1}) (\kappa - \kappa_0) / 2 + P_{con} K_n \delta_n^2 / 2 & \text{si } \delta_n < 0 \\ \sigma_{max} (1 + P_{rupt}^{-1}) (\kappa - \kappa_0) / 2 + \left[\sigma_{max} (1 + P_{rupt}^{-1}) / \kappa - K_n P_{rupt}^{-1} \right] \delta_n^2 / 2 & \text{si } 0 \leq \delta_n < \kappa \\ \sigma_{max} (1 + P_{rupt}^{-1}) (\delta_n - \kappa_0) / 2 - K_n P_{rupt}^{-1} \delta_n^2 / 2 & \text{si } \kappa \leq \delta_n < \kappa_{rupt} \\ G_f & \text{si } \delta_n \geq \kappa_{rupt} \end{cases}$$

éq 2.2-2:

Cette fonction est continue et dérivable, ce qui assure la continuité des contraintes.

2.3 Vecteur contrainte

Le vecteur contrainte dans l'élément, noté $\vec{\sigma} = (\sigma_n, \vec{\sigma}_t)$ ⁶, peut être séparé en plusieurs régime.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= H(\delta_n - \kappa) \sigma_n^{dis} + H(\kappa - \delta_n) H(\delta_n) \sigma_n^{lin} + H(-\delta_n) \sigma_n^{con} \\ \vec{\sigma}_t &= H(\delta_n) \vec{\sigma}_t^{ouv} + H(-\delta_n) \vec{\sigma}_t^{fer} \end{aligned} \quad \text{éq 2.3-1}$$

Pour la partie normale il est égal à la somme des dérivées de la densité d'énergie de surface et de la densité d'énergie de pénalisation en contact par rapport au saut. Il suffit donc de dériver les expressions données dans la section précédente (10) pour obtenir la composante normale des contraintes⁷.

La partie tangentielle $\vec{\sigma}_t^{fer} = f(K_t, \vec{\delta}_t)$ est une fonction de l'ouverture tangentielle, elle met en jeu la rigidité tangentielle pour le joint fermé. En fonction du profil de l'interface le comportement tangentiel pour le joint ouvert peut être varié : $\vec{\sigma}_t^{ouv} = \vec{\sigma}_t^{fer}$ pour les surfaces en créneau (comme par exemple sur la Figure 1.2-a à droite), ou bien $\vec{\sigma}_t^{ouv} \equiv 0$ pour les surfaces très lisses (Figure 1.2-a à gauche).

2.3.1 Contraintes normales

Regardons l'évolution de la contrainte normale dans la zone de traction en fonction du saut (voir Figure 2.3.1-a). Les flèches représentent le sens d'évolution possible de la contrainte suivant que le processus d'ouverture est réversible (régime linéaire) ou non (régime dissipatif). A l'amorçage, le joint se comporte d'abord de façon élastique linéaire, puis dès que la contrainte normale atteint la valeur critique $\sigma_n = \sigma_{max}$, il a un comportement adoucissant : il perd progressivement sa rigidité, ce qui donne le régime linéaire mais pas élastique, il est caractérisé par une pente d'adoucissement de la rupture $-K_n / P_{rupt}$. La rigidité élastique pour le joint sain définit la valeur initiale du seuil

6 Dans notre cas $\sigma_n = \partial \psi_n(\delta_n) / \partial \delta_n$;

7 Les expressions des contraintes peuvent être postulées directement sans passer par la formulation énergétique

d'endommagement $\kappa_0 = \sigma_{\max} / K_n$. Le seuil de la rupture est donné par $\kappa_{rupt} = \sigma_{\max} (1 + P_{rupt}) / K_n$. Plus P_{rupt} est important plus l'énergie de dissipation accroît $G_f = \sigma_{\max}^2 (1 + P_{rupt}) / (2K_n)$.

$$\sigma_n(\delta_n, \kappa) = \begin{cases} P_{con} K_n \delta_n & \text{si } \delta_n < 0 \\ \left[\sigma_{\max} (1 + P_{rupt}^{-1}) / \kappa - K_n P_{rupt}^{-1} \right] \delta_n & \text{si } 0 \leq \delta_n < \kappa \\ \sigma_{\max} (1 + P_{rupt}^{-1}) - K_n P_{rupt}^{-1} \delta_n & \text{si } \kappa \leq \delta_n < \kappa_{rupt} \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq \kappa_{rupt} \end{cases} \quad \text{éq 2.3.1-1}$$

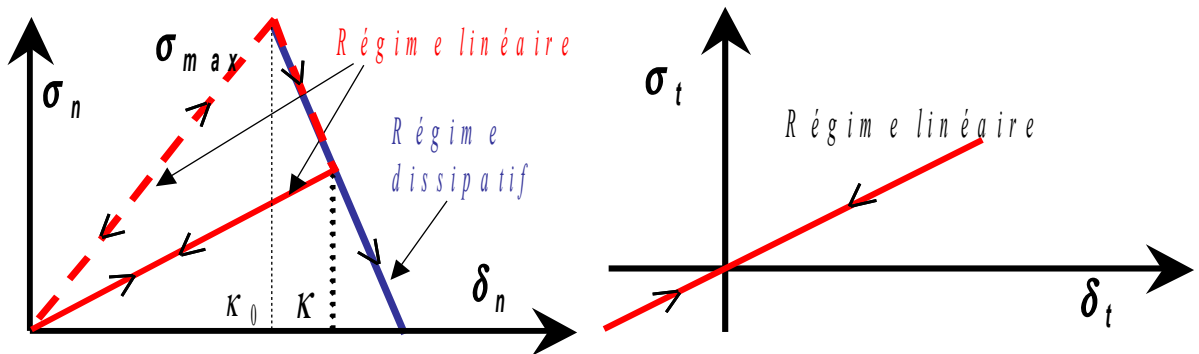


Figure 2.3.1-a: Dépendance des contraintes en fonction de l'ouverture

2.3.2 Contrainte de pénalisation du contact

La valeur de la pente de pénalisation en contact est donnée par la relation :

$$\sigma_n(\delta_n) = P_{con} K_n \delta_n, \text{ si } \delta_n < 0 \quad \text{éq 2.3.2-1}$$

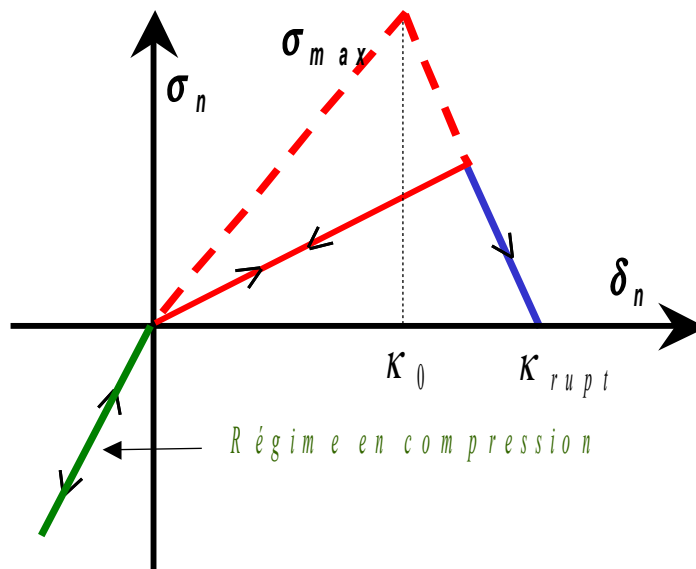


Figure 2.3.2-a: Contrainte cohésive normale en fonction du saut normal pour le joint partiellement endommagé

Le paramètre numérique `PENA_CONTACT`, entré par l'utilisateur, permet de jouer sur la pente de la pénalisation du contact (voir figure 2.3.2-a). Ce dernier vaut par défaut 1, cela correspond au cas où la pente du contact est identique à celle de la rigidité en ouverture. Si on choisit une valeur supérieure à 1, on augmente la pénalisation. Ceci permet de modéliser, par exemple, la reprise des efforts par le béton partiellement endommagé en traction. Pour une valeur inférieure à 1, on diminue la pénalisation, ce qui des facto fait une modélisation du béton partiellement endommagé en compression.

2.3.3 Contrainte tangentielle

Pour les joints de barrage à faible ouverture, on observe que indépendamment du régime de chargement normal la contrainte tangentielle varie toujours linéairement, la rigidité tangentielle est fonction de l'ouverture normale. Dans le cas extrême d'une surface de contact parfaitement lisse la rigidité tangentielle chute brutalement à zéro à l'ouverture normale positive. En conséquence l'énergie surfacique de la loi n'est plus continue, ce qui génère en principe un pic dans la contrainte normale (fonction delta $\delta(x)$) à l'ouverture. C'est pour cette raison que nous renonçons dans la version actuelle de la loi garder le formalisme énergétique complet. La loi tangentielle est alors postulée d'une manière empirique sous forme incrémentale :

$$\Delta \vec{\sigma}_t(\delta_t, \delta_n) = \begin{cases} K_t \Delta \vec{\delta}_t & \text{si } \delta_n < 0 \\ (1 - \delta_n / \kappa_{rupt}^{\tan}) K_t \Delta \vec{\delta}_t & \text{si } 0 \leq \delta_n < \kappa_{rupt}^{\tan} \\ 0 & \text{si } \delta_n \geq \kappa_{rupt}^{\tan} \end{cases} \quad \text{éq 2.3.3-1}$$

Nous introduisons le seuil de rupture tangentielle $\kappa_{rupt}^{\tan} = \kappa_{rupt} \tan(\alpha \pi / 4)$, dont la valeur peut être modifiée par l'utilisateur à l'aide de mot clé `ALPHA`, $\alpha \in [0, 2]$. Pour une valeur zéro la pente tangentielle change brutalement à l'ouverture, pour la valeur $\alpha = 2$ la rigidité tangentielle n'évolue pas. Par souci de compatibilité avec les lois de comportement développées dans le code Gefdyn, nous ne faisons pas de correction de la composante normale de contraintes dans la phase de transition, celle ci sont toujours donnée par éq 2.3.1-1, ce ci résulte par la matrice tangente non symétrique. L'évolution de la contrainte tangentielle se sépare en trois régimes : joint élastique en compression ; joint élastique partiellement ouvert avec une rigidité diminuée ; joint rompu complètement (éq 2.3.3-1, Figure 2.3.3-a).

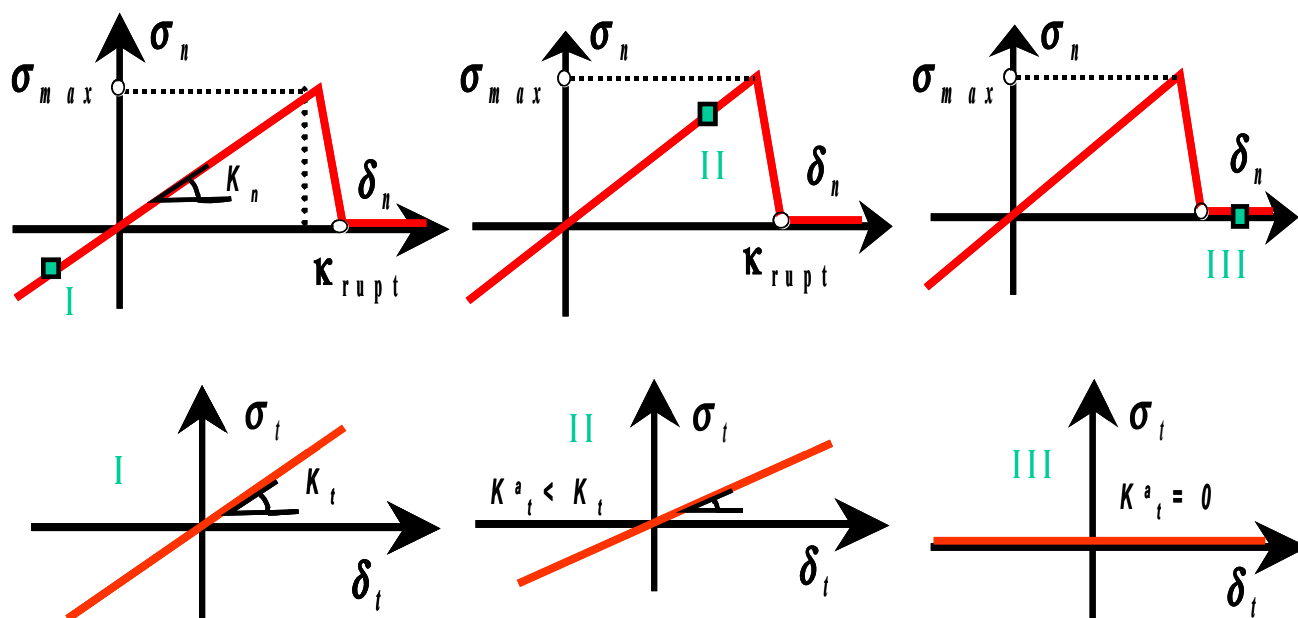


Figure 2.3.3-a: Illustration du couplage entre le cisaillement et l'ouverture normale de joint : I dans le régime en compression ; II dans le régime d'ouverture partiel ; III dans le régime d'ouverture complète. On note $K_t^a \equiv (1 - \delta_n / \kappa_{rupt}^{\tan}) K_t$

2.4 Opérateur tangent

Comme le comportement dans chacun des régimes est linéaire, le calcul de la matrice tangente est aisé :

$$\frac{\partial \sigma_n(\delta_n)}{\partial \delta_n} = \begin{cases} P_{con} K_n & si \quad \delta_n < 0 \\ \sigma_{max}(1 + P_{rupt}^{-1}) / \kappa - K_n P_{rupt}^{-1} & si \quad 0 \leq \delta_n < \kappa \\ -K_n P_{rupt}^{-1} & si \quad \kappa \leq \delta_n < \kappa_{rupt} \\ 0 & si \quad \delta_n \geq \kappa_{rupt} \end{cases} \quad \frac{\partial \sigma_n(\delta_n)}{\partial \delta_t} = 0 \quad \text{éq 2.4-1}$$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_t(\vec{\delta}_t, \delta_n)}{\partial \vec{\delta}_t} = \begin{cases} K_t Id & si \quad \delta_n < 0 \\ (1 - \delta_n / \kappa_{rupt}^{tan}) K_t Id & si \quad 0 \leq \delta_n < \kappa_{rupt}^{tan} \\ 0 & si \quad \delta_n \geq \kappa_{rupt}^{tan} \end{cases} \quad \frac{\partial \vec{\sigma}_t(\vec{\delta}_t, \delta_n)}{\partial \delta_n} = \begin{cases} -K_t \Delta \vec{\delta}_t / \kappa_{rupt}^{tan} & si \quad 0 \leq \delta_n < \kappa_{rupt}^{tan} \\ 0 & si \quad 0 > \delta_n \geq \kappa_{rupt}^{tan} \end{cases}$$

Notons que la matrice tangente n'est pas symétrique. Ceci résulte de la non répercussion sur les contraintes normales de la régularisation de l'évolution de la contrainte tangentielle à l'ouverture du joint (les termes singuliers ne sont pas pris en compte).⁵

2.5 Réalisation numérique du clavage

Le clavage correspond physiquement à une procédure d'injection de coulis de béton sous pression entre les plots du barrage, il est caractérisé par un simple paramètre la pression locale de coulis injecté $\sigma_{nc} \geq 0$. Pour mettre en place le clavage l'utilisateur doit définir une fonction de pression de clavage, mot clef `PRES_CLAVAGE`, qui dépend à la fois de l'espace (clavage aux différents endroits à différente pression) et du temps (plusieurs clavages successifs). Les endroits où la pression de clavage est négative ne sont pas clavés.

La procédure est modélisée par la modification de l'épaisseur des joints concernés. Si le joint est en forte compression initialement, le clavage ne l'influence pas. Si par contre le joint est ouvert ou pas suffisamment comprimé ($\sigma_n > -\sigma_{nc}$), le clavage se traduira par le changement du paramètre d'épaisseur totale du joint noté $\delta_{nf}^+ = \delta_{nf}^- + \delta_n^+ + \sigma_{nc} / (P_{con} K_n)$.

Le clavage préserve alors l'ouverture normale de chaque joint tout en translatant la loi de comportement selon l'axe de l'abscisses. La nouvelle position d'équilibre local possède une contrainte normale égale à la pression du béton injecté $\sigma_n = -\sigma_{nc}$. Cette procédure est appliquée localement. Bien que chaque joint soumis au clavage se retrouve dans le régime linéaire en compression, la sélection elle-même des joints à claver est « non-linéaire ». La procédure globale devient, de ce fait, aussi non-linéaire et il ne suffit pas de modifier juste les contraintes normales des joints clavés pour obtenir à nouveau l'équilibre mécanique après le clavage. En conséquence un calcul d'équilibre mécanique est réalisé après ce clavage « local » pour remettre le système dans son état d'équilibre. Si le jeu du joint à claver est modifié, la mise à jour de l'épaisseur des joints est effectuée et ainsi de suite tant qu'il existe les points où $\sigma_n > -\sigma_{nc}$. Les joints concernés se ferment et se mettent progressivement en compression tout en suivant la courbe de comportement normal. Numériquement ceci se traduit par un mélange de schéma implicite et explicite ce qui augmente le nombre d'itérations de Newton avant d'atteindre le critère de convergence. Cela n'est pas gênant, car cette procédure n'est faite qu'une seule fois pendant la phase de « construction » numérique de barrage. Une illustration est donnée sur la Figure 2.5-a ci-dessus. Les points «in» et «out» correspondent respectivement aux valeurs de la contrainte avant et après le clavage.

Le comportement normal du joint après le clavage peut être modifié. Ainsi, la résistance à la traction peut être restaurée soit partiellement, soit complètement (c'est le cas sur la Figure 2.5-a) selon l'endommagement des joints avant la procédure de clavage. Dans la procédure telle qu'elle a été

développée nous avons fait le choix de ne pas restaurer la résistance à la traction, celle-ci garde sa valeur courante.

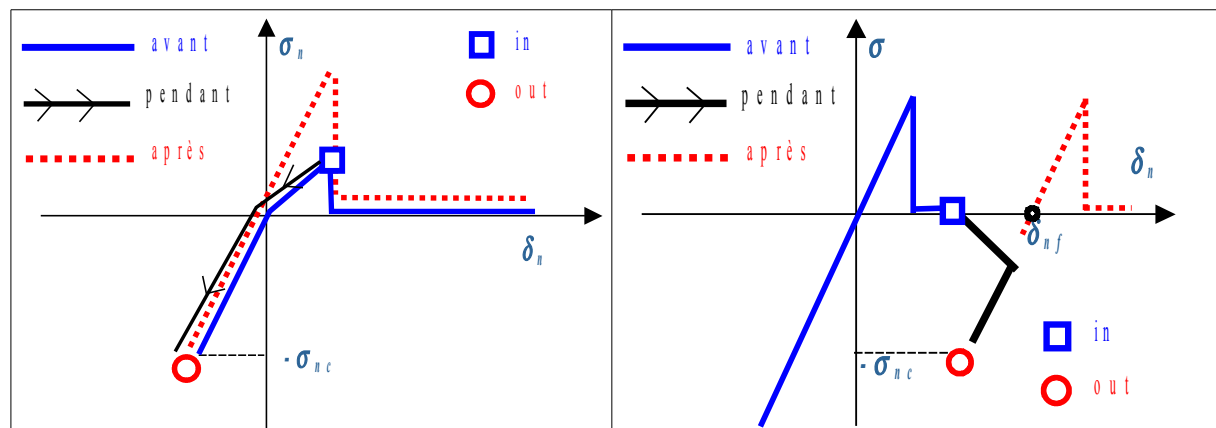


Figure 2.5-a: . L'évolution de la contrainte normale pendant le clavage : joint partiellement endommagé à gauche et complètement endommagé à droite

2.6 Variables internes

La loi `JOINT_MECA_RUPT` possède dix-huit variables internes. Du point de vue de la loi de comportement, seules la première et la dixième sont *stricto sensu* des variables internes. Les autres fournissent des indications sur l'état hydromécanique du joint à un instant donné.

$V1 = \kappa$: seuil en saut (plus grande norme atteinte).

$V2$: indicateur de dissipation = 0 si régime linéaire, = 1 si régime dissipatif.

Indicateurs mécaniques :

$V3$: indicateur d'endommagement normal = 0 sain, = 1 endommagé, = 2 cassé

$V4 \in [0,1]$: pourcentage d'endommagement normal (dans la zone adoucissante)

$V5$: indicateur d'endommagement tangentiel = 0 sain, = 1 endommagé, = 2 cassé

$V6 \in [0,1]$: pourcentage d'endommagement tangentiel

Valeur du saut dans le repère local :

$V7 = \delta_n$: saut normal, $V8 = \delta_{t1}$ saut tangentiel, $V9 = \delta_{t2}$ saut tangentiel (nul en 2D)

$V10 = \delta_{nf}$: épaisseur du joint clivé

$V11 = \sigma_n$: contrainte mécanique normale (sans pression de fluide)

Indicateurs hydrauliques :

Composantes du gradient de pression dans le repère global (uniquement pour `xxx_JOINT_HYME`) :

$V12 = \partial_x p$, $V13 = \partial_y p$, $V14 = \partial_z p$ trois composantes dans l'espace

Composantes du flux hydraulique dans le repère global (uniquement pour `xxx_JOINT_HYME`) :

$V15 = w_x$, $V16 = w_y$, $V17 = w_z$ trois composantes dans l'espace

$V18 = p$: pression de fluide imposée par l'utilisateur (`PRES_FLUIDE`) dans le cas des modélisations `xxx_JOINT` ou pression de fluide interpolée à partir de celle calculée (degré de liberté du problème) aux nœuds milieux des éléments de joint des modélisations : `xxx_JOINT_HYME`.

3 Formulation théorique de JOINT_MECA_FROT

La loi de frottement la plus simple possible est la loi de Coulomb, qui ne dépend que d'un seul paramètre de frottement $\mu \in [0, \infty]$. Elle réalise la condition de non-interpénétration de lèvres en contact (condition de Signorini) en établissant un lien local entre la contrainte tangentielle et normale dans la phase de glissement : $\|\vec{\sigma}_t\| = \mu \sigma_n$. Plusieurs régularisations de cette loi sont nécessaires afin de rendre possible son implémentation numérique. Premièrement la condition de Signorini doit être rendue dérivable, ce qui est aisé si l'on suppose que le comportement des surfaces en contact suit une loi élastique. De même pour la pente de changement de direction de glissement dans la comportement tangentielle. De plus pour la modélisation des barrages en béton on observe expérimentalement une résistance à la traction non négligeable entre les joints. Toutes ces considérations nous ramènent vers une loi de Mohr-Coulomb dont la représentation dans le plan de Mohr est donnée sur la Figure 3-a, elle décrit la phase de glissement de joints entre la fondation et le barrage ou entre les plots d'un barrage (de façon simplifiée) tout en prenant en compte les effets les plus pertinents.

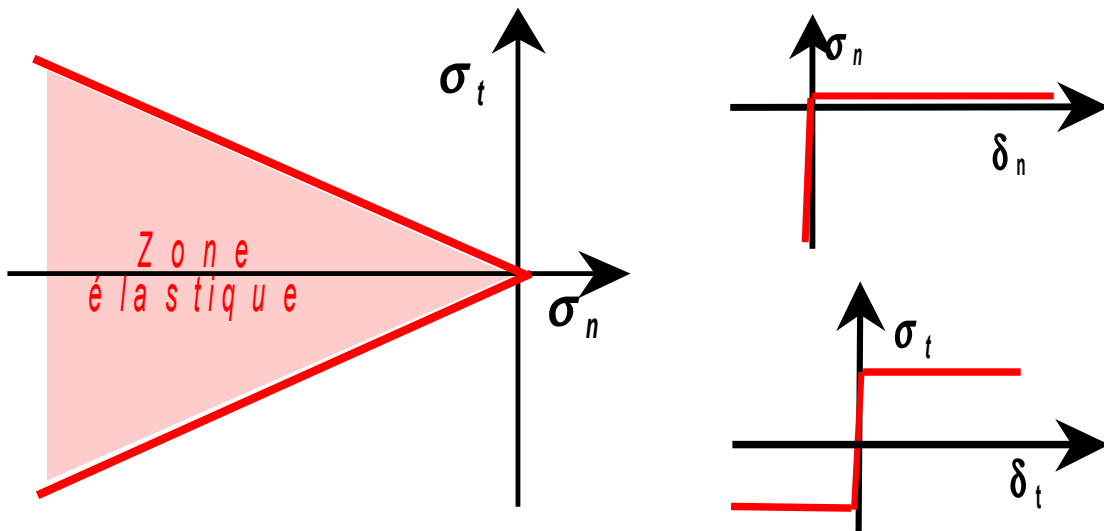


Figure 3-a : Loi de frottement de Coulomb en 2D

La loi JOINT_MECA_FROT est une variante élastoplastique de la loi de Mohr-Coulomb, elle dépend de quatre paramètres : la rigidité normale K_n , la rigidité tangentielle K_t , l'adhésion c (qui est liée à la résistance à la traction maximale $R_t = c/\mu$) et le coefficient de frottement du joint μ . Par ailleurs nous introduisons un paramètre d'écrouissage isotrope, qui permet de régulariser la pente tangentielle dans la phase de glissement, on le note K . Le modèle élastoplastique introduit ne porte que sur la partie tangente de la loi de comportement. Il n'y a pas de partie plastique du déplacement pour la partie normale : celle-ci est toujours élastique. Le saut de déplacement tangentielle est décomposé en une partie élastique $\vec{\delta}_t^{el}$ et une partie plastique $\vec{\delta}_t^{pl}$, on désigne par λ le saut de déplacement tangentielle cumulé. La loi d'écoulement est orthogonale au plan de coupe du cône de glissement $\sigma_n = \text{const}$ (cercle 2D pour un cône 3D). Ce qui donne, strictement parlant, une loi d'écoulement globale non-associée.

La formulation mécanique en vitesse d'une telle loi donne le jeu d'équations mathématiques suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\delta}_t = \vec{\delta}_t^{el} + \vec{\delta}_t^{pl} \\ \vec{\sigma}_t = K_t \vec{\delta}_t^{el} \equiv K_t (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl}) \\ \sigma_n = \min(K_n \delta_n, R_t) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\vec{\sigma}, \lambda) = \|\vec{\sigma}_t\| + \mu \sigma_n - c - K \lambda \leq 0 \\ f \cdot \dot{\lambda} = 0; \quad \dot{\lambda} \geq 0 \\ \dot{\delta}_t^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\vec{\sigma}_t}{\|\vec{\sigma}_t\|} \end{array} \right. \quad \text{éq 3-1}$$

Tant qu'on est dans la zone élastique $f(\vec{\sigma}, \lambda) < 0$ les relations entre les sauts d'ouverture de joint et les contraintes sont linéaires et le paramètre du saut tangentiel plastique n'évolue pas $\vec{\delta}_t^{pl} = \text{const}$. Dès qu'on touche les bords du cône de glissement définis par $f(\vec{\sigma}, \lambda) = 0$, l'évolution de saut tangentiel plastique est régi par la loi d'écoulement non-associée (éq 3-1). La régularisation de la fonction seuil d'écoulement avec le terme d'écrouissage $K \lambda > 0$ ⁸ est nécessaire afin de rendre la matrice tangente de la loi inversible et éviter donc le problème de solutions multiples dans le cas de chargement en forces imposées. La résistance à la traction du joint varie dans l'intervalle $(0, R_t)$, c'est une fonction de la contrainte tangentielle, elle est nulle pour une contrainte tangentielle supérieure au paramètre d'adhésion c et vaut le maximum si la contrainte tangentielle est nulle (voir Fig. 3.1-a). Dans la version actuelle de la loi, la résistance à la traction maximale n'est pas affectée par le phénomène de glissement, elle n'évolue pas à cause du terme d'écrouissage (Figure 3-b). On suppose aussi qu'une fois atteinte la valeur de la résistance à la traction maximale, la contrainte normale n'évolue plus. Cette dernière hypothèse reste valable tant que le nombre de joints rompus par le cisaillement plastique et par la suite sollicités en traction est négligeable. Afin de pouvoir prendre en compte ce phénomène plus rigoureusement, il est nécessaire d'introduire une régularisation de rupture-frottement dans la phase de glissement en traction, ce qui représente une difficulté théorique assez importante [CR10357].

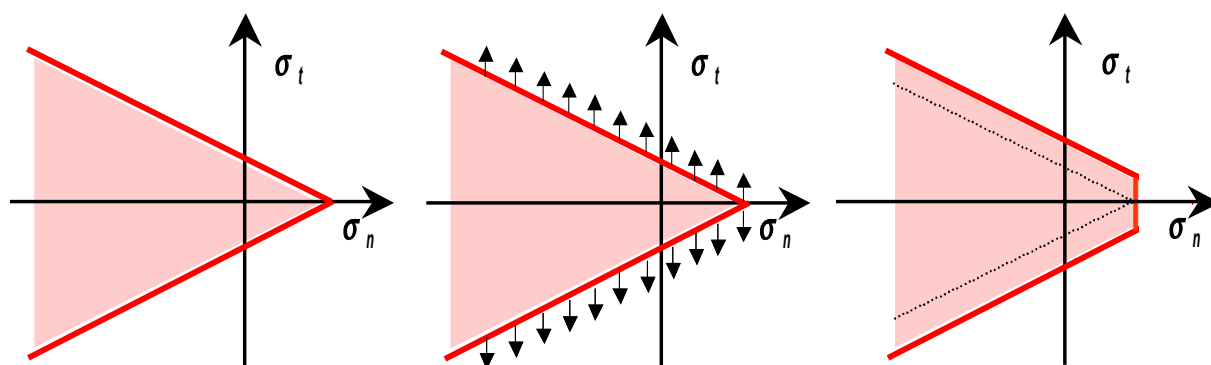


Figure 3-b: Evolution du cône de glissement due à l'écrouissage

3.1 Discrétisation implicite de la loi de frottement

La version élastoplastique de la loi de frottement est formulée en vitesse, ce qui facilite sa discrétisation numérique. La version incrémentale de la loi reste strictement équivalente à la version continue à condition d'avoir des pas de changement infinitésimaux. Afin de limiter le nombre de pas de chargement, nous adaptons la version continue de la loi à des incréments finis, de façon implicite, c.-à-d. que les conditions de glissement sont écrites dans l'état d'équilibre final. L'algorithme utilisé est celui du retour radial avec prédiction élastique. Par convention nous notons par un signe «-» les variables à l'état d'équilibre précédent, l'état courant est noté par des variables habituelles sans signe supplémentaire (voir [R5.03.02]).

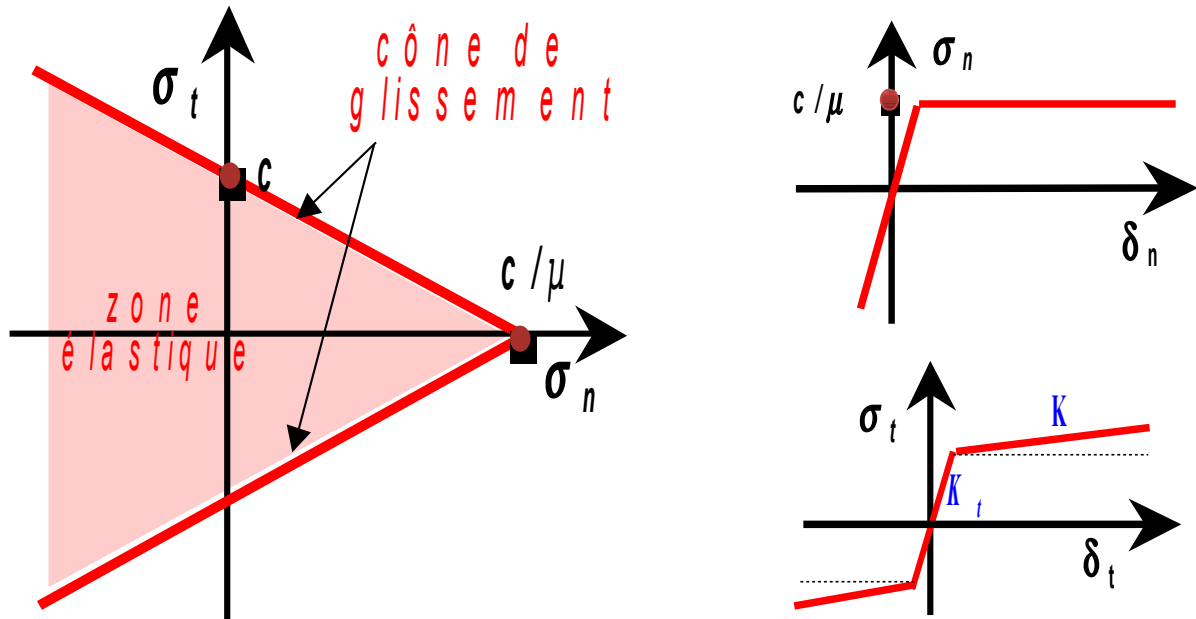


Figure 3.1-a: Loi de frottement de Coulomb

Les équations continues (éq 3-1) de la loi s'écrivent d'une façon discrétisée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \lambda^- + \Delta \lambda \\ \vec{\delta}_t^{pl} = \vec{\delta}_t^{pl-} + \Delta \vec{\delta}_t^{pl} \\ \vec{\sigma}_t = K_t (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl}) \\ \sigma_n = \min(K_n \delta_n, R_t) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\vec{\sigma}, \lambda) = \|\vec{\sigma}_t\| + \mu \sigma_n - c - K \lambda \leq 0 \\ f(\vec{\sigma}, \lambda) \cdot \Delta \lambda = 0; \quad \Delta \lambda \geq 0 \\ \Delta \vec{\delta}_t^{pl} = \Delta \lambda \frac{\vec{\sigma}_t}{\|\vec{\sigma}_t\|} \end{array} \right. \quad \text{éq 3.1-1}$$

Dans un algorithme de Newton les sauts de déplacement $\vec{\delta} = (\delta_n, \vec{\delta}_t)$ ainsi que les variables internes à l'instant précédent $\vec{\delta}_t^{pl-}, \lambda^-$ étant connus, pour résoudre la loi il suffit d'obtenir les valeurs de contraintes $\vec{\sigma} = (\sigma_n, \vec{\sigma}_t)$ et de toutes les variables internes à l'instant courant (dans notre cas $\vec{\delta}_t^{pl}, \lambda$). La loi l'équation d'évolution pour la composante normale est complètement découplée du mouvement tangentiel, on peut donc la résoudre immédiatement : $\sigma_n = \min(K_n \delta_n, R_t)$. Nous obtenons donc un jeu de cinq d'équations et une inégalité, pour obtenir cinq inconnues scalaires :

$$\vec{\sigma}_t = K_t (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} - \Delta \vec{\delta}_t^{pl}) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\vec{\sigma}, \lambda) = \|\vec{\sigma}_t\| + \mu \sigma_n - c - K \lambda^- - K \Delta \lambda \leq 0 \\ f(\vec{\sigma}, \lambda) \cdot \Delta \lambda = 0; \quad \Delta \lambda \geq 0 \\ \Delta \vec{\delta}_t^{pl} = \Delta \lambda \frac{\vec{\sigma}_t}{\|\vec{\sigma}_t\|} \end{array} \right. \quad \text{éq 3.1-2}$$

Pour simplifier ce problème mathématique regardons plus en détail la condition de Karush-Kuhn-Tucker $f(\vec{\sigma}, \lambda) \cdot \Delta \lambda = 0$. On a deux possibilités: soit on glisse $\Delta \lambda > 0$, soit on est dans le domaine élastique $\Delta \lambda = 0$. Si l'on est dans le domaine élastique, alors $\Delta \lambda = 0 \Rightarrow \Delta \vec{\delta}_t^{pl} = 0$ et on obtient la solution élastique ssi :

$$f_{el}(\sigma_n, \vec{\sigma}_t, \lambda^-) = K_t \|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\| + \mu \sigma_n - c - K \lambda^- \leq 0 \quad \text{éq 3.1-3}$$

Dans la pratique si éq 3.1-3 est satisfaite alors la prédiction élastique est la solution du problème :

$$\text{si } f_{el}(\sigma_n, \vec{\sigma}_t, \lambda) \equiv K_t \|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\| + \mu \sigma_n - c - K \lambda \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \lambda^- \\ \vec{\delta}_t^{pl} = \vec{\delta}_t^{pl-} \\ \vec{\sigma}_t = K_t (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}) \\ \sigma_n = \min(K_n \delta_n, R_t) \end{cases} \quad \text{éq 3.1-4}$$

Si la condition éq 3.1-3 n'est pas satisfaite, alors $\Delta \lambda > 0$ et on est dans la phase de glissement et on obtient un système de trois équations non-linéaires avec trois inconnues $\Delta \vec{\delta}_t^{pl}, \Delta \lambda$:

$$\begin{cases} f(\vec{\sigma}, \lambda) \equiv \|K_t (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} - \Delta \vec{\delta}_t^{pl})\| + \mu \sigma_n - c - K \lambda^- - K \Delta \lambda = 0 \\ \Delta \vec{\delta}_t^{pl} = \Delta \lambda \frac{(\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} - \Delta \vec{\delta}_t^{pl})}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} - \Delta \vec{\delta}_t^{pl}\|} \end{cases} \quad \text{éq 3.1-5}$$

Cette équation peut-être résolue en éliminant $\Delta \vec{\delta}_t^{pl}$, suivant la procédure courante pour les calculs en plasticité :

$$\Delta \vec{\delta}_t^{pl} \{ \|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} - \Delta \vec{\delta}_t^{pl}\| + \Delta \lambda \} = \Delta \lambda (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}) \quad \text{éq 3.1-6}$$

En prenant la norme de cette dernière équation et en notant que $\|\Delta \vec{\delta}_t^{pl}\| = \Delta \lambda$, on obtient la norme du vecteur de contrainte tangentielle actualisée, qu'on insère dans l'éq 3.1-5 afin d'obtenir une équation scalaire pour $\Delta \lambda$:

$$\begin{aligned} \|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} - \Delta \vec{\delta}_t^{pl}\| &= \|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\| - \Delta \lambda \\ \|K_t (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-})\| - K_t \Delta \lambda + \mu \sigma_n - c - K \lambda^- - K \Delta \lambda &= 0 \end{aligned} \quad \text{éq 3.1-7}$$

Une fois $\Delta \lambda$ est connu il suffit de remarquer la colinéarité des vecteurs suivant $\Delta \vec{\delta}_t^{pl} \uparrow \vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} - \Delta \vec{\delta}_t^{pl}$, d'où $\Delta \vec{\delta}_t^{pl} \uparrow \vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}$ (voir éq 3.1-6). Ce qui permet de réécrire la dernière équation de 3.1-5 sous une forme simplifiée, qui donne la valeurs de deuxième inconnue $\Delta \vec{\delta}_t^{pl}$:

$$\Delta \vec{\delta}_t^{pl} = \Delta \lambda \frac{\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} - \Delta \vec{\delta}_t^{pl}}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} - \Delta \vec{\delta}_t^{pl}\|} = \Delta \lambda \frac{\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\|} \quad \text{éq 3.1-8}$$

Cette solution correspond en fait aux glissements dans la direction de contrainte tangentielle en prédiction élastique. Ceci implique que le changement de la direction de glissement se fera essentiellement dans la zone élastique à condition que les pas de chargement soient petits. La solution finale en cas de glissement, obtenue à partir de l'éq 3.1-2, s'écrit comme :

$$\begin{cases} \sigma_n &= \min(K_n \delta_n, R_t) \\ f_{el}(\sigma_n, \vec{\sigma}_t, \lambda) &= K_t \|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\| + \mu \sigma_n - c - K \lambda^- \\ \lambda &= \lambda^- + \frac{f_{el}(\sigma_n, \vec{\sigma}_t, \lambda^-)}{K_t + K} \\ \vec{\delta}_t^{pl} &= \vec{\delta}_t^{pl-} + \frac{f_{el}(\sigma_n, \vec{\sigma}_t, \lambda^-)}{K_t + K} \frac{\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\|} \\ \vec{\sigma}_t &= K_t (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl}) \end{cases} \quad \text{éq 3.1-9}$$

En résumé, à partir de la prédiction élastique on vérifie d'abord l'inégalité éq 3.1-3, si elle est satisfaite, alors la solution est donnée par éq 3.1-4, sinon solution est donnée par éq 3.1-9.

3.2 Matrice tangente

Pour la loi `JOINT_MECA_FROT` la matrice tangente est calculée en implicite, ce qui renforce la robustesse des calculs⁹. Comme il est démontré dans la réf. [Ngu77] un tel schéma numérique est inconditionnellement stable pour les lois à écrouissage positif $K \geq 0$. Dans le cas du régime élastique (l'inégalité éq 3.1-3 est satisfaite), la matrice tangente prend une forme simple, elle est diagonale :

$$\begin{pmatrix} K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_t & 0 \\ 0 & 0 & K_t \end{pmatrix}$$

Dans le cas de glissement (inégalité éq 3.1-3 n'est pas satisfaite) la matrice tangente est obtenue par dérivation des éq 3.1-9. Les dérivées par rapport à l'ouverture normale dépendent de l'état du joint. Pour le joint fermé cela donne :

$$\text{si } \delta_n < \frac{c}{\mu K_n} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_n}{\partial \delta_n} = K_n \\ \frac{\partial \vec{\sigma}_t}{\partial \delta_n} = -\mu \frac{\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\|} \cdot \frac{K_n K_t}{K_t + K} \end{cases} \quad \text{éq 3.2-1}$$

Pour le joint ouvert toutes les dérivées correspondantes sont nulles :

$$\text{si } \delta_n \geq \frac{c}{\mu K_n} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_n}{\partial \delta_n} = 0 \\ \frac{\partial \vec{\sigma}_t}{\partial \delta_n} = 0 \end{cases} \quad \text{éq 3.2-2}$$

Les dérivées par rapport à l'ouverture tangentielle ne dépendent pas de l'ouverture de joint :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_n}{\partial \vec{\delta}_t} = 0 \\ \frac{\partial \vec{\sigma}_t}{\partial \vec{\delta}_t} = \frac{K K_t}{K_t + K} \mathbf{Id} + \frac{-\mu \sigma_n + c + K \lambda^*}{K_t + K} \cdot \frac{K_t}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\|} \cdot \left(\mathbf{Id} - \frac{(\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}) \otimes (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-})}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\|^2} \right) \end{cases} \quad \text{éq 3.2-3}$$

Remarque : La matrice tangente dans la phase plastique (en glissement) est non-symétrique, elle est dégénérée si l'écrouissage est nul ($K=0$). On peut exhiber un vecteur propre associé à la valeur propre nulle :

$$\begin{pmatrix} K_n & 0 \\ \mu K_n \frac{\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\|} & \frac{-\mu \sigma_n + c}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\|} \left(\mathbf{Id} - \frac{(\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}) \otimes (\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-})}{\|\vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-}\|^2} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\delta}_t - \vec{\delta}_t^{pl-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est pour cette raison que le paramètre d'écrouissage isotrope est introduit.

3.3 Variables internes

La loi `JOINT_MECA_FROT` possède dix-huit variables internes. Du point de vue de la loi de comportement, seules la première, la troisième et la quatrième sont *stricto sensu* des variables

⁹ Dans les tentatives précédentes [Kol00],[CR09039] d'introduction en version explicite [Div97], il est apparu que ces modélisations s'avèrent généralement peu performantes [Div97]

internes. Les autres fournissent des indications sur l'état de hydromécanique du joint à un instant donné.

Variables internes :

$V1 = \lambda$: paramètre croissant indiquant le déplacement tangentiel plastique cumulé (sans orientation).

$V2$: indicateur de glissement = 0 si régime linéaire, = 1 si régime est plastique

$V3, V4 = \vec{\delta}^{pl}$: vecteur de déplacement tangentiel plastique par rapport au point de départ (indique la position d'équilibre actuelle). $V4$ est mis à zéro en 2D

Indicateurs mécaniques :

$V5$: indicateur d'ouverture complète = 0 fermé ($\sigma_n < c/\mu$), = 1 ouvert ($\sigma_n = c/\mu$)

$V6 = \|\vec{\sigma}_\tau\|$: norme de la contrainte tangente

Valeur du saut dans le repère local :

$V7 = \delta_n$: saut normal, $V8 = \delta_{t1}$ saut tangentiel, $V9 = \delta_{t2}$ saut tangentiel (nul en 2D)

Valeur du saut dans le repère local :

$V10$: variable non-utilisée

$V11 = \sigma_n$: contrainte mécanique normale (sans pression de fluide)

Indicateurs hydrauliques :

Composantes du gradient de pression dans le repère global (uniquement pour `xxx_JOINT_HYME`) :

$V12 = \partial_x p$, $V13 = \partial_y p$, $V14 = \partial_z p$ trois composantes dans l'espace

Composantes du flux hydraulique dans le repère global (uniquement pour `xxx_JOINT_HYME`) :

$V15 = w_x$, $V16 = w_y$, $V17 = w_z$ trois composantes dans l'espace

$V18 = p$: pression de fluide imposée par l'utilisateur (`PRES_FLUIDE`) dans le cas des modélisations `xxx_JOINT` ou pression de fluide interpolée à partir de celle calculée (degré de liberté du problème) aux nœuds milieux des éléments de joint des modélisations : `xxx_JOINT_HYME`.

4 Prise en compte de la pression hydrostatique sans couplage

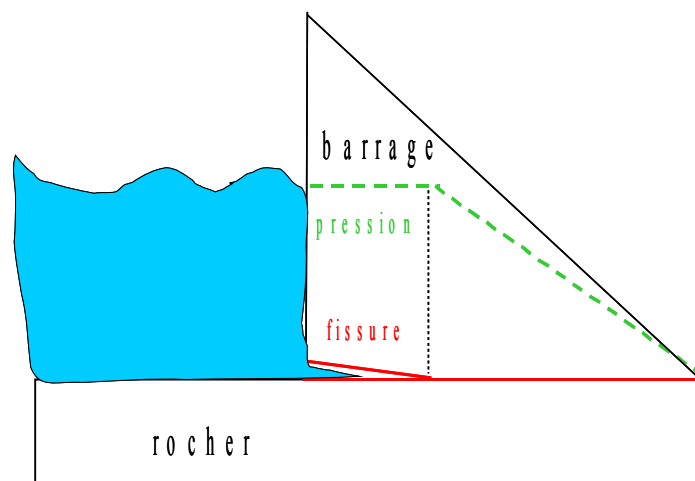


Figure 4-a: Illustration d'un calcul possible de stabilité d'un barrage avec le profil de pression imposé

Bien que la modélisation `xxx_JOINT` ne couple pas la mécanique et l'hydraulique, on peut toutefois introduire explicitement l'influence d'un fluide sur la mécanique via une pression imposée. La présence du fluide dans le joint modifie la contrainte mécanique normale $\sigma_n \rightarrow \sigma_n - p$. En mettant une pression importante on est capable de faire rompre le joint par un simple effet hydraulique. Pour prendre en

compte les effets hydrostatiques la loi mécanique est décalée vers le bas (Figure 1.3-a) en fonction de la valeur de pression p en chaque point d'intégration.

Au niveau d'implémentation numérique sa réalisation est aisée en cas d'écriture complète des lois mécaniques sous forme explicite non incrémentale en fonction des déplacements et des variables internes (il faut exclure la dépendance des contraintes à l'instant plus en fonction de contraintes à l'instant précédent). Dans ce cas la seule modification de courbe normale est suffisante pour introduire le couplage : $\sigma_n = \sigma_n^{meca}(\delta_n, \delta_t) - p$

En se limitant à ce type de phénomène physique, il est possible de faire des études où le profil de pression qui est imposé par utilisateur, par exemple une étude de stabilité de barrage sous hypothèse conservative (Figure 4-a), c-a-d en présence de sous-pression, dont la forme est très pénalisante. Afin de faire un calcul avec une pression imposée l'utilisateur doit définir une fonction, mot clef `PRES_FLUIDE`, qui dépend à la fois de l'espace (profil de pression non-homogène) et du temps (évolution du profil de pression).

5 Formulation théorique du couplage hydromécanique

Les lois introduites peuvent s'appuyer sur une modélisation hydromécanique couplée, noté `XXX_JOINT_HYME`. Dans cette partie on parlera de la partie hydraulique de la loi, ainsi que du couplage lui-même ; tous les détails sur la partie mécanique de la loi ont été décrits précédemment.

5.1 Modélisation hydraulique

Le fluide s'écoule des zones de haute pression vers celles de basse pression. Une manière théorique de prendre en compte l'écoulement stationnaire est d'associer à l'état hydraulique donné une énergie¹⁰ $H(p(x))$ dépendant de la distribution de pression. La première hypothèse consiste à supposer que l'énergie dépend explicitement de la variation de pression et pas de la pression elle-même $H = H(\nabla p(x))$. En prenant la forme convexe la plus simple possible de cette dépendance en gradient, on obtient ainsi l'énergie : $H = C(\vec{\nabla} p)^2 / 2$ où C est un paramètre de la loi, qui ne dépend pas de la pression.

En calculant les efforts généralisés correspondant au champ de gradient de pression on obtient la première loi de Fick. Le flux hydraulique est proportionnel au gradient de pression :

$$\vec{w} = \frac{\partial H}{\partial \vec{\nabla} p} = C \vec{\nabla} p \quad \text{éq 5.1-1}$$

Dans ce formalisme énergétique on cherche le champ de pression à l'équilibre par minimisation de l'énergie hydraulique $\min_{p(\vec{x})} \int_{\Omega} H(\vec{\nabla} p(\vec{x})) d\Omega$. Ce qui donne une équation d'équilibre ressemblant à celle de la mécanique : $\text{div } \vec{w} = 0$. Dans le cadre de ce modèle la résolution d'équation d'équilibre hydraulique est équivalente à une résolution de problème mécanique en quasi-statique, où le flux hydraulique est équivalente aux contraintes $\vec{w} \Leftrightarrow \sigma$, le champ de pression correspond au champ de déplacement $p(\vec{x}) \Leftrightarrow u(\vec{x})$ et enfin le gradient de pression s'apparente au champ de déformation $\vec{\nabla} p \Leftrightarrow \varepsilon$.

5.2 Influence de l'hydraulique sur la mécanique : hydro => méca

La présence du fluide dans le joint rajoute une contrainte hydrostatique et ce fait modifie la contrainte mécanique normale $\sigma_n \rightarrow \sigma_n - p$. En mettant une pression importante on est capable de faire rompre le joint par un simple effet hydraulique. On peut décaler la loi mécanique vers le bas en fonction de la valeur de pression p en chaque point pour prendre en compte les effets de la pression, voir Figure 1.3-a.

¹⁰ Nous utilisons une notation simplifiée, le terme exact serait : taux de densité de l'énergie.

5.3 Influence de la mécanique sur l'hydraulique : méca => hydro

Dans le cas d'écoulement de fluide à travers une fissure le flux hydraulique doit augmenter avec l'ouverture (δ_n) de cette dernière ($\vec{w} \sim O(\delta_n) \vec{\nabla} p$). Dans la loi de Poiseuille, qui a été trouvée empiriquement pour l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux et incompressible, la dépendance de flux en ouverture est cubique (la loi est souvent appelée la loi cubique). La partie hydraulique de la loi utilise ce type de couplage. Les équations à résoudre s'écrivent de la manière suivante

$\text{div } \vec{w} = 0$; $\vec{w} = \frac{\rho}{12\mu} \delta_n^3 \vec{\nabla} p$. Dans le cas d'écoulement de fluide à travers des jonctions d'un barrage,

on constate des flux non-négligeables même pour les joints fermés. Il est nécessaire alors de définir une épaisseur minimale ϵ_{min} , mot clef OUV_MIN, en dessous de laquelle le flux atteint sa valeur minimale. Nous régularisons les équations d'écoulement de la manière suivante :

$$\vec{w} = \frac{\rho}{12\mu} \max(\epsilon_{min}, \epsilon_{min} + \delta_n)^3 \vec{\nabla} p \quad \text{éq 5.3-1}$$

A gradient de pression non-nul le flux n'atteint jamais la valeur nul, $\min \vec{w} \sim \epsilon_{min}^3 \vec{\nabla} p$, ce qui correspond à l'écoulement à travers des parois perméables du joint fermé.

5.4 Couplage hydromécanique

Le couplage hydromécanique fait intervenir les deux mécanismes décrits précédemment : d'un coté le fluide agit par pression sur les lèvres de joint, de l'autre coté plus la fissure est ouverte plus l'écoulement de fluide est aisé. En absence des forces extérieures le calcul hydromécanique se présente schématiquement sous cette forme.

$$\begin{cases} \vec{w} = \vec{w}(\vec{\delta}(u), \vec{\nabla} p); & \text{div } \vec{w} = 0 \\ \vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{\delta}(u), p); & \text{div } \vec{\sigma} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{Y} = \vec{Y}(\vec{X}); \text{div } \vec{Y} = 0$$

La résolution des équations d'équilibre hydromécanique est équivalente à une résolution de problème mécanique en quasi-statique, où on introduit les contraintes généralisées $\vec{Y} = (\vec{w}, \vec{\sigma})$, et le champ vectoriel des inconnues $\vec{X} = (p, u)$.

5.5 Matrice tangente

Vu que les efforts généralisés ne dépendent de u qu'à travers de $\vec{\delta}(u)$, pour calculer la matrice tangente de couplage hydromécanique, il est nécessaire de ne connaître que les quatre termes suivants :

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \vec{\delta}}, \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial p}, \frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{\nabla} p} \text{ et } \frac{\partial \vec{w}}{\partial \delta_n}.$$

Le premier terme est le même qu'en mécanique pure, il est donné dans l'éq 2.4-1. Le deuxième terme est trivial, car la seule composante non-nul est égal à $\partial \sigma_n / \partial p = -1$. Le terme hydraulique diagonal prend une forme simple car le flux hydraulique ne dépend que du gradient de pression :

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{\nabla} p} = \frac{\rho}{12\mu} \max(\epsilon_{min}, \epsilon_{min} + \delta_n)^3.$$

Dans le dernier terme seule la dérivée par rapport à l'ouverture normale n'est pas nulle :

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \delta_n} = \frac{\rho}{4\mu} (\epsilon_{min} + \delta_n)^2 \vec{\nabla} p,$$

elle est égale à zéro pour une fissure fermée $\delta_n < 0$.

La matrice tangente ainsi formulée n'est pas symétrique.

6 Fonctionnalités et validation

Deux lois de comportement `JOINT_MECA_RUPT` et `JOINT_MECA_FROT` sont introduites. Elles sont validées sur les cas tests élémentaires **ssnp162** et le pseudo barrage-poids **ssnp142**. La procédure du clavage est validée sur la simulation d'injection du coulis entre deux blocs rectangulaires encastrés au sol **ssnp143**.

Validation en mécanique pure, modélisations type <code>XXX_JOINT</code>	
Loi : <code>JOINT_MECA_RUPT</code>	Loi : <code>JOINT_MECA_FROT</code>
Tests : ssnp162a/b/c; ssnp142a/b ; Clavage :ssnp143a/b	Tests : ssnp162d/e/f; ssnp142c/d

Validation hydromécanique couplée, modélisations type <code>XXX_JOINT_HYME</code>	
Loi : <code>JOINT_MECA_RUPT</code>	Loi : <code>JOINT_MECA_FROT</code>
Tests : ssnp162g/h/i; ssnp142e/f	Tests : ssnp162j/k/l ; ssnp142g/h

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
04/29/11	K.KAZYMYRENKO, J.LAVERNE EDF-R&D/AMA	Texte initial
12/18/12	K.KAZYMYRENKO, J.LAVERNE EDF-R&D/AMA	Couplage HM pour la loi de frottement
11/01/13	K.KAZYMYRENKO, J.LAVERNE EDF-R&D/AMA	Passage à la loi <code>JOINT_MECA_RUPT</code> tangentielle incrémentale

8 Bibliographie

- 1 Bar62: BARENBLATT G. I.; The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, Adv. Appl. Mech ., 55-129, 1962
- 2 CR09039: K.Kazymyrenko, J. Laverne; Avancement de la modélisation mécanique des joints-plots, CR-AMA.09.039, 2009
- 3 CR10357: C.Kazymyrenko, J.Laverne; Etat des lieux et perspectives pour la modélisation des joints dans les barrages, CR-AMA.10.357, 2010
- 4 Div97: P. Divoux, Modélisation du comportement hydromécanique des discontinuités dans les structures et les fondations rocheuses : application aux barrages béton , 1997
- 5 Kol00: P. Kolmayer; Modélisation du comportement hydromécanique des joints dans les barrages en béton, IH/CODHY/GCED/00001/AO,
- 6 Lav04: LAVERNE J., Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques, 2004
- 7 Ngu77: Nguen Quoc Sun; ,International Journal for numerical methods in engineering, 817-832, 1977
- 8 R5.03.02: ; Intégration des relations de comportement élasto-plastique de Von Mises, Manuel de Référence du Code_Aster,