

Loi de comportement LABORD_1D en uniaxial pour le béton

Résumé :

Cette note présente l'essentiel du modèle écrit par Christian LA BORDERIE (CLB) pour la simulation du comportement du matériau béton sous chargement cyclique. Bien que ce modèle élastique endommageable avec déformations anélastiques soit conçu en 3D seule son écriture uniaxiale est présentée.

On donne quelques indications sur le paramétrage de la loi.

L'utilisation de ce modèle concerne la modélisation de poutres et poteaux en béton armé, en utilisant des éléments poutres multifibres (PMF) où le comportement de chaque fibre est décrit par une loi 1D : soit du béton, soit de l'acier d'armature.

Ce modèle est adapté aussi bien pour des analyses statiques que dynamiques (par exemple des calculs sismiques).

Table des matières

1 Généralités.....	3
2 Le modèle de comportement uniaxial.....	3
2.1 Formulation uniaxiale.....	3
2.2 Remarques sur les paramètres de la loi.....	5
2.2.1 Trajet de charge uniaxiale monotone en traction.....	5
2.2.2 Trajet de charge uniaxiale monotone en compression.....	6
2.2.3 Résumé pour l'identification des paramètres.....	8
3 Résolution numérique.....	8
3.1 Données et inconnues.....	8
3.2 Résolution.....	9
3.2.1 Cas 1 : traction.....	9
3.2.2 Cas 2 : faible compression.....	10
3.2.3 Cas 3 : compression au-delà de la refermeture des fissures.....	10
3.2.4 Module tangent.....	11
3.3 Variables internes produites.....	11
4 Implantation dans Code_Aster.....	12
5 Bibliographie.....	12
6 Description des versions du document.....	12

1 Généralités

Cette loi de comportement du béton est basée sur la mécanique de l'endommagement ([bib2] et [bib3]). Ce modèle développé au L.M.T. Cachan par C.Laborderie [bib1], est adapté à la description du comportement généré par la création de microfissures (abaissement des raideurs) et le fonctionnement lié, au cours de cycles, à leur refermeture (unilatéralité).

Les principales caractéristiques pour ce modèle sont les suivantes :

- utilisation de deux variables scalaires d'endommagement (l'une en traction, D_1 , et l'autre en compression, D_2),
- prise en compte des déformations anélastiques (ou permanentes) ε_{an} , liées à l'endommagement,
- gestion de l'ouverture des fissures et de leur fermeture en introduisant une restauration progressive de la raideur à la fermeture (fonction $F(\sigma)$).

Ce modèle, conçu pour réaliser des simulations non-linéaires de structures en béton ou béton armé, est particulièrement adapté aux analyses sismiques grâce à ses capacités de dégradation des modules d'élasticité et de déformations irréversibles qui lui confèrent des aptitudes à dissiper de l'énergie au cours des cycles de chargement. Par ailleurs, les variations de la rigidité du matériau permettent une bonne appréciation des fréquences propres de la structure aussi bien en régime élastique que non-linéaire.

2 Le modèle de comportement uniaxial

2.1 Formulation uniaxiale

Élaboré dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, ce modèle s'appuie sur la formulation de l'enthalpie libre de Gibbs à partir de laquelle sont déduites les lois constitutives. La loi de comportement qui en résulte est schématiquement décrite dans la figure ci-après, elle utilise les notations suivantes :

σ^+ et σ^-	les contraintes uniaxiales, respectivement « positive » et « négative » : $\sigma^+ = \text{Max}(\sigma, 0)$, $\sigma^- = \text{Min}(\sigma, 0)$,
D_1, D_2	les variables d'endommagement, respectivement de traction et de compression, pilotées par les taux de restitution d'énergie,
E_0	module de Young initial,
A_1, A_2	des constantes positives : paramètres caractéristiques du matériau, de dimension inverse de contraintes,
B_1, B_2	des constantes sans dimension : paramètres caractéristiques du matériau ($B_1 > 1$, $B_2 > 1$),
β_1, β_2	des constantes : paramètres caractéristiques du matériau ($\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$),
Y_{01}, Y_{02}	les seuils initiaux d'endommagement en contraintes de traction et de compression (positifs),
$\sigma_f > 0$	la contrainte de refermeture totale des fissures en compression,
$F(\sigma)$	la fonction qui permet de gérer les effets de l'ouverture et de refermeture des fissures.

Ces paramètres doivent être identifiés à partir des caractéristiques matériau du béton (par exemple seuils en traction σ_{ft} , en compression σ_{fc} ...): voir le [§ 2.2]. Pour un béton ordinaire, on adopte $\beta_1 = 1 \text{ MPa}$, $\beta_2 = -40 \text{ MPa}$, $\sigma_f = 3 \text{ MPa}$, selon [bib1]. Le paramètre β_2 doit être choisi inférieur à la limite de résistance en compression du béton, tel que $\beta_2 < -\sigma_{fc}$: voir [§ 2.2].

Dans sa formulation générale, cette loi est tridimensionnelle mais son utilisation dans les éléments de poutre multifibres est classiquement unidimensionnelle dans les couches qui la composent (hypothèse de Navier-Bernoulli), cf. [bib5]. L'écriture uniaxiale du modèle est la suivante, cf. [bib1] :

- La densité d'énergie complémentaire (ou enthalpie libre) :

$$F^*(\sigma, D_1, D_2; z_1, z_2) = \frac{(\sigma^+)^2}{2E_0(1-D_1)} + \frac{(\sigma^-)^2}{2E_0(1-D_2)} + \frac{\beta_1 D_1 \cdot f(\sigma)}{E_0(1-D_1)} + \frac{\beta_2 D_2 \cdot \sigma}{E_0(1-D_2)} + G(z_1, z_2) \quad \text{éq 2.1-1}$$

$G(z_1, z_2)$ désigne une fonction d'écroissage des seuils d'endommagement. Cette densité d'énergie permet de coupler les évolutions en traction et en compression aux cours des cycles.

- Relation uniaxiale contrainte-déformation :

$$\varepsilon = \frac{\partial F^*}{\partial \sigma} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\beta_1 D_1 \cdot F(\sigma)}{E_0(1-D_1)} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \quad \text{éq 2.1-2}$$

Les deux derniers termes constituent la déformation anélastique du matériau. En pratique, on utilisera plutôt la relation inverse, par exemple en compression :

$$\sigma^- = E_0(1-D_2) \cdot \varepsilon - \beta_2 D_2 \quad \text{éq 2.1-3}$$

- Fonction de refermeture de fissure :

$$\begin{cases} \text{si } \sigma \geq 0 & F(\sigma) = 1 \\ \text{si } 0 \geq \sigma \geq -\sigma_f & F(\sigma) = 1 + \sigma / \sigma_f \\ \text{si } \sigma \leq -\sigma_f & F(\sigma) = 0 \end{cases}$$

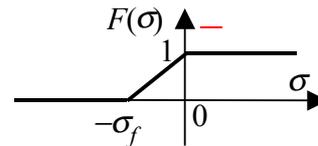


Figure 2.1-a. Fonction F .

f est la primitive de la fonction F c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \text{si } \sigma \geq 0 & f(\sigma) = \sigma \\ \text{si } 0 \geq \sigma \geq -\sigma_f & f(\sigma) = \sigma \left(1 + \sigma / (2\sigma_f) \right) \\ \text{si } \sigma \leq -\sigma_f & f(\sigma) = -\sigma_f / 2 \end{cases}$$

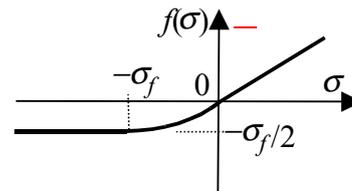


Figure 2.1-b. Fonction f .

- Les taux de restitution d'énergie, variables associées aux variables internes D_1 et D_2 , et classiquement obtenus par dérivation de l'enthalpie libre de Gibbs par rapport aux variables d'endommagement, s'écrivent :

$$Y_i = \frac{\partial F^*}{\partial D_i} \Rightarrow \begin{cases} Y_1 = \frac{(\sigma^+)^2}{2E_0(1-D_1)^2} + \frac{\beta_1 \cdot f(\sigma)}{E_0(1-D_1)^2} \\ Y_2 = \frac{(\sigma^-)^2}{2E_0(1-D_2)^2} + \frac{\beta_2 \cdot \sigma}{E_0(1-D_2)^2} \end{cases} \quad \text{éq 2.1-4}$$

En pratique, on utilisera plutôt la relation équivalente suivante, par exemple en compression :

$$Y_2 = \frac{1}{2 E_0} \left((E_0 \cdot \varepsilon + \beta_2)^2 - \frac{\beta_2^2}{(1 - D_2)^2} \right) \quad \text{éq 2.1-5}$$

- Lois d'évolution des variables d'endommagement : les taux de restitution Y_1 et Y_2 sont les variables pilotes de l'endommagement. On doit noter que Y_1 et Y_2 ne sont pas toujours positifs. Si un d'entre eux est négatif $Y_i < 0$, l'endommagement correspondant n'évolue pas : $\dot{D}_i = 0$, cf. [bib1].

Ainsi, les seuils initiaux sont :

$Y_1 - Y_{01} = 0$ et $Y_2 - Y_{02} = 0$ (Y_{01} et Y_{02} sont des paramètres issus de données expérimentales, voir ci-après)

Et les évolutions au-delà de ces seuils, si $Y_i > Y_{0i}$, sont intégrées directement selon [bib1], sans passer par la résolution d'équations différentielles :

$$D_1 = 1 - \frac{1}{1 + [A_1(Y_1 - Y_{01})]^{B_1}} \quad \text{si } \dot{Y}_1 > 0$$

$$D_2 = 1 - \frac{1}{1 + [A_2(Y_2 - Y_{02})]^{B_2}} \quad \text{si } \dot{Y}_2 > 0$$

éq 2.1-6

En pratique, on utilisera plutôt la relation inverse, par exemple en compression :

$$Y_2 = Y_{02} + \frac{1}{A_2} \left(\frac{D_2}{1 - D_2} \right)^{1/B_2} \quad \text{éq 2.1-7}$$

qui est une fonction croissante de D_2 . Les variables d'endommagement D_1 et D_2 vérifient : $0 \leq D_1 \leq 1$, $0 \leq D_2 \leq 1$.

2.2 Remarques sur les paramètres de la loi

La loi de comportement uniaxial de La Borderie possède un paramètre élastique E_0 et 9 paramètres anélastiques : $Y_{01} > 0$, $Y_{02} > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$, $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $B_1 > 1$, $B_2 > 1$, $\sigma_f > 0$, que l'on doit associer à des valeurs physiques repérées sur un trajet de chargement de traction-compression du béton.

La figure [Figure 2.2-a] représente un cycle de traction-compression sur un élément en béton. Le calage des paramètres du modèle doit se faire globalement sur une telle représentation de la réponse en traction-compression du matériau. On peut identifier plusieurs paramètres physiques caractéristiques accessibles à partir d'une courbe expérimentale :

- σ_{ft} le seuil d'endommagement en traction monotone depuis un état vierge du béton, qui est aussi le pic de la courbe en traction ;
- σ_f la contrainte de refermeture totale des fissures en compression (notée en valeur absolue par convention) ;
- σ_{endo}^{comp} le seuil d'endommagement en compression monotone (noté en valeur absolue par convention) ;

- σ_{fc} la résistance en compression monotone du béton (notée en valeur absolue par convention), c'est-à-dire le pic de la courbe en compression ;
- $\varepsilon_{fc} < 0$ la déformation correspondante à cette résistance en compression monotone du béton (on doit avoir $\varepsilon_{fc} < -\sigma_{fc}/E_0$) ;
- $\varepsilon_{res} < 0$ la déformation correspondante à la décharge complète depuis le pic de compression.

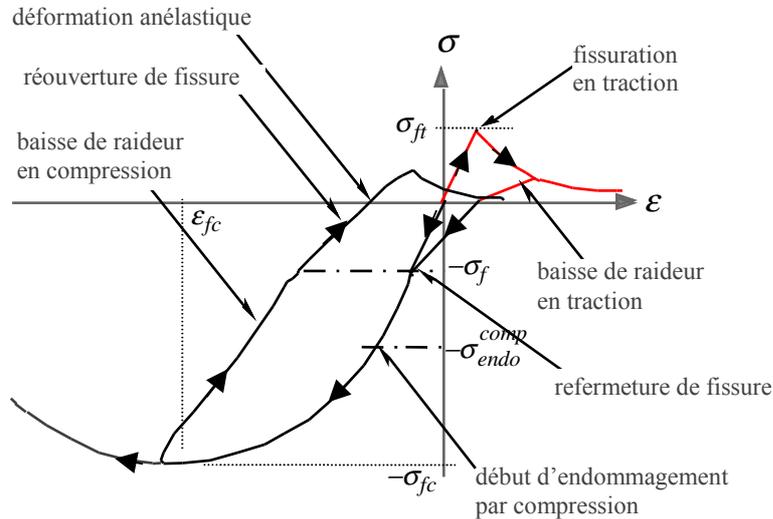


Figure 2.2-a. Réponse en traction-compression du modèle de béton de La Borderie.

2.2.1 Trajet de charge uniaxiale monotone en traction

En pratique, $Y_{02} \gg Y_{01}$. Le 1^{er} seuil sera donc atteint avant le second ; on aura ainsi $\dot{D}_2 = 0$. Il est possible de relier le seuil d'endommagement σ_{ft} en traction monotone, depuis un état vierge du béton, aux paramètres de la loi :

$$Y_{01} = \frac{\sigma_{ft}^2}{2 E_0} + \frac{\beta_1 \sigma_{ft}}{E_0} \Leftrightarrow \sigma_{ft} = -\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + 2 E_0 Y_{01}} \quad \text{éq 2.2-1}$$

L'équation de cohérence en charge pour le 1^{er} seuil conduit à :

$$\dot{D}_1 \cdot \left(\frac{E_0 A_1^{-1}}{B_1} \left(\frac{D_1}{1-D_1} \right)^{1/B_1-1} - \frac{\sigma^+ (\sigma^+ + 2 \beta_1)}{1-D_1} \right) = \dot{\sigma}^+ \cdot (\sigma^+ + \beta_1)$$

Donc pour l'endommagement naissant ($D_j = 0$ et $\dot{D}_1 > 0$), et $\sigma^+ (\sigma^+ + 2 \beta_1) = 2 E_0 Y_{01}$, on a :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{-\beta_1^2 \dot{\sigma}^+}{E_0 \sigma^+ (\sigma^+ + 2 \beta_1)} = \frac{-\beta_1^2 \dot{\sigma}^+}{2 E_0^2 Y_{01}}$$

On peut donc tirer la valeur de $\beta_1 > 0$ en identifiant la pente initiale post-pic en traction par E_{pp} (négative a priori) par l'expression :

$$\beta_1 = -\sigma_{ft} E_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - E_{pp}/E_0}}{E_{pp}} \quad \text{éq 2.2-2}$$

En pratique, $\beta_1 > 0$ joue sur la largeur du pic en traction et l'ampleur des déformations anélastiques post-pic, qui peut n'avoir qu'une faible influence sur la réponse mécanique de la structure en béton armé étudiée. Selon [bib6], on pourra adopter :

$$\beta_1 = 0,5 + 0,35 \sigma_{ft} \quad (\text{en MPa}) \quad \text{éq 2.2-3}$$

ce qui permet ensuite de déterminer avec l'équation [2.2-1]. Le paramètre β_1 est dimensionné par le module de Young E_0 : si ce module change entre deux bétons différents, mais que l'on souhaite garder la même allure de courbe il suffira de modifier le paramètre β_1 dans le rapport des modules.

Comme $A_1 > 0$ n'intervient que pour adimensionnaliser Y_1 qui est lui-même contrôlé par le module de Young E_0 du béton considéré, on pourra faire varier A_1 en raison inverse de E_0 , sans changer l'évolution de l'endommagement.

2.2.2 Trajet de charge uniaxiale monotone en compression

Selon [bib6], on pourra adopter pour la contrainte de refermeture totale des fissures en compression (notée en valeur absolue par convention) :

$$\sigma_f = 0,10 \sigma_{fc} \quad \text{éq 2.2-4}$$

Considérons un trajet sur le domaine $0 \geq \sigma \geq -\sigma_f$. À l'apparition de l'endommagement en compression monotone σ_{endo}^{comp} (notée en valeur absolue) depuis un état vierge du béton ($D_2 = 0$), voir [Figure 2.2-a], le seuil est atteint et on a, cf. équation [2.1-4] :

$$Y_{02} = \frac{(\sigma_{endo}^{comp})^2}{2 E_0} - \frac{\beta_2 \sigma_{endo}^{comp}}{E_0} \Leftrightarrow \sigma_{endo}^{comp} = \beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 2 Y_{02} \cdot E_0} > 0 \quad \text{éq 2.2-5}$$

soit aussi l'équation linéaire en Y_{02} et β_2 :

$$E_0 Y_{02} + \sigma_{endo}^{comp} \beta_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{endo}^{comp})^2 \quad \text{éq 2.2-6}$$

En pratique, on devra prendre : $Y_2(-\sigma_f) = \sigma_f \frac{\sigma_f - 2 \beta_2}{2 E_0} \leq Y_{02}$ (l'endommagement en compression ne débute qu'après la fermeture des fissures).

En ce point d'apparition de l'endommagement $\dot{D}_2 > 0$, on a, suite aux équations [2.1-3] et [2.1-5] :

$$\dot{\sigma} = E_0 \dot{\varepsilon} - (\beta_2 - \sigma_{endo}^{comp}) \dot{D}_2 \quad \text{et} \quad \dot{Y}_2 = \dot{\varepsilon} (\beta_2 - \sigma_{endo}^{comp}) - \frac{\beta_2^2 \dot{D}_2}{E_0} \quad \text{éq 2.2-7}$$

En $D_2 = 0$, l'équation [2.1-7] produit des taux \dot{Y}_2 et \dot{D}_2 non définis. En effet on en déduit :

$$\dot{Y}_2 = \frac{\dot{D}_2}{A_2 B_2 D_2^2} \left(\frac{D_2}{1 - D_2} \right)^{(1+B_2)/B_2} \quad \text{éq 2.2-8}$$

Dès que l'on prend une valeur $D_2 > 0$, petite devant 1, on peut exprimer :

$$\dot{Y}_2 \approx \frac{\dot{D}_2}{A_2 B_2} (D_2)^{(1-B_2)/B_2} \quad \text{éq 2.2-9}$$

Puis, à l'aide de l'équation [2.2-7], on obtient :

$$\dot{D}_2 \approx \dot{\varepsilon} \left(\beta_2 - \sigma_{endo}^{comp} \right) \left(\frac{\beta_2^2}{E_0} + \frac{(D_2)^{(1-B_2)/B_2}}{A_2 B_2} \right)^{-1} \quad \text{éq 2.2-10}$$

Et la pente de la courbe de compression à l'apparition de l'endommagement s'exprime :

$$\dot{\sigma} \approx \dot{\varepsilon} \left(E_0 - \left(\beta_2 - \sigma_{endo}^{comp} \right)^2 \left(\frac{\beta_2^2}{E_0} + \frac{(D_2)^{(1-B_2)/B_2}}{A_2 B_2} \right)^{-1} \right) \approx E_0 \dot{\varepsilon} \quad \text{éq 2.2-11}$$

Donc à l'apparition de l'endommagement (en $D_2 = 0$) la pente de la courbe en compression reste continue, propriété directement due au choix opérés pour la formulation du modèle. On ne peut donc pas utiliser cette pente pour l'identification des paramètres.

Au pic de contrainte (résistance en compression monotone du béton), en notant le niveau d'endommagement \hat{D}_2 atteint en compression monotone, on a selon l'équation [2.1-3] (σ_{fc} noté en valeur absolue) :

$$\varepsilon_{fc} = \frac{\beta_2 \hat{D}_2 - \sigma_{fc}}{E_0 (1 - \hat{D}_2)} \Leftrightarrow \hat{D}_2 = \frac{\sigma_{fc} + E_0 \varepsilon_{fc}}{\beta_2 + E_0 \varepsilon_{fc}} \Leftrightarrow 1 - \hat{D}_2 = \frac{\beta_2 - \sigma_{fc}}{\beta_2 + E_0 \varepsilon_{fc}} \quad \text{éq 2.2-12}$$

De plus, au pic, on a : $\dot{\sigma} = 0$, donc selon l'équation [2.1-3] :

$$E_0 \dot{\varepsilon} (1 - \hat{D}_2) = \dot{D}_2 (E_0 \varepsilon_{fc} + \beta_2) < 0 \quad \text{éq 2.2-13}$$

Par ailleurs, au pic, on a selon l'équation [2.1-5] :

$$\dot{Y}_2 = \dot{\varepsilon} (E_0 \varepsilon_{fc} + \beta_2) - \frac{\beta_2^2 \dot{D}_2}{E_0 (1 - \hat{D}_2)^3} \quad \text{éq 2.2-14}$$

et en utilisant les équations [2.2-12] et [2.2-13] pour éliminer $\dot{\varepsilon}$ et \hat{D}_2 , on obtient :

$$\dot{Y}_2 = \frac{\sigma_{fc} \dot{D}_2 (E_0 \varepsilon_{fc} + \beta_2)^3 (\sigma_{fc} - 2 \beta_2)}{E_0 (\beta_2 - \sigma_{fc})^3} \quad \text{éq 2.2-15}$$

Puis on exprime le taux \dot{Y}_2 au pic à l'aide de l'équation [2.1-7] :

$$\dot{Y}_2 = \frac{\dot{D}_2}{A_2 B_2 \hat{D}_2^2} \left(\frac{\hat{D}_2}{1 - \hat{D}_2} \right)^{(1+B_2)/B_2} \quad \text{éq 2.2-16}$$

et en utilisant l'équation [2.2-12] pour éliminer \hat{D}_2 , on obtient :

$$\dot{Y}_2 = \frac{\dot{D}_2}{A_2 B_2} \left(\frac{\sigma_{fc} + E_0 \varepsilon_{fc}}{\beta_2 - \sigma_{fc}} \right)^{(1+B_2)/B_2} \left(\frac{\beta_2 + E_0 \varepsilon_{fc}}{\sigma_{fc} + E_0 \varepsilon_{fc}} \right)^2 \quad \text{éq 2.2-17}$$

Par conséquent, on tire l'équation non linéaire en β_2 , A_2 , B_2 :

$$\frac{(E_0 \varepsilon_{fc} + \beta_2)(\sigma_{fc} - 2\beta_2)}{(\beta_2 - \sigma_{fc})} = \frac{E_0}{A_2 B_2 \sigma_{fc}} \left(\frac{\sigma_{fc} + E_0 \varepsilon_{fc}}{\beta_2 - \sigma_{fc}} \right)^{(1-B_2)/B_2} \quad \text{éq 2.2-18}$$

qui n'est pas très pratique à résoudre à partir des valeurs de σ_{fc} et ε_{fc} .

Intéressons-nous maintenant à la déformation $\varepsilon_{res} < 0$ correspondante à la décharge complète depuis le pic de compression, qui reste élastique. On a en ce point, en utilisant l'équation [2.2-12] :

$$\varepsilon_{res} = \frac{\beta_2(\sigma_{fc} + E_0 \varepsilon_{fc})}{E_0(\beta_2 - \sigma_{fc})} \Leftrightarrow \beta_2 = \frac{E_0 \varepsilon_{res} \sigma_{fc}}{E_0(\varepsilon_{res} - \varepsilon_{fc}) - \sigma_{fc}} = \frac{E_0 \varepsilon_{res} \sigma_{fc}}{E_0 \hat{D}_2 (\varepsilon_{res} - \varepsilon_{fc})} \quad \text{éq 2.2-19}$$

ce qui donne la valeur de β_2 .

Le paramètre $\beta_2 < 0$ est dimensionné par le module de Young E_0 et contrôle l'ampleur des déformations anélastiques, ainsi que la valeur de contrainte de pic $|\sigma_{fc}|$.

On peut constater numériquement par exemple, qu'abaisser β_2 fait baisser $|\sigma_{fc}|$, mais aussi la valeur de la déformation $|\varepsilon_{fc}|$ atteinte au seuil de résistance en compression.

On constate aussi que la valeur de B_2 est sensible à celle de ε_{res} , elle-même très sensible à celle de l'endommagement \hat{D}_2 atteint au pic :

$$\varepsilon_{res} = \frac{\sigma_{fc}}{E_0(1 - \hat{D}_2)} + \varepsilon_{fc} \quad \text{éq 2.2-20}$$

En général, on considère dans la littérature, cf. [bib7], que la perte de raideur élastique est encore très faible lorsqu'on atteint le pic et qu'elle s'accroît plutôt dans la phase de descente postérieure au pic.

En utilisant l'équation [2.2-6], on obtient directement Y_{02} :

$$Y_{02} = \frac{\sigma_{endo}^{comp}}{2 E_0} \left(\sigma_{endo}^{comp} - 2 \frac{E_0 \varepsilon_{res} \sigma_{fc}}{E_0 (\varepsilon_{res} - \varepsilon_{fc})} \right) \quad \text{éq 2.2-21}$$

Augmenter Y_{02} fait augmenter la valeur de la résistance en compression $|\sigma_{fc}|$; de plus, alors la partie linéaire de la phase de compression est plus importante, tandis que $|\varepsilon_{fc}|$ n'est pas modifié [bib 6].

Si l'on ne dispose pas de valeurs expérimentales donnant ε_{fc} , on pourra adopter la valeur fréquemment admise de $-0,2\%$ (loi parabole-rectangle, loi de P.Faessel [bib 8]...).

Si l'on ne dispose pas de valeurs expérimentales donnant ε_{res} , on pourra adopter la valeur fréquemment admise de $\varepsilon_{fc} - \sigma_{fc}/(0,95 E_0)$, sachant que l'endommagement \hat{D}_2 est encore faible (estimé à 5%) au pic de la courbe de compression, cf. par exemple [bib7].

Comme A_2 n'intervient que pour adimensionnaliser Y_2 , qui est lui-même contrôlé par le module de Young E_0 , on pourra faire varier A_2 en raison inverse de E_0 , sans changer l'évolution de l'endommagement. La réponse en compression est très sensible au paramètre A_2 : augmenter A_2 fait fortement baisser $|\sigma_{fc}|$ et $|\varepsilon_{fc}|$.

Baisser la valeur de B_2 augmente la valeur de $|\varepsilon_{fc}|$ et abaisse $|\sigma_{fc}|$: la ductilité augmente.

Ces paramètres ont donc des conséquences essentielles sur l'analyse de la ruine de la structure en béton armé (par atteinte de la limite en contraintes en compression ainsi qu'en déformation).

On peut exploiter le cas-test SSNL120 de Code_Aster qui traite le problème du point matériel de béton sous chargement cyclique uni-axial, cf. [bib4], pour s'aider à identifier les paramètres.

Attention :

En cas chargement sévère, le pic de résistance en compression peut être rencontré, voire même dépassé, ce qui se traduit par un adoucissement du matériau. Nous avons remarqué que dans certains cas (selon le jeu de paramètres du modèle) des phénomènes d'oscillations peuvent apparaître si cette contrainte venait à remonter en deçà de $-\sigma_f$.

Il convient de relativiser ce problème puisque les déformations habituellement rencontrées pour un béton sous compression sont rarement aussi fortes.

2.2.3 Résumé pour l'identification des paramètres

Les données expérimentales assez faciles à obtenir et nécessaires pour le paramétrage sont :

- E_0 le module de Young ;
- σ_{ft} le seuil d'endommagement en traction monotone depuis un état vierge du béton, qui est aussi le pic de la courbe en traction ;
- $\sigma_f > 0$ la contrainte de refermeture totale des fissures en compression (notée en valeur absolue par convention) ;
- σ_{endo}^{comp} le seuil d'endommagement en compression monotone (noté en valeur absolue par convention) ;
- σ_{fc} la résistance en compression monotone du béton (notée en valeur absolue par convention), c'est-à-dire le pic de la courbe en compression ;
- $\varepsilon_{fc} < 0$ la déformation correspondante à cette résistance en compression monotone du béton (on doit avoir $\varepsilon_{fc} < -\sigma_{fc}/E_0$) ;
- $\varepsilon_{res} < 0$ la déformation correspondante à la décharge complète depuis le pic de compression ;
- et éventuellement E_{pp} (négative a priori), la pente initiale post-pic en traction .

On en tire les valeurs des paramètres de la loi de comportement LABORD_1D :

- E_0 ; $\sigma_f > 0$; on pourra choisir, selon l'équation [2.2-4] : $\sigma_f = 0,10 \sigma_{fc}$;
- $\beta_1 = 0,5 + 0,35 \sigma_{ft}$ (en MPa) selon [bib6], ou $\beta_1 = -\sigma_{ft} E_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - E_{pp}/E_0}}{E_{pp}}$ selon l'équation [2.2-2] si l'on possède la pente post-pic E_{pp} ;
- $Y_{01} = \sigma_{ft} \frac{\sigma_{ft} + 2 \beta_1}{2 E_0}$ selon l'équation [2.2-1] ;
- $\beta_2 = \frac{E_0 \varepsilon_{res} \sigma_{fc}}{E_0 (\varepsilon_{res} - \varepsilon_{fc}) - \sigma_{fc}}$ selon l'équation [2.2-19] ;
- $Y_{02} = \frac{\sigma_{endo}^{comp}}{2 E_0} \left(\sigma_{endo}^{comp} - 2 \frac{E_0 \varepsilon_{res} \sigma_{fc}}{E_0 (\varepsilon_{res} - \varepsilon_{fc})} \right)$ selon l'équation [2.2-21].

On ne possède pas de relation analytique directe permettant d'exploiter les seules données σ_{fc} et σ_{ft} . on devra donc vérifier avec le jeu de paramètres LABORD_1D le compromis souhaité.

Pour les paramètres $A_1 > 0$, A_2 , B_1 et B_2 , on adoptera la démarche suivante :

- les paramètres sans dimension $B_1 > 1$, $B_2 > 1$ jouent sur l'évolution des seuils ; ils sont plus difficiles à caler : on pourra prendre les valeurs utilisées dans les références ;
- baisser la valeur de $B_2 > 1$ augmente la valeur de $|\varepsilon_{fc}|$ et abaisse $|\sigma_{fc}|$: la ductilité augmente ;
- on pourra faire varier A_1 et A_2 (dimension inverse de contraintes) en raison inverse de E_0 : ils n'interviennent que pour adimensionnaliser Y_1 et Y_2 , sans changer l'évolution de l'endommagement ; augmenter A_2 fait fortement baisser $|\sigma_{fc}|$ et $|\varepsilon_{fc}|$; on pourra cependant utiliser l'équation [2.2-18] pour obtenir A_2 à partir des autres paramètres (ou vérifier la cohérence de sa valeur).

3 Résolution numérique

Le modèle exprime la déformation en fonction de la contrainte et n'est pas inversible analytiquement.

Le problème consiste à trouver, partant d'un état convergé d'indice j pour une déformation totale ε , à trouver le nouvel état convergé pour un incrément de déformation totale $\Delta \varepsilon$.

3.1 Données et inconnues

Les données du problème sont :

les constantes :	E_0	module d'élasticité initial
	β_1 , β_2	paramètres d'anélasticité
	Y_{01} , Y_{02}	seuils initiaux
	A_1 , A_2 , B_1 , B_2	paramètres d'évolution des variables d'endommagement
les variables historiques :	σ_f	contrainte de refermeture de fissure
	D_1 , D_2	endommagements au pas précédent
	Z_1 , Z_2	seuils au pas précédent
le chargement :	$\varepsilon + \Delta \varepsilon$	déformation totale au pas actuel

Les inconnues du problème sont :

les nouvelles variables :	D_1, D_2	endommagements au pas actuel
	Z_1, Z_2	seuils au pas actuel
la réponse :	σ	contrainte
	E_t	module tangent

3.2 Résolution

On distingue 3 cas en fonction de la contrainte à la fin du pas de temps :

- cas 1 : $\sigma \geq 0$, D_1 seul peut évoluer,
- cas 2 : $0 \geq \sigma \geq -\sigma_f$, D_1 et D_2 n'évoluent pas (en faisant l'hypothèse que $Y_2(-\sigma_f) < Y_{02}$),
- cas 3 : $\sigma \leq -\sigma_f$, D_2 seul peut évoluer.

Dans la pratique, on ne connaît pas la contrainte finale avant d'avoir calculé l'endommagement. À l'aide de la relation contrainte-déformation, on réécrit les trois cas en fonction de ε :

- cas 1 : $\varepsilon \geq \varepsilon_1$,
- cas 2 : $\varepsilon_1 > \varepsilon > \varepsilon_2$,
- cas 3 : $\sigma \leq -\sigma_f$, D_2 seul peut évoluer,

$$\text{avec } \varepsilon_1 = \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{\beta_2 D_2 - \sigma_f}{E_0(1-D_2)} .$$

On exécute ainsi un test sur la valeur de la déformation de fin de pas de temps, fixe au cours des itérations, tandis que les seuils dépendent de l'endommagement, et peuvent évoluer au cours des itérations. Les itérations se déroulent ainsi :

- à partir des endommagements au début de pas de temps, on calcule les limites ε_1^0 et ε_2^0 ,
- avec la déformation en fin de pas de temps $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ on fait le test pour déterminer le cas 1, 2 ou 3,
- suivant le cas on calcule l'évolution de l'endommagement ([§3.2.1], [§3.2.2] ou [§3.2.3]),
- on calcule les nouvelles limites ε_1^k et ε_2^k ,
- on refait les tests de cas, toujours avec la déformation $\varepsilon + \Delta\varepsilon$,
- si le cas a changé, on calcule la nouvelle évolution des endommagements et on recommence, sinon on sort avec les variables actualisées calculées dans les [§3.2.1], [§3.2.2] ou [§3.2.3].

3.2.1 Cas 1 : traction

Dans ce cas seul D_1 peut évoluer. On calcule le taux de restitution d'énergie qui peut s'écrire en fonction de la déformation :

$$Y_1 = \frac{1}{2E_0} \left[\left(E_0 \varepsilon + \beta_1 - \frac{\beta_2 D_2}{1-D_2} \right)^2 - \left(\frac{\beta_1}{1-D_1} \right)^2 \right] \quad \text{éq 3.2.1-1}$$

Si $Y_1 < Z_1$ l'endommagement D_1 n'évolue pas, sinon il faut résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues suivant :

$$\begin{cases} Y_1 - \frac{1}{2E_0} \left[\left(E_0 \varepsilon + \beta_1 - \frac{\beta_2 D_2}{1-D_2} \right)^2 - \left(\frac{\beta_1}{1-D_1} \right)^2 \right] = 0 \\ D_1 - 1 + \frac{1}{1 + [A_1(Y_1 - Y_{01})]^{B_1}} = 0 \end{cases} \quad \text{éq 3.2.1-2}$$

Dans l'implantation actuelle, cette résolution est faite par dichotomie, sur une fonction ne dépendant que de D_1 , obtenue en incorporant la première ligne du système [éq 3.2.1-2] dans la deuxième. Cette dichotomie peut être paramétrée par les mots clés ITER_INTE_MAXI et RESI_INTE_RELA du mot-clé COMP_INCR. [U4.51.11]. Le premier est le nombre de divisions de l'intervalle de recherche autorisées, le second est la précision souhaitée pour la résolution.

Une fois D_1 et Y_1 trouvés, on peut actualiser le seuil $Z_1(t^+) = \max(Z_1(t^-), Y_1(t^+))$ et calculer la contrainte, cf. [éq 2.1-2] :

$$\sigma = E_0 \cdot \varepsilon (1 - D_1) - \beta_1 D_1 - \frac{\beta_2 D_2 (1 - D_1)}{1 - D_2} \quad \text{éq 3.2.1-3}$$

3.2.2 Cas 2 : faible compression

Dans ce cas D_1 n'évolue pas. Si le seuil initial pour le taux de restitution d'énergie est suffisamment grand pour que $Y_2(-\sigma_f) < Y_{02}$ alors D_2 n'évolue pas non plus car dans le cas 2 : $0 > \sigma > -\sigma_f$.

On calcule alors la valeur de $F(\sigma)$:

$$F(\sigma) = \frac{E_0 \varepsilon (1 - D_2) - \beta_2 D_2 + \sigma_f}{\sigma_f + \frac{\beta_1 D_1 (1 - D_2)}{1 - D_1}} \quad \text{éq 3.2.2-1}$$

On en déduit la contrainte, cf. [éq 2.1-2] :

$$\sigma = E_0 \cdot \varepsilon (1 - D_2) - \beta_2 D_2 - \frac{\beta_1 D_1 (1 - D_2) \cdot F(\sigma)}{1 - D_1} \quad \text{éq 3.2.2-2}$$

3.2.3 Cas 3 : compression au-delà de la refermeture des fissures

Dans ce cas seul D_2 peut évoluer. On calcule le taux de restitution d'énergie qui peut s'écrire en fonction de la déformation :

$$Y_2 = \frac{1}{2E_0} \left[(E_0 \varepsilon + \beta_2)^2 - \left(\frac{\beta_2}{1 - D_2} \right)^2 \right] \quad \text{éq 3.2.3-1}$$

Si $Y_2 < Z_2$ l'endommagement D_2 n'évolue pas, sinon il faut résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues suivant :

$$\begin{cases} Y_2 - \frac{1}{2 E_0} \left[(E_0 \varepsilon + \beta_2)^2 - \left(\frac{\beta_2}{1 - D_2} \right)^2 \right] = 0 \\ D_2 - 1 + \frac{1}{1 + [A_2 (Y_2 - Y_{02})]^{B_2}} = 0 \end{cases} \quad \text{éq 3.2.3-2}$$

La résolution est faite de la même manière qu'au paragraphe § 12.

Une fois D_2 et Y_2 trouvés, on peut actualiser le seuil $Z_2 = \max(Z_2, Y_2)$ et calculer la contrainte :

$$\sigma = E_0 \cdot \varepsilon (1 - D_2) - \beta_2 D_2 \quad \text{éq 3.2.3-3}$$

3.2.4 Module tangent

Dans l'état actuel, le module tangent cohérent n'a pas été calculé analytiquement.

On calcule le module tangent « numérique » auquel on ajoute un pourcentage du module initial pour éviter certains problèmes de non-convergence classiques lorsqu'on utilise une résolution tangente avec des modèles d'endommagement adoucissant (et particulièrement ici à la discontinuité lors de la refermeture des fissures).

$$E_t = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon} + \alpha E_0 \quad \text{éq 3.2.4-1}$$

où $\Delta \sigma$ est la variation de contrainte calculée au cours de l'incrément de déformation $\Delta \varepsilon$. On choisit $\alpha = 0.10$.

3.3 Variables internes produites

La relation de comportement produit les « variables internes » suivantes :

V1	Variable d'endommagement de traction D_1
V2	Variable d'endommagement de compression D_2
V3	Valeur limite de Y_1
V4	Valeur limite de Y_2
V5	Module tangent E_t

En cas de poursuite ou de reprise d'un calcul précédent, elles sont exploitées, avec la valeur de la contrainte, pour initialiser l'état du matériau.

4 Implantation dans Code_Aster

Les constantes du modèle sont données dans `DEFI_MATERIAU [U4.43.01]` par l'utilisateur :

```
ELAS : E  
LABORD_1D : Y01, Y02, A1, A2, B1, B2, BETA1, BETA2, SIGF
```

La subroutine `NMCB1D` reçoit dans ses arguments les constantes matériaux, la contrainte et la déformation de l'incrément précédent (`SIG0` et `EPSM`), les variables internes (`VAR0` : endommagements, seuils et module tangent) de l'incrément précédent et l'incrément de déformation (`DEPS`) de l'itération en cours (après avoir déduit la déformation thermique, ayant supposé le coefficient de dilatation α constant). Elle renvoie en retour la contrainte (`SIGF`), le module tangent (`EF`) et les nouvelles variables internes (`VARF`).

Un test est fait pour aiguiller suivant le cas où l'on se trouve :

- 1) La subroutine `NMCB13` traite les cas 1 et 3. Le système est résolu par dichotomie.
- 2) La subroutine `NMCB2` traite le cas 2.

Après calcul du nouvel endommagement, un nouveau test est effectué pour vérifier si l'on se trouve toujours dans le même cas. Le cas échéant on refait un passage.

Le calcul du module tangent est effectué ensuite : $EF = (SIGF - SIG0) / DEPS + CO * E0$

La valeur de `CO` est fixée arbitrairement à 0,10, cf. [éq 3.2.4-1]. Elle n'est pas modifiable par l'utilisateur actuellement.

Il peut arriver que l'incrément de déformation soit nul (`DEPS=0`). Dans ce cas, pour éviter une division par zéro, on prend pour `EF` la valeur à l'incrément précédent. C'est pour cette raison que l'on doit le stocker comme variable interne.

5 Fonctionnalités et vérification

Ce document concerne la loi de comportement `LABORD_1D` pour les poutres multi-fibres (commande `DEFI_COMPOR`, mot clé `MULTIFIBRE/RELATION`) et son matériau associé `LABORD_1D` (commande `DEFI_MATERIAU`).

Cette loi de comportement est vérifiée par les cas tests suivants :

SDNL130	Réponse sismique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire	[V5.02.130]
SSNL119	Réponse statique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire	[V6.02.119]
SSNL120	Réponse cyclique de la loi de comportement du béton (modèle de La Borderie)	[V6.02.120]
SSNS106hij	Endommagement d'une plaque plane sous sollicitations variées avec la loi de comportement <code>GLRC_DM</code>	[V6.05.106]

6 Bibliographie

- 1) La Borderie C.L. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériaux endommageable: modélisation et application à l'analyse des structures en béton*, Thèse de doctorat Université de Paris VI.
- 2) Lemaitre J. et Chaboche J.L. (1988). *Mécanique des matériaux solides* . Ed. Dunod, Paris.
- 3) Mazars J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure* . Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris VI.
- 4) [V6.02.120] SSNL120 - *Réponse cyclique de la loi de comportement du béton (modèle de La Borderie)*.
- 5) [R3.08.08] *Éléments de poutres multifibres (droites)*.
- 6) Mousseau S., Paultre P., Mazars, J. (2008). *Seismic performance of a full-scale, reinforced high-performance concrete building. Part II: analytical study*. *Can. J. Civ. Eng.* 35:849-862.
- 7) Maekawa K., Pimanmas A., Okamura H. (2004). *Nonlinear Mechanics of Reinforced Concrete* . Spon Press, London .
- 8) Faessel P., Robinson J. R., Morisset A. (1971). *Tab les d'états limites ultimes des poteaux en béton armé* . Société de diffusion des techniques du bâtiment et des travaux publics, Paris.

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
8	F. VOLDOIRE, EDF-R&D/AMA, L.DAVENNE, ENSC/LMT, S.GHAVAMIAN, NECS.	Texte initial
10	F. VOLDOIRE, EDF-R&D/AMA	Corrections sur la version Open-Office de la documentation.
10.2	F. VOLDOIRE, EDF-R&D/AMA	Compléments sur l'identification des paramètres, § 2.2
10.4	F. VOLDOIRE, EDF-R&D/AMA	Ajout d'expressions proches du source, § 2.1.
11.1	F. VOLDOIRE, EDF-R&D/AMA	Correction suite à la fiche 16566, cf. § 3.2.1 et équation 3.2.1-2.
11.1	F. VOLDOIRE, EDF-R&D/AMA	Ajout d'une référence bibliographique et de commentaires sur l'identification des paramètres, § 2.2.
11.1	F. VOLDOIRE, EDF-R&D/AMA	Ajout de relations entre les paramètres du modèle et des valeurs expérimentales accessibles sur des courbes d'essais de compression et de traction du béton.