

---

## Comportements élastoviscoplastiques mono et polycristallins

---

### Résumé :

Le but de ce document est de décrire l'intégration des comportements mono et polycristallins.

On traite ici de l'intégration de ces lois de comportement associées à des systèmes de glissement correspondant aux familles cristallines habituelles ou spécifiées par l'utilisateur. Cette intégration peut se faire de façon explicite (méthode de Runge\_Kutta avec contrôle de la précision et redécoupage local du pas de temps) ou de façon implicite (méthode de Newton avec redécoupage local du pas de temps).

Ces comportements peuvent être employés pour le calcul de microstructures (maillage d'un agrégat, avec représentation géométrique de chaque grain physique monocristallin) ou pour le calcul de type POLYCRYSTAL, milieu « homogénéisé » possédant en tout point matériel (ou point d'intégration ou de calcul) plusieurs phases simultanées, dans des proportions variables.

On décrit aussi les types de calculs possibles avec ces comportements ainsi que la procédure de génération de maillages.

## Table des Matières

1 Introduction.....	4
2 Formulation des comportements mono et polycristallins.....	4
2.1 Relations de comportement du monocristal.....	4
2.1.1 Exemples de relations d'écoulement.....	5
2.1.1.1 Loi phénoménologique MONO_VISC1.....	5
2.1.1.2 Loi phénoménologique MONO_VISC2.....	5
2.1.1.3 Loi issue de la Dynamique des Dislocations : MONO_DD_KR.....	5
2.1.1.4 Lois MONO_DD_CFC / MONO_DD_CFC_IRRA / MONO_DD_FAT .....	7
2.1.1.5 Lois MONO_DD_CC / MONO_DD_CC_IRRA.....	9
Les lois d'évolution des densités de dislocations ( et ) sont : .....	11
2.1.2 Exemples de relations d'écroissage cinématique.....	11
2.1.3 Exemples de relations d'écroissage isotrope.....	11
2.1.3.1 MONO_DD_CFC / MONO_DD_FAT .....	12
2.2 Systèmes de glissement et comportement global du monocristal.....	12
2.2.1 Petites déformations, configuration initiale.....	12
2.2.2 Petites déformations, rotation du réseau cristallin.....	13
2.2.3 Grandes déformations .....	14
2.3 Comportement du polycristal homogénéisé.....	15
2.3.1 Comportement de type POLYCRISTAL.....	15
2.3.1.1 Relation de changement d'échelle.....	15
3 Intégration locale et mise en œuvre numérique.....	16
3.1 Système d'équations à résoudre.....	16
3.1.1 Comportement de type MONOCRISTAL.....	16
3.1.2 Comportement de type POLYCRISTAL.....	17
3.2 Résolution implicite du comportement MONOCRISTAL .....	18
3.2.1 Résolution implicite – Système d'équations réduit.....	19
3.2.2 Résolution implicite – Intégration du modèle MONO_DD_KR.....	21
3.2.3 Résolution implicite – modèles MONO_DD_CFC / MONO_DD_FAT .....	23
3.2.4 Résolution implicite – modèles MONO_DD_CC / MONO_DD_CC_IRRA.....	27
3.2.5 Algorithme d'intégration implicite en grandes déformations.....	29
3.2.6 Critères de convergence utilisés pour les résolutions implicites.....	31
3.3 Résolution explicite.....	31
4 Variables internes.....	32
4.1 Cas du monocristal.....	33
4.2 Cas du polycristal.....	33
5 Implantation numérique dans Code_Aster.....	34
6 Utilisation.....	35
6.1 Cas du monocristal.....	35
6.2 Cas du polycristal.....	37

<a href="#">6.3 Exemple.....</a>	<a href="#">37</a>
<a href="#">7 Bibliographie.....</a>	<a href="#">40</a>
<a href="#">8 Historique des versions du document.....</a>	<a href="#">41</a>
<a href="#">Annexe 1 Expression du Jacobien des équations élasto-visco-plastiques intégrées.....</a>	<a href="#">42</a>
<a href="#">Annexe 2 Évaluation de l'opérateur tangent cohérent .....</a>	<a href="#">45</a>
<a href="#">Annexe 3 Évaluation de l'opérateur tangent cohérent – Cas du système réduit.....</a>	<a href="#">46</a>
<a href="#">Annexe 4 Matrices tangentes en grandes déformations :.....</a>	<a href="#">47</a>
<a href="#">Annexe 5 Écriture générale des matrices jacobiennes.....</a>	<a href="#">50</a>
<a href="#">Annexe 6 Exemples de matrices d'interaction.....</a>	<a href="#">52</a>
<a href="#">Annexe 7 Procédure de création de maillage.....</a>	<a href="#">54</a>

## 1 Introduction

L'objectif général du développement des fonctionnalités « micro-macro » dans *Code\_Aster* est de pouvoir intégrer de façon modulaire des modèles à plusieurs échelles (avec une possibilité de choix des lois de comportements, des règles de localisation, des types de microstructures). Ce qui peut mener à des types de calcul différents (calculs polycristallins, utilisation d'une loi de type *Berveiller-Zaoui* ou d'une loi type « règle en  $\beta$  », calculs d'agrégats multi-cristallins avec maillage d'une microstructure, ...).

La démarche présentée ici consiste à permettre le découplage, par modularité, des différents éléments qui constituent une loi de comportement. Cette souplesse est accessible directement à l'utilisateur. De plus, pour le développeur, il est possible d'ajouter facilement une loi de comportement cristalline en définissant simplement les dérivées partielles du problème, en termes de variables internes. Ceci est suffisant si on se contente d'une intégration explicite ; pour une intégration implicite, il faut définir en plus l'opérateur tangent.

Plus précisément, pour l'aspect comportement `MONOCRISTAL`, en chaque point d'intégration d'un élément fini donné, le comportement est celui d'un monocristal possédant une orientation donnée, et un certain nombre de systèmes de glissement. Chaque famille de systèmes de glissement possède sa propre loi de comportement locale.

Dans le cas d'un modèle polycristallin, on suppose qu'en un point matériel (point d'intégration d'un élément fini), plusieurs phases métallurgiques sont présentes simultanément, chaque phase pouvant être constituée de grains avec des orientations données, chaque grain possédant un certain nombre de systèmes de glissement (pas forcément les mêmes pour chaque phase). La représentation du matériau est fondée sur une approche auto-cohérente simplifiée 40 ou éventuellement étendue pour des chargements non radiaux ou cycliques 40. Chaque famille de systèmes de glissement possède sa propre loi de comportement locale. On trouve ainsi séparément la structure cristallographique, la loi de viscoplasticité cristalline et les règles de transition d'échelles. Ce mode de séparation est aussi étendu à la loi de viscoplasticité proprement dite, avec une séparation entre l'élasticité, le critère et la loi d'écoulement.

## 2 Formulation des comportements mono et polycristallins

### 2.1 Relations de comportement du monocristal

Les comportements relatifs aux système de glissement d'un monocristal sont (dans l'ensemble des comportements envisagés) de type élasto-visco-plastique. Il peuvent être construits sur des bases phénoménologiques ou sur des bases physiques (dynamique des dislocations). Pour chacune des directions de glissement, le comportement est *mono dimensionnel*. Il peut se décomposer en trois types d'équations :

- Relation d'écoulement :  $\dot{\gamma}_s$  représente le glissement plastique du système  $s$

$$\dot{\gamma}_s = g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s), \text{ avec } \dot{p}_s = |\dot{\gamma}_s| \text{ et :}$$

cas élastoplastique, un critère du type :  $F(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) \leq 0$  et  $F \cdot \dot{p}_s = 0$

cas élasto-viscoplastique,  $\dot{p}_s = f(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$

- $\dot{\alpha}_s$  représente l'écroissage cinématique dans le cas d'une loi phénoménologique et la densité de dislocations pour un comportement à base physique.

Son évolution est la forme :  $\dot{\alpha}_s = h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$

- pour les lois phénoménologiques, l'écroissage isotrope est défini par une fonction :  $R(p_s)$ .

Ces relations deviennent, après discrétisation en temps:

•Relation d'écoulement :

$$\Delta \gamma_s = g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s), \text{ avec, } \Delta p_s = |\Delta \gamma_s|$$

pour un comportement élastoplastique un critère du type :  $F(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) \leq 0$  et  $F \cdot \Delta p_s = 0$

et pour un comportement élasto-viscoplastique,  $\Delta p_s = f(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) \Delta t$

•Évolution de  $\dot{\alpha}_s$  :  $\Delta \alpha_s = h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$

•Évolution de l'écroissage isotrope :  $R(p_s)$

Les quantités  $(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$  sont évaluées à l'instant courant pour une discrétisation implicite et à l'instant précédent pour une discrétisation explicite.

Pour fixer les idées, voici des exemples de relations d'écoulement viscoplastique ou élastoplastique, et d'écroissage. Les noms de ces relations correspondent à leur appellation dans la commande `DEFI_MATERIAU [U4.43.01]`.

## 2.1.1 Exemples de relations d'écoulement

### 2.1.1.1 Loi phénoménologique `MONO_VISC1`

$$\Delta \gamma_s = g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) = \Delta p_s \frac{\tau_s - c \alpha_s}{|\tau_s - c \alpha_s|}$$

$$\Delta p_s = \Delta t \left\langle \frac{|\tau_s - c \alpha_s| - R_s(p_s)}{k} \right\rangle^n$$

Les paramètres sont :  $(c, k, n)$ .

### 2.1.1.2 Loi phénoménologique `MONO_VISC2`

$$\Delta \gamma_s = g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) = \Delta p_s \frac{\tau_s - c \alpha_s - a \gamma_s}{|\tau_s - c \alpha_s - a \gamma_s|}$$

$$\Delta p_s = \Delta t \left\langle \frac{|\tau_s - c \alpha_s - a \gamma_s| - R_s(p_s) + \frac{d}{2c} (c \alpha_s)^2}{k} \right\rangle^n$$

Les paramètres sont :  $c, k, n, a, d$ .

### 2.1.1.3 Loi issue de la Dynamique des Dislocations : `MONO_DD_KR`

Le modèle `MONO_DD_KR` (Kocks-Rauch) est applicable aux aciers de type *CC* (structure cristalline Cubique Centré). Sa variable interne principale est la densité de dislocations sur chaque système de glissement. Il offre par ailleurs l'avantage d'être valide pour une large gamme de températures [bib7]. L'écoulement se formule de la façon suivante :

Si  $|\tau^s| > \tau_0$

$$\tau_{eff}^s = \left\langle |\tau^s| - \tau_0 - \tau_\mu^s \right\rangle \quad \langle \rangle \text{ partie positive}$$

$$\tau_{\mu}^s = \frac{(\mu)^2 \sum_u a^{su} \alpha^u}{|\tau^s| - \tau_0} \text{ avec } \alpha^u = \rho^u b^2$$

sinon  $\tau_{eff}^s = 0$ . Dans ces expressions,  $\mu$  désigne le module de cisaillement du matériau,  $b$  est la constante de Burgers,  $\rho^u$  est la densité de dislocations,  $a^{su}$  est la matrice d'interaction entre les 24 systèmes de glissement (sa forme particulière, dépendant de 5 coefficients, est fournie en annexe). Les termes diagonaux représentent l'auto-écrouissage d'un système de glissement, les autres termes représentent l'écrouissage latent.

Si  $|\tau^s| > \tau_0$  et  $\tau_{eff}^s > 0$

$$\Delta \gamma_s = g(\tau_s, \gamma_s) = \dot{\gamma}_0 \exp\left(\frac{-\Delta G(\tau_{eff}^s)}{k_B T}\right) \cdot \frac{\tau_s}{|\tau^s|} \cdot \Delta t$$

avec  $\Delta G(\tau_{eff}^s) = \Delta G_0 \left(1 - \left(\frac{\langle \tau_{eff}^s \rangle}{\tau_R}\right)^p\right)^q$

sinon

$$\Delta \gamma_s = 0$$

$$\Delta \alpha_s = 0$$

$\Delta G(\tau_{eff}^s)$  est une activation d'enthalpie correspondant à une activation libre dans un domaine athermique.  $\dot{\gamma}_0, \tau_R, p, q$  sont des données matériaux,  $k_B$  la constante de Boltzman et  $T$  la température.

L'évolution de la densité de dislocation est proportionnelle à la racine carrée de la somme des densités de dislocations de tous les autres systèmes de glissement :

$$\dot{\rho}_s = \frac{|\dot{\gamma}^s|}{b} \left( \frac{1}{\Lambda^s} - g_c(T) \rho^s \right) \text{ avec } \frac{1}{\Lambda^s} = \frac{1}{d} + \frac{\sqrt{\sum_{u \neq s} \rho^u}}{K(T)}$$

et  $g_c(T) = g_{c0} \exp\left[-\frac{E_{gc}}{k_B T}\right]$  où  $E_{gc}, k_B, b, d, g_{c0}, K(T)$  sont des paramètres matériaux,

d'où

$$\Delta \rho^s = |\Delta \gamma^s| \left( \frac{1}{bd} + \frac{\sqrt{\sum_{u \neq s} \alpha^u}}{b^2 K} - \frac{g_c \alpha^s}{b^3} \right) \text{ et par conséquent :}$$

$$\Delta \alpha^s = |\Delta \gamma^s| \left( \frac{b}{d} + \frac{\sqrt{\sum_{u \neq s} \alpha^u}}{K} - \frac{g_c \alpha^s}{b} \right) = |g(\tau_s, \alpha_s)| \cdot h(\alpha_s)$$

Les paramètres sont :  $\dot{\gamma}_0, k_B, T, \tau_R, \Delta G_0, p, q, \tau_0, \mu, b, d, K, g_c$   
 $k_B$  est la constante de Boltzman.

Remarque : La résolution de Newton peut amener à des valeurs négatives pour  $\Delta \alpha^u$ , il faut donc que les termes sous la racine soient protégés. Pour ce faire, nous choisissons la modification suivante :  $\sqrt{\sum_{u \neq s} \langle \alpha^u \rangle}$  où  $\langle . \rangle$  représente la partie positive :  $\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Remarquons aussi que l'expression de  $\Delta \gamma_s$ , qui est fonction de  $\Delta G(\tau_{eff}^s)$ , conduit à une discontinuité au voisinage de  $\tau_{eff}^s = 0$  : pour  $\tau_{eff}^s < 0$ ,  $\Delta \gamma_s = 0$ , et

$$\lim_{\tau_{eff}^s \rightarrow 0^*} \Delta \gamma_s = \dot{\gamma}_0 \exp\left(\frac{-\Delta G_0}{k_B T}\right) \cdot \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \cdot \Delta t$$

## 2.1.1.4 Lois MONO\_DD\_CFC / MONO\_DD\_CFC\_IRRA / MONO\_DD\_FAT

La formulation des lois DD\_CFC [8], [9] et DD\_FAT [18] est construite à partir de calculs de dynamique des dislocations. Elle s'applique aux matériaux à structure cristalline Cubique à Faces Centrées (CFC) tels que les aciers austénitiques. A priori le modèle DD\_CFC n'est pas compatible avec un changement de trajet de chargement, en particulier les paramètres ne sont pas adaptés à une sollicitation cyclique (lorsqu'une dislocation "revient sur ses pas" sa cinétique est différente du fait d'une interaction différente avec les obstacles).

Les équations ci-dessous sont écrites pour chaque système de glissement  $s$ .

La direction de l'écoulement est donnée par :

$$\dot{\gamma}_s = \dot{p}_s \frac{\tau_s}{|\tau_s|} = \dot{p}_s \text{signe}(\tau_s) \text{ et l'intensité de l'écoulement par :}$$

$$\dot{p}_s = \dot{\gamma}_0 \left( \left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}} \right)^n - 1 \right) \text{ si } |\tau_s| \geq \tau_f + \tau_s^{forest}, \text{ sinon } \dot{p}_s = 0$$

avec  $n$  grand (pour représenter un modèle quasi élasto-plastique : pour le CFC, la dépendance en temps est en effet négligeable).

Par rapport au modèle initial [8], le seuil a été introduit ainsi que le terme  $-\dot{\gamma}_0$  pour assurer la continuité lorsque le seuil est franchi.

En pratique, le paramètre  $\dot{\gamma}_0$  est petit et le terme  $\left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}} \right)^n$  devient très vite largement supérieur à 1, à cause des grandes valeurs de l'exposant  $n$ .

$\tau_s^{forest}$  est une fonction d'écroissance dont les coefficients sont fournis par le mot-clé MONO\_DD\_\* (\*=CFC, FAT ou CC), et qui est décrite au § suivant.

Dans DD\_CFC, l'évolution de la densité de dislocation est donnée par :

$$\dot{\rho}_s = \frac{\dot{p}_s}{b} \left( A \frac{\sum_{j \in forest(s)} \sqrt{a_{sj}^{eff}} \rho_j}{\sum_{j=1,12} \sqrt{a_{sj}^{eff}} \rho_j} + B \sum_{j \in copla(s)} \sqrt{a_{sj}^{eff}} \rho_j - \gamma \rho_s \right)$$

$j \in forest(s)$  sont les systèmes de normales distinctes  $\mathbf{n}_j \neq \mathbf{n}_s$

$j \in copla(s)$  sont les systèmes de normales identiques  $\mathbf{n}_j = \mathbf{n}_s$

La valeur initiale de la densité de dislocation est :  $\rho_s(t=0) = \rho_s^0$  (champ fourni par l'utilisateur).

Comme  $a_{ij}^{eff} = C(\rho)^2 \cdot a_{ij}$ ,  $\tau_s^{forest}(\rho) = \mu b C(\rho) \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{sj} \rho_j}$  et

$$\dot{\rho}_s = \frac{\dot{p}_s}{b} \left( A \frac{\sum_{j \in forest(s)} \sqrt{a_{sj}} \rho_j}{\sum_{j=1,12} \sqrt{a_{sj}} \rho_j} + B C(\rho) \sum_{j \in copla(s)} \sqrt{a_{sj}} \rho_j - \gamma \rho_s \right)$$

Pour éviter tout problème de conditionnement de la matrice jacobienne, on choisit d'adimensionner le système en remplaçant la densité de dislocation par :  $\omega_s = b^2 * \rho_s$  et résoudre en  $\omega_s$ . Cela donne :

$$\dot{\omega}_s = \dot{p}_s h_s(\omega) \text{ avec } h_s(\omega) = \left( A \frac{\sum_{j \in forest(s)} \sqrt{a_{sj}} \omega_j}{\sum_{j=1,12} \sqrt{a_{sj}} \omega_j} + B C(\omega) \sum_{j \in copla(s)} \sqrt{a_{sj}} \omega_j - \frac{\gamma}{b} \omega_s \right)$$

**Remarque :** physiquement, la densité de dislocation doit rester positive. Numériquement, pour que tous les termes en  $\sqrt{\rho}$  soient licites, il faut tester la positivité de  $\rho$  et soit redécouper le pas de temps si cette valeur devient négative (par « hésitation » de l'algorithme au cours des itérations) soit introduire une partie positive dans les équations d'évolution. Cette dernière solution est choisie pour l'intégration explicite comme pour l'intégration implicite.

L'ensemble des équations différentielles régissant l'écoulement viscoplastique du modèle DD\_CFC s'écrit donc :

$$\dot{\gamma}_s = \dot{p}_s \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \quad (12 \text{ équations})$$

$$\dot{p}_s = \dot{\gamma}_0 \left( \left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}} \right)^n - 1 \right) \text{ si } |\tau_s| \geq \tau_f + \tau_s^{forest}, \text{ sinon } \dot{p}_s = 0 \quad (12 \text{ équations})$$

$$\dot{\omega}_s = \dot{p}_s h_s(\omega) \quad (12 \text{ équations}) \text{ avec : } \langle \omega_i \rangle = \begin{cases} \omega_i & \text{si } \omega_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$C(\omega) = 0.2 + 0.8 \frac{\ln \left( \alpha \sqrt{\sum_{i=1,12} \langle \omega_i \rangle} \right)}{\ln \left( \alpha b \sqrt{\rho_{ref}} \right)}$$

$$\tau_s^{forest}(\omega) = \mu C(\omega) \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{sj} \langle \omega_j \rangle}$$

$$h_s(\omega) = \left( A \frac{\sum_{j \in forest(s)} \sqrt{a_{sj}} \langle \omega_j \rangle}{\sum_{j=1,12} \sqrt{a_{sj}} \langle \omega_j \rangle} + B C(\omega) \sum_{j \in copla(s)} \sqrt{a_{sj}} \langle \omega_j \rangle - \frac{\gamma}{b} \langle \omega_s \rangle \right)$$

avec  $\omega_s = b^2 * \rho_s$

Dans le cas MONO\_DD\_CFC\_IRRA, l'évolution des variables liées à l'irradiation est donnée par :

$$\dot{\rho}_s^{loops} = - \xi \left( \sum_{j \in copla(s)} |\dot{\gamma}_j| \right) \left( \rho_s^{loops} - \rho^{sat} \right) \quad \dot{\varphi}_s^{voids} = - \zeta \left( \sum_{j \in copla(s)} |\dot{\gamma}_j| \right) \left( \varphi_s^{voids} - \varphi^{sat} \right)$$

l'expression de  $\tau_s^{forest}$  devient :  $\tau_s^{forest} = \mu \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{sj}^{eff} \omega_j + \alpha^{loops} \varphi^{loops} \rho_s^{loops} b^2 + \alpha^{voids} \varphi_s^{voids} \rho_s^{voids} b^2}$

ce qui, après multiplication par  $b^2$  :  $\omega_s^{loops} = b^2 * \rho_s^{loops}$  donne :

$$\dot{\omega}_s^{loops} = - \xi \left( \sum_{j \in copla(s)} |\dot{\gamma}_j| \right) (\omega_s^{loops} - \omega^{sat}) \text{ et } \tau_s^{forest} = \mu \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{sj}^{eff} \omega_j + \alpha^{loops} \varphi^{loops} \omega_s^{loops} + \alpha^{voids} \varphi_s^{voids} \omega^{voids}}$$

on peut remarquer au passage que les équations d'évolution de  $\omega_s^{loop}$  et  $\varphi_s^{voids}$  s'intègrent analytiquement :

$$\omega_s^{loops}(t + \Delta t) = \omega^{sat} + (\omega_s^{loops}(t) - \omega^{sat}) \exp\left(-\xi \sum_{j \in copla(s)} |\Delta \gamma_j|\right)$$

$$\varphi_s^{voids}(t + \Delta t) = \varphi^{sat} + (\varphi_s^{voids}(t) - \varphi^{sat}) \exp\left(-\zeta \sum_{j \in copla(s)} |\Delta \gamma_j|\right)$$

Dans le cas DD\_FAT, l'évolution de la densité de dislocation est donnée par :

$$\dot{\rho}_s = \frac{\dot{p}_s}{b} \left( \frac{1}{d} + \frac{\sqrt{\sum_{u \neq s} \rho_u}}{K} - g_{c0} \rho_s \right)$$

En adimensionnant comme ci-dessus, c'est à dire en posant :

$$\omega_s = b^2 \times \rho_s$$

on obtient :

$$\dot{\omega}_s = \dot{p}_s h_s(\omega) \text{ avec } h_s(\omega) = \left( \frac{b}{d} + \frac{\sqrt{\sum_{u \neq s} \omega_u}}{K} - g_{c0} \frac{\omega_s}{b} \right)$$

D'où en introduisant les parties positives :

$$\dot{\gamma}_s = \dot{p}_s \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \quad (12 \text{ équations})$$

$$\dot{p}_s = \dot{\gamma}_0 \left( \left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}} \right)^n - 1 \right) \text{ si } |\tau_s| \geq \tau_f + \tau_s^{forest}, \text{ sinon } \dot{p}_s = 0 \quad (12 \text{ équations})$$

$$\dot{\omega}_s = \dot{p}_s h_s(\omega) \quad (12 \text{ équations}) \text{ avec : } \langle \omega_i \rangle = \begin{cases} \omega_i & \text{si } \omega_i > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$C(\omega) = 1.$$

$$\tau_s^{forest}(\omega) = \mu \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{sj} \langle \omega_j \rangle}$$

$$h_s(\omega) = \left( \frac{b}{d} + \frac{\sqrt{\sum_{u \neq s} \langle \omega_u \rangle}}{K} - g_{c0} \frac{\langle \omega_s \rangle}{b} \right)$$

avec  $\omega_s = b^2 * \rho_s$

La formulation des lois DD\_CC (avec ou sans irradiation) est construite à partir de calculs de dynamique des dislocations 40. Elle s'applique aux matériaux à structure cristalline Cubique Centrée (CC)

Deux variantes dans la formulation du comportement existent (cas 1 et cas 2).

Les équations ci-dessous sont écrites pour chaque système de glissement  $s$ .

L'écoulement visco-plastique est obtenu par moyenne harmonique de deux régimes (basse température, et haute température).

On choisit ici de faire apparaître les inconnues  $\rho$  (représentant l'ensemble des densités de dislocation  $\rho^s$  et  $\rho_{irr}^s$ ) et  $\tau_{eff}^s$  (qui est une inconnue supplémentaire a priori. On verra que l'algorithme de résolution proposé permet de tout exprimer en fonction de  $\rho$ ).

$\rho_{irr}^s$  désigne la densité de dislocations induite par l'irradiation (cas de MONO\_DD\_CC\_IRRA), et n'est pas utilisée pour le comportement MONO\_DD\_CC afin de limiter le nombre de variables internes.

$\tau^s$  étant la cission résolue sur le système  $s$  :

$$\text{le glissement plastique est obtenue par : } \frac{1}{\dot{\gamma}^s} = \frac{1}{\dot{\gamma}_{nuc}^s} + \frac{1}{\dot{\gamma}_{prob}^s} \quad (\text{eq. CC}_1)$$

$$\dot{\gamma}_{nuc}^s = \rho_m^s b H \cdot l^s(\rho, \tau_{eff}^s) \cdot \exp\left(\frac{-\Delta G(\tau_{eff}^s)}{k_B T}\right) \text{sgn}(\tau_s) \quad (\text{eq. CC}_2)$$

$$\Delta G(\tau_{eff}^s) = \Delta G_0 \left(1 - \left(\frac{|\tau_{eff}^s|}{\tau_0}\right)^{0.5}\right) \quad (\text{avec : } \tau_{eff}^s < \tau_0 \text{ et } 0 < \Delta G < \Delta G_0) \quad (\text{eq. CC}_3)$$

$$\tau_{eff}^s(\tau^s, \rho) = |\tau^s| - \tau_F - \tau_{LR}^s(\rho) - \tau_{LT}^s(\rho, \tau_{eff}^s) \quad \text{cas 1} \quad (\text{eq. CC}_5)$$

$$\tau_{eff}^s(\tau^s, \rho) = |\tau^s| - \tau_c \quad \tau_c = \tau_F + \sqrt{(\tau_{LR}^s(\rho))^2 - \tau_{LT}^s(\rho, \tau_{eff}^s)^2} \quad \text{cas 2}$$

$$\tau_{LR}^s(\rho) = \beta \mu b \alpha_{AT}^s(\rho) \sqrt{\rho_{tot}^s} \quad \text{ou bien (cas 2)} \quad \tau_{LR}^s(\rho) = \mu b \sqrt{a_{AT}^s(\rho) \rho^s} \quad (\text{eq. CC}_6)$$

$$\rho_{tot}^s(\rho) = \sum_j \rho^j + \rho_{irr}^s \quad (\text{eq. CC}_7) \quad \text{ou bien (cas 2)} \quad \rho_{tot}^s(\rho) = \sum_{j \neq s} \rho^j + \rho_{irr}^s$$

$$\alpha_{AT}^s(\rho) = \sqrt{\sum_j a_{AT}^{sj} \frac{\rho^j}{\rho_{tot}^s} + a_{irr}^s \frac{\rho_{irr}^s}{\rho_{tot}^s}} \quad (\text{eq. CC}_8)$$

$$\tau_{LT}^s(\rho, \tau_{eff}^s) = \max\left(0; (1 - \beta) \alpha_{AT}^s(\rho) \mu b \left(\frac{1}{\lambda^s(\rho, \tau_{eff}^s)} - \frac{1}{2 \alpha_{AT}^s(\rho) R^s(\rho, \tau_{eff}^s) + l_c(T)}\right)\right) \quad (\text{eq. CC}_9)$$

$$\text{ou bien (cas 2)} \quad \tau_{LT}^s(\rho, \tau_{eff}^s) = \max\left(0; \alpha_{AT}^s(\rho) \mu b \left(\frac{1}{\lambda^s(\rho, \tau_{eff}^s)} - \frac{1}{2 \alpha_{AT}^s(\rho) R^s(\rho, \tau_{eff}^s) + l_c(T)}\right)\right)$$

$$\frac{1}{\lambda^s(\boldsymbol{\rho}, \tau_{eff}^s) + D} = \min\left(\sqrt{\rho_{tot}^s(\boldsymbol{\rho})}; (D + 2R^s(\boldsymbol{\rho}, \tau_{eff}^s))\rho_{tot}^s(\boldsymbol{\rho})\right) \quad (\text{eq. CC}_{10})$$

$$R^s(\boldsymbol{\rho}, \tau_{eff}^s) = \frac{\mu b}{2\tau_0 \left(1 - \frac{\Delta G(\tau_{eff}^s)}{\Delta G_0}\right)^2} \quad (\text{eq. CC}_{11})$$

$$l^s(\boldsymbol{\rho}, \tau_{eff}^s) = \max\left(\lambda^s(\boldsymbol{\rho}, \tau_{eff}^s) - 2\alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho})R^s(\boldsymbol{\rho}, \tau_{eff}^s) ; l_c\right) \quad (\text{eq. CC}_{12})$$

$$\dot{\gamma}_{prob}^s = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{|\tau^s|}{\tau_F + \tau_{LR}^s(\boldsymbol{\rho}) + (1-\beta)\alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho})\mu b \left(\frac{1}{\lambda^s(\boldsymbol{\rho}, \tau_{eff}^s)}\right)} \right)^n \text{sgn}(\tau^s) \quad (\text{eq. CC}_{13})$$

$$\text{ou bien (cas 2)} \quad \dot{\gamma}_{prob}^s = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{|\tau^s|}{\tau_c} \right)^n \text{sgn}(\tau^s)$$

Les paramètres sont :  $\rho_m^s, b, H, \Delta G_0, \tau_0, \tau_F, \beta, \mu, a_{irr}, l_c(T), D, \dot{\gamma}_0, n$  et la matrice d'interaction  $\alpha_{AT}^{sr}$

Les lois d'évolution des densités de dislocations ( $\rho^s$  et  $\rho_{irr}^s$ ) sont :

$$\dot{\rho}^s = \frac{|\dot{\gamma}^s|}{b} \left( \frac{1}{d_{lath}} + \frac{\sqrt{a_{self}}\rho^s}{K_{self}} + \frac{\sum_{j \neq s} \sqrt{a^{sj}}\rho^j}{K_f} - \gamma^s \rho^s \right) \quad \text{et} \quad \dot{\rho}_{irr}^s = -\xi \rho_{irr}^s |\dot{\gamma}^s| \quad (\text{eq. CC}_{14})$$

$$\frac{1}{\gamma^s} = \frac{1}{\gamma_{AT}^s} + \frac{2\pi \tau_{eff}^s(\boldsymbol{\rho})}{\mu b} \quad \text{et} \quad a^{sj} = a_{AT}^{sj} \left(1 - \frac{\tau_{eff}^s(\boldsymbol{\rho})}{\tau_0}\right),$$

avec les paramètres  $d_{lath}, a_{self}, K_{self}, K_f, \xi, \gamma_{AT}^s$

**Remarque** : physiquement, la densité de dislocation doit rester positive. Numériquement, pour que tous les termes en  $\sqrt{\rho}$  soient licites, il faut tester la positivité de  $\rho$  et soit redécouper le pas de temps si cette valeur devient négative (par « hésitation » de l'algorithme au cours des itérations) soit introduire une partie positive dans les équations d'évolution. Cette dernière solution est choisie pour l'intégration explicite comme pour l'intégration implicite.

## 2.1.2 Exemples de relations d'érouissage cinématique

MONO\_CINE1

$$\Delta \alpha_s = h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) = \Delta \gamma_s - d \alpha_s \Delta p_s$$

Le paramètre est :  $d$ .

MONO\_CINE2

$$\Delta \alpha_s = h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) = \Delta \gamma_s - d \alpha_s \Delta p_s - \left( \frac{|c \alpha_s|}{M} \right)^m \frac{\alpha_s}{|\alpha_s|}$$

Les paramètres étant alors :  $d, M, m, c$ .

## 2.1.3 Exemples de relations d'écoulement isotrope

L'écoulement isotrope  $R_s(p_r)$  apparaissant dans certaines relations d'écoulement (MONO\_VISC1, MONO\_VISC2) peut être de la forme :

**MONO\_ISOT1**

$$R_s(p) = R_0 + Q \left( \sum_{r=1}^{ns} h_{sr} (1 - e^{-b p_r}) \right); \text{ les paramètres sont : } R_0, Q, b, h_{sr}.$$

**MONO\_ISOT2**

$$R_s(p) = R_0 + Q_1 \sum_r h_{sr} (1 - e^{-b_1 p_r}) + Q_2 (1 - e^{-b_2 p_s}); \text{ les paramètres sont : } R_0, Q_1, b_1, b_2, h_{sr}, Q_2.$$

$h_{sr}$  une matrice carrée symétrique d'interaction entre systèmes de glissement (voir annexe 4).

Dans le cas où un seul un coefficient  $H$  est fourni, la matrice  $h_{sr}$  prend une forme très simple :

$$h_{rs} = 1 \text{ si } r = s \text{ et } h_{rs} = H \text{ si } r \neq s, \text{ avec par défaut } H = 0 \text{ (matrice identité).}$$

**Remarque** : la combinaison des lois **MONO\_VISC1**, **MONO\_ISOT1**, **MONO\_CIN1** correspond à la loi cristalline connue sous le nom de Meric-Cailletaud 40.

### 2.1.3.1 MONO\_DD\_CFC / MONO\_DD\_FAT

La loi d'écoulement des modèles DD\_CFC et DD\_CC est :  $\tau_s^{forest} = \mu b \sqrt{\sum_{j=1, n_s} a_{sj}^{eff} \rho_j}$

$$\text{et } a_{ij}^{eff} = C(\rho)^2 \cdot a_{ij} \text{ avec } C(\rho) = 0.2 + 0.8 \frac{\ln\left(\alpha b \sqrt{\sum_{i=1,12} \rho_i}\right)}{\ln\left(\alpha b \sqrt{\rho_{ref}}\right)}$$

où  $a_{ij}$  représente la matrice d'interaction entre systèmes de glissement, dont la forme particulière est fournie en annexe 4. Celle-ci diffère suivant la loi MONO\_DD\_CFC ou MONO\_DD\_CC.

La loi DD\_FAT est :  $\tau_s^{forest}(\rho) = \mu b \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{sj} \rho_j}$ , ce qui correspond à  $C(\rho) = 1$ .

## 2.2 Systèmes de glissement et comportement global du monocristal

Un monocristal est composé de une ou plusieurs familles de systèmes de glissement, (cubique, octaédrique, basal, prismatique,...), chaque famille comprenant un certain nombre de systèmes (12 pour la famille octaédrique par exemple).

A chaque famille de système de glissement sont associés une loi d'écoulement, un type d'écoulement cinématique et isotrope, et des valeurs des paramètres pour ces lois. En d'autres termes, on ne prévoit pas de faire varier les relations de comportement ou les coefficients au sein d'une même famille de systèmes de glissement. Par contre, d'une famille à l'autre, les lois de comportement peuvent changer, ainsi que les valeurs des paramètres.

Un système de glissement est déterminé par un tenseur d'orientation (ou tenseur de Schmid) construit à partir des définitions cristallographiques de :

- la direction de glissement du système  $s$  (définie par le vecteur unitaire  $\mathbf{m}_s$ )
- et de la normale au plan de glissement (définie par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}_s$ ).

## 2.2.1 Petites déformations, configuration initiale

En petites déformations, le tenseur d'orientation est défini par :

$$\mu_{ij}^s = \frac{1}{2} (\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{m}_i)$$

Du point de vue du comportement au point matériel, ce tenseur intervient pour le calcul de la cission résolue.

$$\boldsymbol{\tau}^s = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\mu}^s$$

et celui de la vitesse de déformation viscoplastique globale  $\mathbf{E}^{vp}$ , définie à partir de la connaissance des vitesses de glissement  $\dot{\gamma}^s$  pour tous les systèmes de glissement :

$$\dot{\mathbf{E}}_{ij}^{vp} = \sum_{s \in g} \dot{\gamma}^s \mu_{ij}^s$$

De plus, le monocristal peut être orienté par rapport aux axes globaux de définition des coordonnées. Cette orientation est définie pour chaque maille ou groupe de mailles (typiquement pour chaque grain) par la donnée de 3 angles nautiques ou 3 angles d'Euler.

Les composantes du tenseur d'orientation  $\boldsymbol{\mu}^s$ , définies dans le repère lié au monocristal, sont alors exprimées dans le repère global en utilisant ces angles nautiques. En petites déformations, elles sont fixes dans la configuration initiale.

De plus, au niveau d'un point de Gauss, on postule une relation d'élasticité sur les tenseurs globaux:

- déformation totale macroscopique  $\mathbf{E}$
- déformation viscoplastique macroscopique  $\mathbf{E}^{vp}$
- contrainte macroscopique :  $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{th} - \mathbf{E}^{vp})$$

où  $\boldsymbol{\Lambda}$  représente l'opérateur d'élasticité (isotrope ou orthotrope)

## 2.2.2 Petites déformations, rotation du réseau cristallin

Une bonne approximation de l'effet de la déformation sur le comportement du monocristal consiste à prendre en compte la rotation du réseau cristallin. Cette rotation est intéressante à deux titres :

- sa prise en compte effective dans les calculs est cohérente avec des déformations non infiniment petites (dans les calculs courants, il n'est pas rare d'atteindre 10%). Elle est un préliminaire à un modèle complet de grandes déformations sur le monocristal.
- C'est une information intéressante pour le post-traitement, car elle peut être confrontée à des résultats expérimentaux.

On décrit ici (suivant 40, 40, 40) la méthode de prise en compte de la rotation de réseau cristallin dans le cadre général des petites déformations. Les principales hypothèses physiques sont :

- connaissant le tenseur vorticité  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  ou taux de rotation, qui est la partie antisymétrique du tenseur  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ , on postule une décomposition additive en une partie dite rotation plastique  $\hat{\boldsymbol{\omega}}^p$  (partie antisymétrique de la rotation plastique) et une partie «élastique»  $\hat{\boldsymbol{\omega}}^e$ , qui permettra de calculer la rotation du réseau cristallin ;
- on admet pour le moment que l'on peut calculer le tenseur taux de rotation, tout en effectuant l'intégration du comportement avec un tenseur des déformations linéarisées. Cette limitation tombe naturellement avec le modèle complet en grandes déformations, mais on suppose ici que l'on peut raisonner de façon découplée. On a donc, sous forme incrémentale :

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} - (\Delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1})^T) \text{ et } \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}^e = \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}} - \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}^p \text{ qui sont des tenseurs antisymétriques.}$$

Le calcul de  $\Delta \hat{\omega}^p$  est effectué en fin d'intégration : il est stocké et utilisé à l'itération suivante (un calcul purement implicite impliquerait de résoudre le système d'équations décrit au paragraphe 16 en ajoutant toutes les équations sur l'orientation du réseau, ce qui alourdirait beaucoup le calcul).

Une fois l'incrément de rotation  $\Delta \hat{\omega}^e$  connu, on extrait le vecteur « axial » [voir par exemple R5.03.40] :  $\Delta \omega^e$  tel que  $\Delta \omega^e \wedge \mathbf{U} = \Delta \hat{\omega}^e \cdot \mathbf{U}$  et on calcule l'angle de rotation et le vecteur qui correspond à l'axe de rotation :

$$\Delta \theta = \|\Delta \omega^e\| \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_\omega = \frac{\Delta \omega^e}{\Delta \theta}.$$

La matrice d'incrément de rotation est alors obtenue par la formule d'Euler-Rodrigues :

$$\Delta Q = \mathbf{I}_d + \sin(\Delta \theta) \hat{\mathbf{n}}_\omega + (1 - \cos(\Delta \theta)) \hat{\mathbf{n}}_\omega \cdot \hat{\mathbf{n}}_\omega \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{n}}_\omega \text{ est la matrice antisymétrique issue de } \mathbf{n}_\omega$$

Ce qui permet de mettre à jour la matrice de rotation du réseau :  $Q_+ = \Delta Q \cdot Q$ .

Elle permet d'actualiser le tenseur d'orientation par :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^s &= Q_+ \mathbf{n}_0^s \\ \mathbf{m}^s &= Q_+ \mathbf{m}_0^s \end{aligned}$$

Le comportement est alors intégré avec cette définition du réseau cristallin.

Il reste alors à actualiser l'incrément de rotation plastique :  $\Delta \hat{\omega}^p = \frac{1}{2} \sum_s \Delta \gamma^s (\mathbf{m}^s \otimes \mathbf{n}^s - \mathbf{n}^s \otimes \mathbf{m}^s)$

Les variables internes supplémentaires sont :  $Q, \Delta \omega^p, \Delta \omega^e, \theta$

En pratique la rotation de réseau est prise en compte via le mot-clé `ROTA_RESEAU` de la commande `DEFI_COMPOR` [U4.43.06]. Elle n'est effective que pour l'intégration implicite du comportement `MONOCRISTAL`.

## 2.2.3 Grandes déformations

Propriétés attendues : le formalisme choisi doit être objectif, et doit conserver l'incompressibilité plastique ( $\det(\mathbf{F}^p) = 1$ ). On utilise la décomposition multiplicative  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$  avec la configuration intermédiaire relâchée isocline de Mandel.

La loi d'(hyper-)élasticité choisie utilise le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S} = J^e \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{e-T}$  et la déformation de Green-Lagrange associée au gradient de déformation élastique :

$$\mathbf{E}_{GL}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e - \mathbf{I}_d) \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\Lambda} : \mathbf{E}_{GL}^e.$$

Sur chaque système de glissement  $s$ , la cission résolue est écrite avec le tenseur de Mandel  $\mathbf{M}$  défini par  $\mathbf{M} = J_e \mathbf{F}^{eT} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{e-T}$  de la façon suivante :  $\tau_s = \mathbf{M} : \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s$  (cf. 40, 40).

En effet, la puissance des efforts intérieurs peut s'écrire :  $\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$

et  $\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = (\dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p) (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} = \mathbf{L}^e + \mathbf{F}^e \mathbf{L}^p (\mathbf{F}^e)^{-1}$

donc  $\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \left[ \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L}^e + \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{F}^e \mathbf{L}^p (\mathbf{F}^e)^{-1}) \right] = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \mathbf{E}_{GL}^e + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{M} : \mathbf{L}^p$

La puissance dissipée plastiquement s'écrit :  $\mathbf{M} : \mathbf{L}^p$  et aussi :  $\sum_s \dot{\gamma}_s \tau_s$ , donc

$$\mathbf{M} : \mathbf{L}^p = \mathbf{M} : \sum_s \dot{\gamma}_s \boldsymbol{\mu}_s = \sum_s \dot{\gamma}_s \mathbf{M} : \boldsymbol{\mu}_s, \text{ d'où } \tau_s = \mathbf{M} : \boldsymbol{\mu}_s$$

Pour chaque loi de comportement cristalline, les équations d'écoulement et d'évolution des variables internes s'écrivent classiquement sur chaque système de glissement :

$$\dot{\gamma}_s = g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) \text{ ou } \dot{\alpha}_s = h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$$

Par contre la relation reliant la déformation plastique aux glissements des systèmes actifs s'écrit maintenant :  $\dot{\mathbf{F}}^p = \left( \sum_s \dot{\gamma}_s \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s \right) \mathbf{F}^p$

## 2.3 Comportement du polycristal homogénéisé

Dans le cas de polycristal homogénéisé, il faut définir chaque phase mono-cristalline par son orientation, sa proportion (fraction volumique) et le comportement associé. Une orientation globale du polycristal peut être définie. Il faut de plus définir une règle de localisation.

Le comportement monocristallin est construit comme précédemment à partir du comportement elasto-visco-plastique précédent et de la donnée de familles de systèmes de glissement.

### 2.3.1 Comportement de type POLYCRISTAL

En plus du comportement monocristallin décrit précédemment, on ajoute une échelle de modélisation, qui représente l'assemblage des phases.

Au niveau d'un point de Gauss, on postule une relation d'élasticité sur les tenseurs globaux:

- déformation totale macroscopique  $\mathbf{E}$
- déformation viscoplastique macroscopique  $\mathbf{E}^{VP}$
- contrainte macroscopique :  $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{th} - \mathbf{E}^{VP})$$

$\boldsymbol{\Lambda}$  représente l'opérateur d'élasticité (isotrope ou orthotrope)

- De plus, connaissant l'ensemble des variables internes relatives aux systèmes de glissement de chaque phase, les paramètres de comportement de chaque phase, les orientations et fractions volumiques de chaque phase, et le type de méthode de localisation,
- pour chaque phase monocristalline (ou « grain »), définie par une orientation et une proportion  $f_g$ , une relation de localisation des contraintes, de la forme générale (à exprimer dans le repère local de chaque phase)

$$\sigma_g = L(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{E}^{vp}, \boldsymbol{\varepsilon}_g^{vp}, \boldsymbol{\beta}_g)$$

et pour chaque système de glissement de chaque phase, des relations de comportement relatives à chaque système de glissement, similaires au cas du monocristal :

- Relation d'écoulement :

$$\dot{\gamma}_s = g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s), \text{ avec, } \dot{p}_s = |\dot{\gamma}_s| \text{ et } \dot{\alpha}_s = f(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$$

- Evolution de l'écroissage cinématique ou de la densité de dislocations :

$$\dot{\alpha}_s = h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$$

- Evolution de l'écroissage isotrope défini par une fonction :  $R(p_s)$

- Déformations viscoplastiques de la phase :  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{vp_g} = \sum_{s \in g} \dot{\gamma}_s^s \boldsymbol{\mu}_{ij}^s$

Il reste alors les équations d'homogénéisation :  $\dot{\mathbf{E}}^{vp} = \sum_g f_g \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_g^{vp}$

### 2.3.1.1 Relation de changement d'échelle

Deux relations de localisation de type  $\boldsymbol{\sigma}_g = L(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{E}^{vp}, \boldsymbol{\varepsilon}_g^{vp}, \boldsymbol{\beta}_g)$  sont disponibles dans la version actuelle :

- La relation de Berveiller-Zaoui [bib5] établie sur la notion d'autocoherence. Cette relation est validée sous certaines conditions, à savoir : isotropie du matériau, comportement élastique homogène et chargement monotone :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^g = \boldsymbol{\Sigma}_{ij} + \alpha \mu \left( \mathbf{E}_{ij}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{vp_g} \right) \quad \frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{3}{2} \mu \frac{\| \mathbf{E}_{ij}^{vp} \|}{J_2(\boldsymbol{\Sigma}_{ij})}$$

- La deuxième relation, inspirée de la précédente, et développée plus particulièrement pour des chargements cycliques [bib4] permet de donner une bonne description pour schématiser les interactions entre les grains :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^g = \boldsymbol{\Sigma}_{ij} + \mu \left( \mathbf{B}_{ij} - \boldsymbol{\beta}_{ij}^g \right) \quad \mathbf{B}_{ij} = \sum_g f_g \boldsymbol{\beta}_{ij}^g$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_{ij}^g = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{vp_g} - D \left( \boldsymbol{\beta}_{ij}^g - \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{vp_g} \right) \left\| \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{vp_g} \right\|$$

où  $D$  et  $\delta$  sont des paramètres caractéristiques du matériau et de la température.

## 3 Intégration locale et mise en œuvre numérique

### 3.1 Système d'équations à résoudre

#### 3.1.1 Comportement de type MONOCRISTAL

Le comportement local du monocristal est défini, à un instant donné de la discrétisation en temps et au niveau d'un point d'intégration d'un élément fini, par la donnée :

- du tenseur de contraintes macroscopiques à l'instant précédent  $\boldsymbol{\Sigma}(t_{i-1}) = \boldsymbol{\Sigma}^-$ ,
- des variables internes à l'instant précédent, pour chaque système de glissement :  $\alpha_s(t_{i-1}), \gamma_s(t_{i-1}), p_s(t_{i-1})$ ,
- et du tenseur d'accroissement de déformation totale fournie par l'itération n de l'algorithme global de résolution  $\Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E}_i^n$  (avec les notations de [R5.03.01]).

L'intégration consiste à trouver :

- le tenseur de contraintes macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(t_i)$
- et les variables internes  $\alpha_s = \alpha_s(t_i), \gamma_s = \gamma_s(t_i), p_s = p_s(t_i)$

vérifiant les équations de comportement dans chaque système de glissement (qui sont des relations mono dimensionnelles), et les relations de passage entre les tenseurs macroscopique et l'ensemble des directions de glissement. Notation : on écrit les équations sous forme discrétisée de façon :

- explicite, si les quantités notées  $A^{+/-}$  sont évaluées à l'instant  $t_{i-1}$  :  $A^{+/-} = A^- = A(t_{i-1})$

• implicite, si elles sont évaluées à l'instant  $t_i : A^{+/-} = A^+ = A(t_i)$

Les équations à intégrer peuvent se mettre sous la forme générale suivante :

Etant donnés, en un point de Gauss, les tenseurs :

$\Delta E$  : variation de déformation à l'instant  $t_i$ ,

$E(t_{i-1}) = E^-$  : déformation à l'instant  $t_{i-1}$ ,

$\Sigma(t_{i-1}) = \Sigma^-$  : contrainte macroscopique à l'instant  $t_{i-1}$ ,

$\alpha_s(t_{i-1}), \gamma_s(t_{i-1}), p_s(t_{i-1})$  : variables internes pour chaque système de glissement à  $t_{i-1}$ ,

Il faut trouver :

$\Sigma = \Sigma(t_i)$  : contrainte macroscopique à l'instant  $t_i$ , dans le repère correspondant à l'orientation globale

$\alpha_s = \alpha_s(t_i)$

$\gamma_s = \gamma_s(t_i)$

$p_s = p_s(t_i)$

vérifiant :

$D^{-1} \Sigma = (D^{-1}) \Sigma^- + (\Delta E - \Delta E^{th} - \Delta E^{vp})$ , où  $\Lambda$  peut dépendre de la température, et peut correspondre à une élasticité orthotrope.

$$\Delta E^{vp} = \sum_s \mu_s \Delta \gamma_s$$

pour chaque système de glissement (de l'ensemble des familles de systèmes) :

$n_s$  relations d'écoulement : soit en viscoplasticité  $\Delta \gamma_s = g(\tau_s^{+/-}, \alpha_s^{+/-}, \gamma_s^{+/-}, p_s^{+/-})$

avec  $\Delta p_s = f(\tau_s^{+/-}, \alpha_s^{+/-}, \gamma_s^{+/-}, p_s^{+/-})$

soit en plasticité  $F(\tau_s^{+/-}, \alpha_s^{+/-}, \gamma_s^{+/-}, p_s^{+/-}) \leq 0, F \Delta p_s = 0$

,

avec  $\Delta p_s = |\Delta \gamma_s|$

$n_s$  équations d'évolutions de l'érouissage cinématique :  $\Delta \alpha_s = h(\tau_s^{+/-}, \alpha_s^{+/-}, \gamma_s^{+/-}, p_s^{+/-})$

$n_s$  équations d'évolution de l'érouissage isotrope :  $R_s(p_s^{+/-})$

Ceci est résolu soit de façon explicite (*Runge\_Kutta*), soit implicite (*Newton*).

### 3.1.2 Comportement de type POLYCRISTAL

Les relations de comportement discrétisées sont :

Etant donnés (en un point de Gauss) les tenseurs globaux :

• accroissement de déformation totale  $\Delta E$ ,

• déformation totale à l'instant précédent,  $E(t_{i-1}) = E^-$

• contrainte à l'instant précédent :  $\Sigma(t_{i-1}) = \Sigma^-$ ,

• l'ensemble des variables internes  $\alpha_s^-, \gamma_s^-, p_s^-$  relatives aux systèmes de glissement de chaque phase,

• les paramètres de comportement de chaque phase, les orientations et fractions volumiques de chaque phase, et le type de méthode de localisation.

Il faut trouver  $\Sigma = \Sigma(t_i), \alpha_s = \alpha_s(t_i), \gamma_s = \gamma_s(t_i), p_s = p_s(t_i)$  vérifiant :

•au niveau du point de Gauss :  $\Sigma = \Lambda(\Lambda_-^{-1})\Sigma^- + \Lambda(\Delta E - \Delta E^{th} - \Delta E^{vp})$ , dans le repère global,

•pour chaque phase (ou « grain »), définie par une orientation et une proportion  $f_g$ , une relation de localisation des contraintes, de la forme générale (à exprimer dans le repère local de chaque phase)

$$\sigma_g = L(\Sigma, E^{vp}, \varepsilon_g^{vp}, \beta_g)$$

•et pour chaque système de glissement de chaque phase :

- $\Delta \varepsilon_g^{vp} = \sum_s m_s \Delta \gamma_s$
- $n_s$  équations :  $\tau^s = \Sigma_{ij} : \mu_{ij}^s$
- $n_s$  relations d'écoulement :  $\Delta \gamma_s = g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$  avec  $\Delta p_s = |\Delta \gamma_s|$
- $n_s$  évolutions de l'écrouissage :  $\Delta \alpha_s = h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$
- $F(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) \leq 0, F \cdot \Delta p_s = 0$ , (en plasticité indépendante du temps)

Il reste alors les équations d'homogénéisation :  $\Delta E^{vp} = \sum_g f_g \Delta \varepsilon_g^{vp}$

Les comportements viscoplastiques relatifs à chaque système de glissement sont identiques au cas de la microstructure.

Dans la version actuelle de Code\_Aster, ces relations de comportement sont intégrés uniquement de façon explicite.

## 3.2 Résolution implicite du comportement MONOCRISTAL

Il faut donc résoudre un système de la forme générale suivante (cf. 16) :

$$R(Y) = \begin{pmatrix} s(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ e(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ n_s \begin{pmatrix} a(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ g(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ p(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} \Sigma - (\Lambda_-^{-1}) \Sigma^- - (\Delta E - \Delta E^{th} - \Delta E^{vp}) \\ \Delta E^{vp} - \sum_s \mu_s \Delta \gamma_s \\ n_s \begin{pmatrix} \Delta \alpha_s - h(\tau_s^+, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ \Delta \gamma_s - g(\tau_s^+, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ \Delta p_s - f(\tau_s^+, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0$$

De manière plus contractée, on pose :

$$R(\Delta y) = 0 = \begin{pmatrix} s(\Delta y) \\ e(\Delta y) \\ a(\Delta y) \\ g(\Delta y) \\ p(\Delta y) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta y = \begin{pmatrix} \Delta \Sigma \\ \Delta E^{vp} \\ \Delta \alpha_s \\ \Delta \gamma_s \\ \Delta p_s \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système de  $6 + 6 + 3n_s$  équations non linéaires (en 3D), on utilise une méthode de Newton : on construit une suite de vecteurs solution de la façon suivante :

$$Y_{k+1} = Y_k - \left( \frac{dR}{dY_k} \right)^{-1} R(Y_k)$$

Il faut donc définir les valeurs initiales  $Y_0$ , et calculer la matrice jacobienne du système :  $\frac{dR}{dY_k}$  (celle-ci est détaillée en annexe pour les comportements viscoplastiques décrits précédemment). Elle a la forme suivante :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial s}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial s}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial s}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial s}{\partial \Delta p_s} \\ \frac{\partial e}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial e}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial e}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial e}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial e}{\partial \Delta p_s} \\ \frac{\partial a}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial a}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial a}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial a}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial a}{\partial \Delta p_s} \\ \frac{\partial g}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial g}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial g}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial g}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial g}{\partial \Delta p_s} \\ \frac{\partial p}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial p}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial p}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial p}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial p}{\partial \Delta p_s} \end{bmatrix}$$

### 3.2.1 Résolution implicite – Système d'équations réduit

Dans l'expression des 6 composantes du tenseur des contraintes,  $\Delta E^{vp}$  peut être exprimée en fonction de  $\sum_s \mu_s \Delta \gamma_s$  donc une équation peut être éliminée du système global à résoudre.

Comme  $\Delta p = |\Delta \gamma|$ , l'équation en  $\Delta p$  peut être éliminée.

Dans le cas de **MONO\_CINE1**,  $\Delta \alpha$  s'exprime directement en fonction de  $\Delta \gamma$ . La taille du système à résoudre se réduit donc à  $6+n_s$  équations en  $\Delta \gamma$ , avec  $n_s$  le nombre de systèmes de glissement.

Dans le cas de **MONO\_CINE2**, on calcule numériquement  $\Delta \alpha$  en fonction de  $\Delta \gamma$ , par une méthode de sécante.

L'équation se rapportant aux composantes des contraintes se réduit à :

$$R_1^i(\Sigma_i, \tau_s, \Delta \gamma_s, \Delta \alpha_s, R_s(p_r)) = \Lambda^{-1} \Sigma_i - (\Lambda_{-}^{-1} \Sigma_{i-}) - \Delta \varepsilon + \Delta \varepsilon^{th} + \sum_s \mu_s g_s(\tau_s, \Delta \gamma_s, \Delta \alpha_s, R_s(p_r)) = 0$$

L'équation se rapportant au paramètre d'écroissage  $\Delta \gamma$  s'écrit sous la forme :

$$R_2^s(\Sigma_i, \tau_s, \Delta \gamma_s, \Delta \alpha_s, R_s(p_r)) = \Delta \gamma_s - g_s(\tau_s, \Delta \gamma_s, \Delta \alpha_s, R_s(p_r)) = 0$$

avec  $i=1 \text{ à } 6$ ,  $s=1 \text{ à } n_s$  et  $r=1 \text{ à } n_s$

Dans le cas de **MONO\_VISC1** :

$$g_s = \Delta t \left\langle \frac{|\tau_s - c \alpha_s| - R_s(p_r)}{k} \right\rangle^n \frac{\tau_s - c \alpha_s}{|\tau_s - c \alpha_s|} \quad \text{avec } \tau_s = \Sigma : \mu_s$$

Dans le cas de **MONO\_VISC2** :

$$g_s = \Delta t \left\langle \frac{|\tau_s - c\alpha_s - a\gamma_s| - R_s(p_r) + \frac{d}{2c}(c\alpha_s)^2}{k} \right\rangle^n \frac{\tau_s - c\alpha_s - a\gamma_s}{|\tau_s - c\alpha_s - a\gamma_s|}$$

La matrice jacobienne du système réduit s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^i}{\partial \Sigma_j} & \frac{\partial R_1^i}{\partial \Delta \gamma_s} \\ \frac{\partial R_2^s}{\partial \Sigma_i} & \frac{\partial R_2^s}{\partial \Delta \gamma_r} \end{bmatrix} \text{ de dimension } (6+n_s) \times (6+n_s)$$

$$\text{avec } \frac{\partial R_1^i}{\partial \Sigma_j} = (\Lambda^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i \frac{\partial g_s}{\partial \Sigma_j} = (\Lambda^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i \frac{\partial g_s}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial \Sigma_j} = (\Lambda^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i (\mu_s)_j \frac{\partial g_s}{\partial \tau_s}$$

$$\frac{\partial R_2^s}{\partial \Sigma_i} = \frac{\partial \left( -g_s(\tau_s, \Delta\alpha_s, \Delta\gamma_s, R_s(p_r)) \right)}{\partial \Sigma_i} = \frac{\partial (-g_s)}{\partial \tau_s} \cdot \frac{\partial \tau_s}{\partial \Sigma_i} = -\mu_s^i \cdot \frac{\partial g_s}{\partial \tau_s}$$

$$\frac{\partial R_1^i}{\partial \Delta \gamma_s} = \sum_s \mu_s^i \cdot \frac{\partial g_s}{\partial \Delta \gamma_s}, \quad \frac{\partial R_2^s}{\partial \Delta \gamma_{rs}} = \delta_{sr} - \frac{\partial g_s}{\partial \Delta \gamma_r}$$

$$\text{et } \frac{\partial g_s}{\partial \Delta \gamma_r} = \frac{\partial g_s}{\partial \Delta \alpha_s} \cdot \frac{\partial \Delta \alpha_s}{\partial \Delta \gamma_s} \delta_{sr} + \frac{\partial g_s}{\partial R_s} \cdot \frac{\partial R_s}{\partial \Delta \gamma_r}$$

Dans le cas de **MONO\_VISC1** :

$$\frac{\partial g_s}{\partial \tau_s} = \frac{n \Delta t}{k^n} \langle |\tau_s - c\alpha_s| - R_s(p_r) \rangle^{n-1} \cdot \frac{\tau_s - c\alpha_s}{|\tau_s - c\alpha_s|} \cdot \frac{\partial |\tau_s - c\alpha_s|}{\partial \tau_s} = H_s(\tau_s, \Delta\alpha_s, \Delta\gamma_s, R_s(p_r)) \cdot \text{sgn } s \cdot \text{sgn } s$$

$$\text{soit : } H_s(\tau_s, \Delta\alpha_s, \Delta\gamma_s, R_s(p_r)) = \frac{n \Delta t}{k^n} \langle |\tau_s - c\alpha_s| - R_s(p_r) \rangle^{n-1} \text{ et } \text{sgn } s = \frac{\tau_s - c\alpha_s}{|\tau_s - c\alpha_s|}$$

Dans le cas de **MONO\_VISC2** :

$$\frac{\partial g_s}{\partial \tau_s} = \frac{n}{k^n} \langle |\tau_s - c\alpha_s - a\gamma_s| - R_s(p) + \frac{d}{2c}(c\alpha_s)^2 \rangle^{n-1} \frac{\tau_s - c\alpha_s - a\gamma_s}{|\tau_s - c\alpha_s - a\gamma_s|}$$

soit :

$$H_s(\tau_s, \Delta\alpha_s, \Delta\gamma_s, R_s(p_r)) = \frac{n}{k^n} \langle |\tau_s - c\alpha_s - a\gamma_s| - R_s(p_r) + \frac{d}{2c}(c\alpha_s)^2 \rangle^{n-1}$$

$$\text{et } \text{sgn } s = \frac{\tau_s - c\alpha_s}{|\tau_s - c\alpha_s|}$$

Dans le cas de **MONO\_VISC1** :

$$\frac{\partial g_s}{\partial \Delta \alpha_s} = -c \cdot H_s(\tau_s, \Delta \gamma_s, R_s)$$

$$\frac{\partial g_s}{\partial R_s} = -1 \cdot H_s(\tau_s, \Delta \gamma_s, R_s) \operatorname{sgn} s \quad \text{avec} \quad \operatorname{sgn} s = \frac{\tau_s - c \alpha_s}{|\tau_s - c \alpha_s|}$$

Dans le cas de **MONO\_VISC2** :

$$\frac{\partial g_s}{\partial \Delta \alpha_s} = H_s(\tau_s, \Delta \gamma_s, R_s) (-c \operatorname{sgn} s + d \alpha_s \Delta \alpha_s)$$

$$\frac{\partial g_s}{\partial R_s} = -1 \cdot H_s(\tau_s, \Delta \gamma_s, R_s) \operatorname{sgn} s \quad \text{avec} \quad \operatorname{sgn} s = \frac{\tau_s - c \alpha_s}{|\tau_s - c \alpha_s|}$$

Dans le cas de **MONO\_CINE1** :

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \Delta \gamma_r} = \delta_{sr} \frac{1 - d \alpha_s^- \operatorname{sgn} s}{(1 + d |\Delta \gamma_s|)^2}$$

Dans le cas de **MONO\_CINE2** :

$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \Delta \gamma_r}$  ; Cette dérivation nécessite la résolution d'une équation non-linéaire par la méthode de Newton

Dans le cas de **MONO\_ISOT1** :

$$\frac{\partial R_s}{\partial \Delta \gamma_r} = \frac{\partial \left[ Q \sum_k h_{sk} (1 - e^{-bp_k}) \right]}{\partial \Delta \gamma_r} = \frac{\partial}{\partial p_r} \left[ Q \sum_k h_{sk} (1 - e^{-bp_k}) \right] \frac{\partial p_r}{\partial \Delta \gamma_r} = b Q h_{sr} e^{-bp_r} \cdot \operatorname{sgn} r$$

$$\text{avec} \quad \operatorname{sgn} r = \frac{\partial p_r}{\partial \Delta \gamma_r} = \frac{\partial |\Delta \gamma_r|}{\partial \Delta \gamma_r} = \frac{\Delta \gamma_r}{|\Delta \gamma_r|}$$

Dans le cas de **MONO\_ISOT2** :

$$\frac{\partial R_s}{\partial \Delta \gamma_r} = \frac{\partial \left[ Q_1 \sum_k h_{sk} (1 - e^{-b_1 p_k}) + Q_2 (1 - e^{-b_2 p_r}) \right]}{\partial \Delta \gamma_r} =$$

$$\frac{\partial}{\partial p_r} \left[ Q_1 \sum_k h_{sk} (1 - e^{-b_1 p_k}) \right] \frac{\partial p_r}{\partial \Delta \gamma_r} + \frac{\partial}{\partial p_r} \left[ Q_2 (1 - e^{-b_2 p_r}) \right] \frac{\partial p_r}{\partial \Delta \gamma_r} =$$

$$\left( b_1 Q_1 h_{sr} e^{-b_1 p_r} + b_2 Q_2 e^{-b_2 p_r} \delta_{sr} \right) \operatorname{sgn} r$$

$$\text{avec} \quad \operatorname{sgn} r = \frac{\partial p_r}{\partial \Delta \gamma_r} = \frac{\partial |\Delta \gamma_r|}{\partial \Delta \gamma_r} = \frac{\Delta \gamma_r}{|\Delta \gamma_r|}$$

## 3.2.2 Résolution implicite – Intégration du modèle MONO\_DD\_KR

Le système à résoudre se réduit aux équations relatives aux composantes des contraintes

$$R_1^i(\Sigma_i, \tau_s, \alpha_s) = (\Lambda^{-1} \Sigma)_i - (\Lambda^{-1} \Sigma)_i - \Delta \varepsilon_i + \Delta \varepsilon_i^{th} + \sum_s \mu_s^i g_s(\tau_s, \alpha_s) = 0$$

et celles relatives au paramètre d'érouissage:

$$R_2^s(\Sigma_i, \tau_s, \alpha_s) = \Delta \alpha_s - |g_s(\tau_s, \alpha_s)| \cdot h(\alpha_s) = 0$$

avec  $i = 1 \text{ à } 6$ ,  $s = 1 \text{ à } n_s$  et  $r = 1 \text{ à } n_s$

Ceci permet d'obtenir un système d'équations formulé de façon entièrement implicite, où  $R_1^i$  et  $R_2^s$  ne dépendent que de  $\Sigma_i, \alpha_s$  (car  $\tau_s$  se calcule explicitement à partir de  $\Sigma_i$ )

$$g_s(\tau_s, \alpha_s) = \dot{\gamma}_0 \exp\left(\frac{-\Delta G(\tau_{eff}^s)}{k_B T}\right) \cdot \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \cdot \Delta t$$

$$\Delta G(\tau_{eff}^s) = \Delta G_0 \left(1 - \left(\frac{\langle \tau_{eff}^s \rangle}{\tau_R}\right)^p\right)^q$$

$$h(\alpha_s) = \left(\frac{b}{d} + \frac{\sqrt{\sum_{u \neq s} \alpha^u}}{K} - \frac{g_c \alpha^s}{b}\right)$$

$$\tau_{eff}^s = \langle |\tau^s| - \tau_0 - \tau_\mu^s \rangle \quad \langle \rangle : \text{partie positive}$$

$$\tau_\mu^s = \frac{(\mu)^2 \sum_u a^{su} \alpha^u}{|\tau^s| - \tau_0} \quad \text{avec } \alpha^u = \rho^u b^2$$

Remarque : pour chaque système de glissement  $s$  où les conditions  $\tau_{eff}^s > 0$   $|\tau^s| > \tau_0$  ne sont pas vérifiées, on obtient immédiatement :  $g_s(\tau_s, \alpha_s) = 0$ ,  $\Delta \alpha_s = 0$

La matrice jacobienne du système s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^i}{\partial \Sigma_j} & \frac{\partial R_1^i}{\partial \Delta \alpha_s} \\ \frac{\partial R_2^s}{\partial \Sigma_i} & \frac{\partial R_2^s}{\partial \Delta \alpha_r} \end{bmatrix} \quad \text{de dimension } (6+n_s) \times (6+n_s)$$

$$\bullet \frac{\partial R_1^i}{\partial \Sigma_j} = (\Lambda^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i \frac{\partial g_s}{\partial \Sigma_j} = (\Lambda^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i \frac{\partial g_s}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial \Sigma_j} = (\Lambda^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i (\mu_s)_j \frac{\partial g_s}{\partial \tau_s}$$

$$\Rightarrow \text{Il faut calculer } \frac{\partial g_s}{\partial \tau_s} = \text{sgn}(\tau_s) \cdot \frac{\partial |g_s|}{\partial \tau_s}$$

$$\bullet \frac{\partial R_2^s}{\partial \Sigma_i} = \frac{\partial(-|g_s| \cdot h_s)}{\partial \tau_s} \cdot \frac{\partial \tau_s}{\partial \Sigma_i} = -\mu_s^i \cdot \left(\frac{\partial |g_s|}{\partial \tau_s} \cdot h_s + |g_s| \cdot \frac{\partial h_s}{\partial \tau_s}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Le terme } \frac{\partial h_s}{\partial \tau_s} \text{ étant nul, il reste à calculer } \frac{\partial |g_s|}{\partial \tau_s}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial R_1^i}{\partial \Delta \alpha_s} &= \sum_s \mu_s^i \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \cdot \frac{\partial |g_s|}{\partial \alpha_s} \\ \bullet \frac{\partial R_2^s}{\partial \Delta \alpha_r} &= \delta_{sr} - \frac{\partial |g_s|}{\partial \Delta \gamma_r} = \delta_{sr} - \left( \frac{\partial |g_s|}{\partial \Delta \alpha_r} h_s + |g_s| \frac{\partial h_s}{\partial \Delta \alpha_r} \right) \end{aligned}$$

=> Il faut aussi calculer  $\frac{\partial |g_s|}{\partial \alpha_r}$  et  $\frac{\partial |g_s|}{\partial \tau_s}$  ;

$$h_s = \frac{\Delta \alpha_s}{|\Delta \gamma_s|} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau_\mu^s}{\partial \tau_s} = \frac{-\tau_\mu^s}{|\tau^s| - \tau_0} \cdot \text{sgn } s$$

Calcul de  $\frac{\partial |g_s|}{\partial \tau_r}$  :

$$\frac{\partial |g_s|}{\partial \tau_s} = -\frac{\Delta t \cdot \dot{\gamma}_0}{k_B T} \exp\left(-\frac{\Delta G(\tau_{eff}^s)}{k_B T}\right) \cdot \frac{\Delta G(\tau_{eff}^s)}{\Delta \tau_s} = \frac{-|g_s(\tau_s, \alpha_s)|}{k_B T} \cdot \frac{\partial \Delta G(\tau_{eff}^s)}{\partial \tau_s}$$

où

$$\frac{\partial \Delta G(\tau_{eff}^s)}{\partial \tau_s} = -\Delta G_0 \left(1 - \left(\frac{\tau_{eff}^s}{\tau_R}\right)^p\right)^{q-1} \cdot \frac{q \cdot p}{\tau_R} \cdot \left(\frac{\tau_{eff}^s}{\tau_R}\right)^{p-1} \cdot \frac{\partial \tau_{eff}^s}{\partial \tau_s}$$

et

$$\frac{\partial \tau_{eff}^s}{\partial \tau_s} = \frac{\tau_s}{|\tau_s|} - \frac{\partial \tau_\mu^s}{\partial \tau_s} = \text{sgn}(\tau_s) + \mu^2 \left(\sum a^{su} \alpha^u\right) \cdot \frac{\text{sgn}(\tau_s)}{(|\tau_s| - \tau_0)^2} = \text{sgn}(\tau_s) + \tau_\mu^s \cdot \frac{\text{sgn}(\tau_s)}{|\tau_s| - \tau_0}$$

Calcul de  $\frac{\partial |g_s|}{\partial \alpha_r}$  :

$$\frac{\partial |g_s|}{\partial \alpha_r} = -\frac{\Delta t \cdot \dot{\gamma}_0}{k_B T} \exp\left(-\frac{\Delta G(\gamma_{eff}^s)}{k_B T}\right) \cdot \frac{\Delta G(\tau_{eff}^s)}{\Delta \alpha_r} = \frac{-|g_s(\tau_s, \alpha_s)|}{k_B T} \cdot \frac{\partial \Delta G(\tau_{eff}^s)}{\partial \alpha_r}$$

où

$$\frac{\partial \Delta G(\tau_{eff}^s)}{\partial \alpha_r} = -\frac{qp}{\tau_R} \Delta G_0 \left(1 - \left(\frac{\tau_{eff}^s}{\tau_R}\right)^p\right)^{q-1} \cdot \left(\frac{\tau_{eff}^s}{\tau_R}\right)^{p-1} \cdot \frac{\partial \tau_{eff}^s}{\partial \alpha_r}$$

et

$$\frac{\partial \tau_{eff}^s}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial \tau_\mu^s}{\partial \alpha_r} = -\frac{\mu^2}{|\tau_s| - \tau_0} \frac{\partial \left(\sum_u a^{su} \alpha^u\right)}{\partial \alpha_r} = -\frac{\mu^2}{|\tau_s| - \tau_0} a^{sr}$$

Calcul de  $\frac{\partial |g_s|}{\partial \tau_s}$  :

$$\frac{\partial h^s}{\partial \alpha_r} = \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \sqrt{\sum_{u \neq s} \alpha^u} - \frac{g_c}{b} \delta_{sr} = \frac{1}{2K} \frac{1 - \delta_{rs}}{\sqrt{\sum_{u \neq s} \alpha^u}} - \frac{g_c}{b} \delta_{sr}$$

### 3.2.3 Résolution implicite – modèles MONO\_DD\_CFC / MONO\_DD\_FAT

#### Expression du résidu

Connaissant la solution à l'instant  $t_{i-1}$ , notée

$\sigma^- = \sigma(t_{i-1})$ ,  $\rho_s^- = \rho_s(t_{i-1})$ ,  $\gamma_s^- = \gamma_s(t_{i-1})$ ,  $p_s^- = p_s(t_{i-1})$ , il s'agit de trouver, à l'instant  $t_i$ , les quantités  $\sigma = \sigma(t_i)$ ,  $\rho_s = \rho_s(t_i)$ ,  $\gamma_s = \gamma_s(t_i)$ ,  $p_s = p_s(t_i)$  vérifiant :

$$(\Lambda^{-1} \sigma)_i - ((\Lambda^-)^{-1} \sigma^-)_i = \Delta \varepsilon_i - \Delta \varepsilon_i^{th} - \sum_s \left( (\mu_s)_i \Delta \gamma_s(\sigma, \omega) \right) = 0$$

La cission résolue par système de glissement est :  $\tau_s = \sigma : \mu_s = (\sigma^- + \Delta \sigma) : \mu_s$

La loi d'écoulement après discrétisation implicite devient :

$$\Delta \gamma_s = \dot{\gamma}_0 \Delta t \left( \left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}} \right)^n - 1 \right) \cdot \frac{\tau_s}{|\tau_s|} = \Delta p_s \frac{\tau_s}{|\tau_s|}$$

$$\Delta p_s(\sigma, \omega) = \dot{\gamma}_0 \Delta t \left( \left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}(\omega)} \right)^n - 1 \right) \text{ si } |\tau_s| \geq \tau_f + \tau_s^{forest} \text{ ; sinon } \Delta p_s = 0$$

La loi d'écrouissage est :  $\tau_s^{forest}(\omega) = \tau_s^{forest}(\omega^- + \Delta \omega) = \mu C(\omega) \sqrt{\sum_{j=1,12} \langle a_{sj} \omega_j \rangle}$

$$\text{avec } C(\omega) = 0.2 + 0.8 \frac{\ln \left( \alpha \sqrt{\sum_{i=1,12} \langle \omega_i \rangle} \right)}{\ln(\alpha b \sqrt{\rho_{ref}})}$$

ou, dans le cas DD\_FAT,  $C(\omega) = 1$ .

L'évolution de la densité de dislocation est donnée (toujours sous forme implicite) par :

$\Delta \omega_s = \Delta p_s h_s(\omega) = \Delta p_s h_s(\omega^- + \Delta \omega)$  avec :

$$h_s(\omega) = \left( A \frac{\sum_{j \in forest(s)} \sqrt{a_{sj}} \langle \omega_j \rangle}{\sum_{j=1,12} \sqrt{a_{sj}} \langle \omega_j \rangle} + B C(\omega) \sum_{j \in copla(s)} \sqrt{a_{sj}} \langle \omega_j \rangle - \frac{y}{b} \omega_s \right)$$

$$\text{ou, dans le cas DD_FAT, } h_s(\omega) = \left( \frac{b}{d} + \frac{\sqrt{\sum_{u \neq s} \langle \omega_u \rangle}}{K} - g_{c0} \frac{\langle \omega_s \rangle}{b} \right)$$

En utilisant la notation vectorielle de Kelvin [chapitre 5 de 40) pour les tenseurs symétriques ( $\sigma$ ,  $\mu_s$ ), et en prenant en compte les éventuelles variations des coefficients de l'élasticité avec la

température, on aboutit au système à résoudre, comportant 18 équations ;  $i = 1, 6$  ,  $s = 1, 12$  , les 18 inconnues étant les 6 composantes de  $\sigma$  et les 12 valeurs  $\omega$  .

Système à résoudre en  $\sigma$  (6 composantes) et  $\Delta \omega$  (12 composantes) :

$$R_i^{(1)}(\sigma, \omega) = (\Lambda^{-1} \sigma)_i - ((\Lambda^-)^{-1} \sigma^-)_i - \Delta \varepsilon_i + \Delta \varepsilon_i^{th} + \sum_s \left( (\mu_s)_i \Delta p_s(\sigma, \omega) \cdot \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \right) = 0$$

$$R_s^{(2)}(\sigma, \omega) = \Delta \omega_s - \Delta p_s h_s(\omega) = 0$$

avec :  $\tau_s = \sigma : \mu_s = (\sigma^- + \Delta \sigma) : \mu_s$

$$\Delta p_s(\sigma, \omega) = \dot{\gamma}_0 \Delta t \left( \left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}(\omega)} \right)^n - 1 \right) \text{ si } |\tau_s| \geq \tau_0 + \tau_s^f ; \text{ sinon } \Delta p_s = 0$$

et si  $\Delta p_s > 0$  :

$$\tau_s^{forest}(\omega) = \tau_s^{forest}(\omega^- + \Delta \omega) = \mu C(\omega) \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{sj} \langle \omega_j \rangle}$$

$$C(\omega) = 0.2 + 0.8 \frac{\ln \left( \alpha \sqrt{\sum_{i=1,12} \langle \omega_i \rangle} \right)}{\ln(\alpha b \sqrt{\rho_{ref}})}$$

$$h_s(\omega) = \left( A \frac{\sum_{j \in forest(s)} \sqrt{a_{sj} \langle \omega_j \rangle}}{\sum_{j=1,12} \sqrt{a_{sj} \langle \omega_j \rangle}} + B C(\omega) \sum_{j \in copla(s)} \sqrt{a_{sj} \langle \omega_j \rangle} - \frac{\gamma}{b} \langle \omega_s \rangle \right)$$

Dans le cas DD\_FAT, ce système devient :

$$R_i^{(1)}(\sigma, \omega) = (\Lambda^{-1} \sigma)_i - ((\Lambda^-)^{-1} \sigma^-)_i - \Delta \varepsilon_i + \Delta \varepsilon_i^{th} + \sum_s \left( (\mu_s)_i \Delta p_s(\sigma, \omega) \cdot \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \right) = 0$$

$$R_s^{(2)}(\sigma, \omega) = \Delta \omega_s - \Delta p_s h_s(\omega) = 0$$

avec :  $\tau_s = \sigma : \mu_s = (\sigma^- + \Delta \sigma) : \mu_s$

$$\Delta p_s(\sigma, \omega) = \dot{\gamma}_0 \Delta t \left( \left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}(\omega)} \right)^n - 1 \right) \text{ si } |\tau_s| \geq \tau_0 + \tau_s^f ; \text{ sinon } \Delta p_s = 0$$

et si  $\Delta p_s > 0$  :

$$\tau_s^{forest}(\omega) = \tau_s^{forest}(\omega^- + \Delta \omega) = \mu \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{sj} \langle \omega_j \rangle}$$

$$h_s(\omega) = \left( \frac{b}{d} + \frac{\sqrt{\sum_{u \neq s} \langle \omega_u \rangle}}{K} - g_{c0} \frac{\langle \omega_s \rangle}{b} \right)$$

La matrice jacobienne du système peut être alors calculée pour l'intégration par la méthode de Newton (R5.03.14).

## Matrice jacobienne

Ce sous-paragraphe ne concerne que les lois DD\_CFC et DD\_CC : pour la loi DD\_FAT, la matrice jacobienne n'a pas encore été programmée et on utilise la matrice calculée par perturbation.

La matrice jacobienne du système s'écrit sous la forme :

$$J = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial R_i^{(1)}}{\partial \sigma_j} \right)_{i=1,6; j=1,6} & \left( \frac{\partial R_i^{(1)}}{\partial \Delta \omega_s} \right)_{i=1,6; s=1,12} \\ \left( \frac{\partial R_s^{(2)}}{\partial \sigma_j} \right)_{s=1,12; j=1,6} & \left( \frac{\partial R_s^{(2)}}{\partial \Delta \omega_r} \right)_{s=1,12; r=1,12} \end{bmatrix} \text{ de dimension } 18 \times 18$$

$$\bullet \frac{\partial R_i^{(1)}}{\partial \sigma_j} = (\Lambda^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i \frac{\partial \left( \Delta p_s \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \right)}{\partial \sigma_j} = (\Lambda^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \frac{\partial \Delta p_s}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial \sigma_j} =$$

$$(\Lambda^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i (\mu_s)_j \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \frac{\partial \Delta p_s}{\partial \tau_s}$$

avec  $\frac{\partial \Delta p_s}{\partial \tau_s} = n \frac{(\Delta p_s + \dot{\gamma}_0 \Delta t)}{\tau_s}$

en effet :  $\frac{\partial \Delta p_s}{\partial \tau_s} = \frac{n \dot{\gamma}_0 \Delta t}{\tau_f + \tau_s^{forest}(\omega)} \left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}(\omega)} \right)^{n-1} \cdot \frac{\tau_s}{|\tau_s|} = n \frac{(\Delta p_s + \dot{\gamma}_0 \Delta t)}{|\tau_s|} \cdot \frac{\tau_s}{|\tau_s|}$

car  $\tau_s^{forest}(\omega)$  ne dépend pas de  $\tau_s$  et  $\Delta p_s + \dot{\gamma}_0 \Delta t = \dot{\gamma}_0 \Delta t \left( \frac{|\tau_s|}{\tau_f + \tau_s^{forest}(\omega)} \right)^n$

$$\bullet \frac{\partial R_i^{(1)}}{\partial \Delta \omega_s} = \sum_{u=1,12} (\mu_u)_i \frac{\tau_u}{|\tau_u|} \frac{\partial \Delta p_u}{\partial \Delta \omega_s}$$

avec  $\frac{\partial \Delta p_u}{\partial \Delta \omega_s} = -n \dot{\gamma}_0 \Delta t |\tau_u| \left( \frac{|\tau_u|}{\tau_f + \tau_u^{forest}(\omega)} \right)^{n-1} \frac{\partial \tau_u^{forest}}{\partial \Delta \omega_s} \left( \tau_f + \tau_u^{forest}(\omega) \right)^2$  ou encore

$$\frac{\partial \Delta p_u}{\partial \Delta \omega_s} = -n \dot{\gamma}_0 \Delta t \left( \frac{|\tau_u|}{\tau_f + \tau_u^{forest}(\omega)} \right)^n \frac{\partial \tau_u^{forest}}{\partial \Delta \omega_s} \left( \tau_f + \tau_u^{forest}(\omega) \right)$$

$$\frac{\partial \Delta p_u}{\partial \Delta \omega_s} = -n \frac{(\Delta p_u + \dot{\gamma}_0 \Delta t)}{(\tau_f + \tau_u^{forest}(\omega))} \frac{\partial \tau_u^{forest}}{\partial \Delta \omega_s}$$

il reste à exprimer : 
$$\frac{\partial \tau_u^{forest}}{\partial \Delta \omega_s} = \mu \frac{\partial C(\omega)}{\partial \Delta \omega_s} \cdot \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{uj} \omega_j} + \mu C(\omega) \frac{a_{us}}{2 \sqrt{\sum_{j=1,12} a_{uj} \omega_j}} \frac{\langle \omega_s \rangle}{\omega_s}$$

calculons 
$$\frac{\partial C(\omega)}{\partial \Delta \omega_s} = \frac{0.8}{2 \ln(\alpha b \sqrt{\rho_{ref}})} \frac{1}{\sum_{k=1,12} \omega_k} \frac{\langle \omega_s \rangle}{\omega_s}$$

ce qui fournit la dérivée : 
$$\frac{\partial R_i^{(1)}}{\partial \Delta \omega_s} = - \sum_{u=1,12} (\mu_u)_i \frac{\tau_u}{|\tau_u|} n \frac{(\Delta p_u + \dot{\gamma}_0 \Delta t)}{(\tau_f + \tau_u^{forest}(\omega))} \frac{\partial \tau_u^{forest}}{\partial \Delta \omega_s}$$

• 
$$\frac{\partial R_s^2}{\partial \sigma_i} = -(\mu_s)_i \frac{\partial \Delta p_s}{\partial \tau_s} h_s(\omega)$$

avec 
$$\frac{\partial \Delta p_s}{\partial \tau_s} = n \frac{(\Delta p_s + \dot{\gamma}_0 \Delta t)}{\tau_s}$$

• 
$$\frac{\partial R_s^{(2)}}{\partial \omega_r} = \delta_{sr} - \Delta p_s \frac{\partial h_s(\omega)}{\partial \omega_r} - h_s(\omega) \frac{\partial \Delta p_s}{\partial \omega_r}$$

• On a déjà calculé  $\frac{\partial \Delta p_s}{\partial \Delta \omega_r}$  . Il reste à dériver :  $\frac{\partial h_s(\omega)}{\partial \Delta \omega_r}$  :

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \omega_r} \left( A \frac{\sum_{j \in forest(s)} \sqrt{a_{sj}} \omega_j}{\sum_{j=1,12} \sqrt{a_{sj}} \omega_j} + B C(\omega) \sum_{j \in copla(s)} \sqrt{a_{sj}} \omega_j - \frac{y}{b} \omega_s \right) = A \frac{\partial T_1(\omega)}{\partial \Delta \omega_r} + B \frac{\partial T_2(\omega)}{\partial \Delta \omega_r} - \frac{y}{b} \delta_{sr} \frac{\langle \omega_r \rangle}{\omega_r}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \omega_r} (T_1(\omega)) = \frac{\sqrt{a_{sr}}}{\sum_{j=1,12} \sqrt{a_{sj}} \omega_j} \cdot I_s^{forest}(r) \frac{\langle \omega_r \rangle}{\omega_r} - \frac{a_{sr} \sum_{j \in forest(s)} \sqrt{a_{sj}} \omega_j}{2 \sqrt{a_{sr}} \omega_r \left( \sum_{j=1,12} \sqrt{a_{sj}} \omega_j \right)^2} \frac{\langle \omega_r \rangle}{\omega_r}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \omega_r} T_2(\omega) = \frac{\partial C}{\partial \Delta \omega_r} \sum_{j \in copla(s)} \sqrt{a_{sj}} \omega_j + C(\omega) \frac{a_{sr}}{2 \sqrt{a_{sr}} \omega_r} I_s^{copla}(r) \frac{\langle \omega_r \rangle}{\omega_r}$$

$I_s^{copla}(r) = 1$  si  $r \in copla(s)$  ,  $= 0$  sinon et  $I_s^{forest}(r) = 1$  si  $r \in forest(s)$  ,  $0$  sinon

### 3.2.4 Résolution implicite – modèles MONO\_DD\_CC / MONO\_DD\_CC\_IRRA

L'algorithme proposé (cf. 40 ) consiste à éliminer la dépendance de  $R^s$  à  $\tau_{eff}^s$  en approchant  $\Delta G$  par :

$$1. \Delta G(\boldsymbol{\rho}) = \min \left( \Delta G_0 ; k T \ln \left[ \frac{\rho_m^s b H}{\sqrt{\rho_{tot}^s \dot{\varepsilon}_{eq}}} \right] \right).$$

avec  $\rho_{tot}^s(\boldsymbol{\rho}) = \rho_F^s(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j \neq s} \rho^j + \rho_{irr}^s$  (cas 2) ou  $\rho_{tot}^s(\boldsymbol{\rho}) = \sum_j \rho^j + \rho_{irr}^s$  (cas 1)

dans cette expression,  $\varepsilon_{eq}^s$  peut représenter la déformation équivalente totale ou plastique

$$2. R^s(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\mu b}{2 \tau_0 \left( 1 - \frac{\Delta G(\boldsymbol{\rho})}{\Delta G_0} \right)^2}$$

$$3. \frac{1}{\lambda^s(\boldsymbol{\rho}) + D} = \min \left( \sqrt{\rho_{tot}^s(\boldsymbol{\rho})} ; (D + 2 R^s(\boldsymbol{\rho})) \rho_{tot}^s(\boldsymbol{\rho}) \right)$$

$$4. l^s(\boldsymbol{\rho}) = \max \left( \lambda^s(\boldsymbol{\rho}) - 2 \alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho}) R^s(\boldsymbol{\rho}) ; l_c \right)$$

$$5. \alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{\sum_j h^{sj} \frac{\rho^j}{\rho_{tot}^s} + a_{irr} \frac{\rho_{irr}^s}{\rho_{tot}^s}}$$

avec  $h_{sj}$  le terme courant de la matrice d'interaction

$$6. \tau_{LT}^s(\boldsymbol{\rho}) = \max \left( 0 ; (1 - \beta) \alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho}) \mu b \left( \frac{1}{\lambda^s(\boldsymbol{\rho})} - \frac{1}{2 \alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho}) R^s(\boldsymbol{\rho}) + l_c(T)} \right) \right) \quad (\text{cas 1})$$

ou  $\tau_{LT}^s(\boldsymbol{\rho}) = \max \left( 0 ; \alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho}) \mu b \left( \frac{1}{\lambda^s(\boldsymbol{\rho})} - \frac{1}{2 \alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho}) R^s(\boldsymbol{\rho}) + l_c(T)} \right) \right) \quad (\text{cas 2})$

$$7. \tau_{LR}^s(\boldsymbol{\rho}) = \beta \mu b \alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho}) \sqrt{\rho_{tot}^s} \quad (\text{cas 1}) \text{ ou } \tau_{LR}^s(\boldsymbol{\rho}) = \mu b \sqrt{h^{ss} \rho^s} \quad (\text{cas 2})$$

$$8. \tau_{eff}^s(\boldsymbol{\rho}) = |\tau^s| - \tau_F - \tau_{LR}^s(\boldsymbol{\rho}) - \tau_{LT}^s(\boldsymbol{\rho}) \quad (\text{cas 1})$$

$$\tau_{eff}^s(\boldsymbol{\rho}) = |\tau^s| - \tau_c \text{ et } \tau_c = \tau_F \sqrt{(\tau_{LR}^s(\boldsymbol{\rho}))^2 + (\tau_{LT}^s(\boldsymbol{\rho}))^2} \quad (\text{cas 2})$$

$$9. \dot{\gamma}_{nuc}^s(\boldsymbol{\rho}) = \rho_m^s b H \cdot l^s(\boldsymbol{\rho}) \cdot \exp \left( \frac{-\Delta G_0}{k_B T} \left( 1 - \sqrt{\frac{\langle \tau_{eff}^s(\boldsymbol{\rho}) \rangle}{\tau_0}} \right) \right) \text{sgn}(\tau^s) \text{ sachant que } \tau_{eff}^s < \tau_0$$

$$10. \dot{\gamma}_{prob}^s(\boldsymbol{\rho}) = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{|\tau^s|}{\tau_F + \tau_{LR}^s(\boldsymbol{\rho}) + (1 - \beta) \alpha_{AT}^s(\boldsymbol{\rho}) \mu b \left( \frac{1}{\lambda^s(\boldsymbol{\rho})} \right)} \right)^n \text{sgn}(\tau^s) \quad (\text{cas 1})$$

$$\dot{\gamma}_{prob}^s(\boldsymbol{\rho}) = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{|\tau^s|}{\tau_c} \right)^n \text{sgn}(\tau^s) \quad (\text{cas 2})$$

$$11. \frac{1}{\dot{\gamma}^s(\rho)} = \frac{1}{\dot{\gamma}_{nuc}^s(\rho)} + \frac{1}{\dot{\gamma}_{prob}^s(\rho)}$$

$$12. \dot{\rho}^s = \frac{|\dot{\gamma}^s(\rho)|}{b} \left( \frac{1}{d_{lath}} + \frac{\sqrt{a_{self}^s \rho^s}}{K_{self}} + \frac{\sum_{j \neq s} \sqrt{a^{sj} \rho^j}}{K_f} - \gamma^s \rho^s \right) \text{ avec } a^{sj} = h^{sj} \left( 1 - \frac{\langle \tau_{eff}^s \rangle}{\tau_0} \right) \text{ (cas 1)}$$

$$\dot{\rho}^s = \frac{|\dot{\gamma}^s(\rho)|}{b} \left( \frac{1}{d_{lath}} + \frac{\sqrt{a^{ss} \rho^s}}{K_{self}} + \frac{\alpha_{AT}^s (1 - \frac{\tau_{eff}}{\tau_0}) \lambda_s \rho_F^s}{K_f} - \gamma^s \rho^s \right) \text{ et } a^{sj} = h^{sj} \left( 1 - \frac{\langle \tau_{eff}^s \rangle}{\tau_0} \right)^2 \text{ (cas 2)}$$

$$\text{et } \frac{1}{\gamma^s} = \frac{1}{\gamma_{AT}^s} + \frac{2\pi\tau_{eff}^s}{\mu b}$$

13. dans le cas DD\_CC\_IRRA,  $\dot{\rho}_{irr}^s = -\xi \rho_{irr}^s |\dot{\gamma}^s(\rho)|$ , soit :  $\rho_{irr}^s(t + \Delta t) = \rho_{irr}^s(t) \exp(-\xi \Delta p_s)$

(11) définit un système de 12 équations différentielles en  $\rho^s$  car toutes les quantités calculées (de 1 à 10) sont des fonctions de  $\rho^s$ .

La limite de ce modèle à haute température est :  $R^s \rightarrow \infty$  car  $\Delta G \rightarrow \Delta G_0$

$$\lambda^s \rightarrow \sqrt{\rho_{tot}^s} \text{ et } l_s \rightarrow l_c, \dot{\gamma}_{nuc}^s(\rho) \rightarrow \rho_m^s b H \cdot l_c \operatorname{sgn}(\tau^s)$$

$$\tau_{LT}^s(\rho) + \tau_{LR}^s(\rho) \rightarrow \alpha_{AT}^s(\rho) \mu b \left( \frac{1}{\lambda^s(\rho)} \right) \text{ donc } \dot{\gamma}_{prob}^s(\rho) = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{|\tau^s|}{\tau_F + \alpha_{AT}^s(\rho) \mu b \sqrt{\rho_{tot}^s}} \right)^n \operatorname{sgn}(\tau^s)$$

### 3.2.5 Algorithme d'intégration implicite en grandes déformations

A partir de  $U_n$  et  $\Delta U$ , on peut calculer  $F_n$ ,  $\Delta F$  et  $F_{n+1} = \Delta F F_n$ . de plus, on connaît les résultats de l'incrément de temps  $n$  : contraintes de Cauchy  $\sigma_n$  variables internes.

Il s'agit de déterminer  $\sigma_{n+1}$  et les variables internes  $(\gamma_s)_{n+1}$  (ou  $(\alpha_s)_{n+1}$ ) solutions du système de  $6 + n_s$  équations :

$$S_{n+1} = \Lambda \cdot \frac{1}{2} (F_{n+1}^{eT} F_{n+1}^e - I_d)$$

et pour chaque système de glissement :

$$(\Delta \gamma_s)_{n+1} = \Delta t g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) \text{ ou } \Delta \alpha_s = \Delta t h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s)$$

$$\text{avec } \tau_s(S) = M_{n+1} : m_s \otimes n_s = (F_{n+1}^{eT} F_{n+1}^e(S)_{n+1}) : m_s \otimes n_s = \left[ (2\Lambda^{-1} S + I_d) \right] : m_s \otimes n_s$$

en effet suivant 40et 40, on considère ici des contraintes de Piola-Kirchhoff mesurées à partir de la configuration intermédiaire, donc seule la partie élastique du gradient de transformation intervient.

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_{n+1}^p)^{-1} = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}$$

Plusieurs choix sont possibles pour le calcul de  $(\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}$  :

$(\Delta \mathbf{F}^p)^{-1} = \exp(-\sum \Delta \gamma_s(\mathbf{S}, \omega_s) \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s)$  40 qui a l'avantage de conserver la trace nulle des déformations plastiques, mais qui peut présenter un surcoût ;

$$(\Delta \mathbf{F}^p)^{-1} = (\mathbf{I}_d + \sum \Delta \gamma_s(\mathbf{S}, \omega_s) \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s)^{-1} \left( \det(\mathbf{I}_d + \sum \Delta \gamma_s(\mathbf{S}, \omega_s) \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s) \right)^{\frac{1}{3}} \quad 40$$

$$(\Delta \mathbf{F}^p)^{-1} = (\mathbf{I}_d - \sum \Delta \gamma_s(\mathbf{S}, \omega_s) \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s) \left( \det(\mathbf{I}_d - \sum \Delta \gamma_s(\mathbf{S}, \omega_s) \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s) \right)^{\frac{1}{3}}$$

Les gradients  $\mathbf{F}^e$  sont stockés comme variables internes (en ôtant le tenseur identité)

En post-traitement on calcule les contraintes de Cauchy :  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \frac{1}{\det \mathbf{F}_{n+1}^e} \mathbf{F}_{n+1}^e(\mathbf{S})_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ T}}$

ou les contraintes de Kirchhoff :  $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \det \mathbf{F}_{n+1} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^e(\mathbf{S})_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ T}}$

car  $\det \mathbf{F}_{n+1} = \det \mathbf{F}_{n+1}^e \det \mathbf{F}_{n+1}^p = \det \mathbf{F}_{n+1}^e$

Le problème à résoudre en chaque point d'intégration a donc pour but, connaissant les variables internes.  $(\gamma_s)_n$   $(\alpha_s)_n$   $(p_s)_n$   $\mathbf{F}_n^e$  de déterminer  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  et les variables internes  $(\gamma_s)_{n+1}$   $(\alpha_s)_{n+1}$ ,  $\mathbf{F}_{n+1}^e$ ) solutions du système à  $6 + n_s$  équations :

$$\mathbf{R}_1 = (\boldsymbol{\Lambda})^{-1} \mathbf{S}_{n+1} - \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ T}} \mathbf{F}_{n+1}^e - \mathbf{I}_d) = 0$$

et pour chaque système de glissement :

$$\mathbf{R}_2 = (\Delta \gamma_s)_{n+1} - \Delta t g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) = 0 \text{ ou } \mathbf{R}_2 = \Delta \alpha_s - \Delta t \cdot h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) = 0$$

avec  $\tau_s(\mathbf{S}) = \left[ (2\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{I}_d) \mathbf{S} \right] : \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s$

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}$$

Le résolution de ce système d'équation non linéaires peut se faire classiquement par l'algorithme de Newton [R5.03.14].

Le vecteur des inconnues est composé de :  $\mathbf{S}_{n+1}$  (6 composantes) et  $\Delta \alpha_s$  ( $n_s$  composantes).

Le calcul de la matrice jacobienne est décrit en annexe.

## Initialisation,

L'algorithme est initialisé de la façon suivante :

On pose  $\mathbf{F}_{n+1}^{e\text{-trial}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^p)^{-1}$  ce qui revient à supposer que  $\mathbf{F}_{n+1}^p = \Delta \mathbf{F}^p \mathbf{F}_n^p = \mathbf{I}_d \mathbf{F}_n^p$

On calcule  $\mathbf{R}_1$  avec  $\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1}^{e\text{-trial}}$  puis toutes les équations  $\mathbf{R}_2$ . Si aucun seuil n'est atteint, alors  $\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1}^{e\text{-trial}}$ . Sinon il faut résoudre le système  $\mathbf{R}_1$   $\mathbf{R}_2$ .

On peut choisir de garder comme variable interne le tenseur  $\mathbf{F}_{n+1}^e$ . pour calculer plus aisément

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}$$

En pratique on stocke  $F^e - I_d$  dans les variables internes  $V(6+3*n_s+1)$  à  $V(6+3*n_s+9)$

On conserve aussi  $F^p - I_d$  dans les variables internes  $V(6+3*n_s+10)$  à  $V(6+3*n_s+19)$

En post-traitement, les tenseurs  $m_s$  et  $n_s$  peuvent être mis à jour en utilisant la rotation issue de la décomposition polaire  $F^e = R^e U^e$  :  $m_s = R^e m_{s0}$   $n_s = R^e n_{s0}$

Pour le calcul de la décomposition polaire, un algorithme exact est proposé dans 40.

Suivant 40, il peuvent aussi être transportés dans la configuration actuelle par :

$$m_s = F^e m_{s0} \text{ et } n_s = F^{e-T} n_{s0}$$

### 3.2.6 Critères de convergence utilisés pour les résolutions implicites

Le critère d'arrêt des itérations porte sur la nullité relative du résidu :  $\frac{\|R(Y)\|_h}{\|R_{ref}\|_h} < \varepsilon_c$  . où  $\varepsilon_c$  représente la tolérance donnée par RESI\_INTE\_RELTA . Le problème consiste à bien choisir  $R_{ref}$  ainsi que la norme  $\|\cdot\|_h$

Par homogénéité avec l'algorithme global de Newton utilisé dans STAT\_NON\_LINE [R5.03.02], et pour éviter des itérations inutiles quand le résidu initial est très petit, on choisit :

$$\frac{\max_{i=1,6} |R_i(Y)|}{\max_{i=1,6} |E_i^{tr}|} < \varepsilon_c \text{ avec } E^{tr} = \Lambda^{-1} \Sigma^- + \Delta E - \Delta E^{th}$$

$$\frac{\max_{i=7,n} |R_i(Y)|}{\max_{i=7,n} |Y_i^- + \Delta Y_i|} < \varepsilon_c$$

Les deux critères précédents doivent être vérifiés pour obtenir la convergence.

Si la convergence n'est pas atteinte après le nombre maximum d'itérations, on teste également la stationnarité de la solution :

$$|Y_{k+1} - Y_k| < \varepsilon$$

La méthode utilisée permet un re-découpage local du pas de temps, soit systématique, soit en cas de non convergence (mot-clé ITER\_INTE\_PAS) : ceci permet une intégration plus facile, mais en perdant alors le bénéfice d'un opérateur tangent cohérent à l'issue de l'intégration du comportement.

Il est souvent préférable, en cas de non convergence locale au bout de ITER\_INTE\_MAXI itérations, de procéder à un redécoupage global du pas de temps (en utilisant DEFI\_LIST\_INST), afin de conserver une matrice tangente cohérente.

### 3.3 Résolution explicite

Une autre méthode de résolution, très simple à mettre en œuvre pour résoudre les équations différentielles du comportement monocristallin est la résolution explicite. Pour qu'elle soit efficace numériquement, il est indispensable de lui associer un contrôle de pas automatique. Comme dans

[R5.03.14], on utilise la méthode de Runge et Kutta. Le calcul des variables internes à l'instant  $t + h$  n'est fonction que des valeurs de leurs dérivés  $\frac{dY}{dt} = F(Y, t)$  :

$$\Delta Y = \begin{cases} \Delta \alpha_s \\ \Delta \gamma_s \\ \Delta p_s \\ \Delta E^{vp} \end{cases} = \begin{cases} h(\tau_s^-, \alpha_s^-, \gamma_s^-, p_s^-) \\ g(\tau_s^-, \alpha_s^-, \gamma_s^-, p_s^-) \\ |\Delta \gamma_s| = f(\tau_s^-, \alpha_s^-, \gamma_s^-, p_s^-) \\ \sum_s m_s \Delta \gamma_s \end{cases}$$

avec  $\tau_s = \Sigma : \mu_s = (\Sigma^- + \Lambda(\Delta E - \Delta E^{th} - \Delta E^{vp})) : \mu_s$

On intègre selon le schéma suivant :

$$Y_{t+h} = Y^{(2)} \text{ si le critère de précision est satisfait}$$

$$Y^{(2)} = Y + \frac{h}{2} [F(Y, t) + F(Y^{(1)}, t+h)] \text{ avec } Y^{(1)} = Y + h F(Y, t)$$

La différence entre  $Y^{(2)}$  (schéma d'ordre 2) et  $Y^{(1)}$  (schéma d'ordre 1, Euler) fournit une estimation de l'erreur d'intégration et permet de contrôler la taille du pas de temps  $h$  qui est initialisé à  $\Delta t_i$  pour la première tentative. La stratégie du contrôle du pas est définie à partir d'une norme de l'écart entre les deux méthodes d'intégration :  $\|Y^{(2)} - Y^{(1)}\|$  et de la précision requise par l'utilisateur  $\eta$  (mot-clé : RESI\_INTE\_RELTA). Le critère retenu est le suivant, où l'on note  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  :

$$\delta Y(t) = \sup_{j=1, N} \left\{ \frac{|y_j^{(2)} - y_j^{(1)}|}{\max[\varepsilon, |y_j^{(t)}|]} \right\} < \eta$$

Le paramètre  $\varepsilon$  est fixé à 0,001. La précision d'intégration souhaitée  $\eta$  doit être cohérente avec le niveau de précision requis pour l'étape globale.

Si le critère n'est pas vérifié, le pas de temps est re-découpé selon une méthode heuristique (nombre de sous-pas défini par l'utilisateur via le mot-clé ITER\_INTER\_PAS). Lorsque le pas de temps devient trop faible ( $h < 1.10^{-20}$ ), le calcul est arrêté avec un message d'erreur.

### Algorithme d'intégration explicite en grandes déformations

A chaque instant et en chaque point d'intégration, on peut calculer  $F_n$ ,  $\Delta F$  et  $F_{n+1} = \Delta F F_n$ . On connaît les contraintes de Cauchy  $\sigma_n$  et les variables internes au temps  $n$

Il s'agit de déterminer  $S$  et les variables internes  $(\gamma_s)$ ,  $(\alpha_s)$ ,  $F^p$  au temps  $n+1$ . On peut utiliser pour ce faire une méthode de Runge-Kutta [cf. R5.03.14] sur le système d'équations différentielles :

$$\dot{F}^p = \left( \sum_s \dot{\gamma}_s m_s \otimes n_s \right) F^p$$

$$\dot{\gamma}_s = g(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) \text{ pour chaque système de glissement}$$

$$\dot{\alpha}_s = h(\tau_s, \alpha_s, \gamma_s, p_s) \text{ pour chaque système de glissement}$$

$$\text{avec : } \tau_s = M : m_s \otimes n_s = (F^{eT} F^e S) : m_s \otimes n_s = \left[ (2 \Lambda^{-1} S + I_d) S \right] : m_s \otimes n_s$$

$$(\mathbf{S}) = \Lambda \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e - \mathbf{I}_d) \text{ et } \mathbf{F}^e = \mathbf{F} (\mathbf{F}^p)^{-1}$$

## 4 Variables internes

### 4.1 Cas du monocristal

Les variables internes dans Code\_Aster sont dénommées  $V_1, V_2, \dots, V_p$ .

Les six premières sont les 6 composantes de la déformation visco-plastique :  $\mathbf{E}_{ij}^{vp}$  :

$$\mathbf{E}^{vp} = \sum_t (\Delta \mathbf{E}^{vp}) \text{ avec } \Delta \mathbf{E}^{vp} = \sum_s \mu_s \Delta \gamma_s$$

$$V_1 = E_{xx}^{vp}, V_2 = E_{yy}^{vp}, V_3 = E_{zz}^{vp}, V_4 = \sqrt{(2)} E_{xy}^{vp}, V_5 = \sqrt{(2)} E_{xz}^{vp}, V_6 = \sqrt{(2)} E_{yz}^{vp}$$

$V_7, V_8, V_9$  sont les valeurs de  $\alpha_1, \gamma_1, p_1$  pour le système de glissement  $s = 1$

$V_{10}, V_{11}, V_{12}$  correspondent au système  $s = 2$ , et ainsi de suite, où :

$\alpha_s$  représente la variable cinématique du système  $s$  dans le cas des modèles phénoménologiques, et la densité de dislocations dans un modèle issu de la DD ;

$\gamma_s$  représente le glissement plastique du système  $s$

$p_1$  représente le glissement plastique cumulé du système  $s$

Prise en compte de l'irradiation :

dans le cas DD\_CC\_IRRA, il faut ajouter  $n_{irra} = 12$  variables internes :  
 $V_{6+3n_s+1}$  à  $V_{6+3n_s+12}$  contiennent pour chaque système de glissement la densité de dislocations liée à l'irradiation  $\rho_s^{irr}$

dans le cas DD\_CFC\_IRRA, il faut ajouter  $n_{irra} = 24$  variables internes :  
 $V_{6+3n_s+1}$  à  $V_{6+3n_s+12}$  contiennent pour chaque système de glissement  $\rho_s^{loops} * b^2$   
 $V_{6+3n_s+13}$  à  $V_{6+3n_s+24}$  contiennent pour chaque système de glissement  $\phi_s^{voids}$

On stocke ensuite les cissions pour chaque système de glissement :  $\tau_1, \dots, \tau_{n_s}$

Dans le cas où on prend en compte la rotation du réseau cristallin, il faut ajouter  $n_{rota} = 16$  variables internes :

$V_{6+3n_s+1}$  à  $V_{6+3n_s+9}$  sont les 9 composantes de la matrice de rotation  $\mathbf{Q}$ ,

$V_{6+3n_s+10}$  à  $V_{6+3n_s+12}$  sont les 3 composantes de  $\Delta \boldsymbol{\omega}^p$ ,

$V_{6+3n_s+13}$  à  $V_{6+3n_s+15}$  sont les 3 composantes de  $\Delta \boldsymbol{\omega}^e$ ,

$V_{6+3n_s+16}$  représente  $\Theta$

L'antépénultième variable interne est la contrainte de clivage :  $\max_s (\Sigma \cdot n) : n$

L'avant dernière variable interne contient la déformation plastique cumulée globale, définie par :

$$V_{p-1} = \sum \Delta E_{eq}^{vp} \text{ avec } \Delta E_{eq}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\Delta \mathbf{E}^{vp} : \Delta \mathbf{E}^{vp})$$

La dernière variable interne,  $V_p$ , ( $p = 6 + 3n_s + n_{rota} + 3$ ,  $n_s$  étant le nombre total de systèmes de glissement) est un indicateur de plasticité (seuil dépassé en au moins un système de glissement au pas de temps courant). S'il est nul, il n'y a pas eu d'accroissement de variables internes à l'instant courant. Sinon, il contient le nombre d'itérations de Newton local (pour une résolution implicite) qui ont été nécessaires pour obtenir la convergence.

## 4.2 Cas du polycristal

Les variables internes dans *Code\_Aster* sont dénommées  $V_1, V_2, \dots, V_p$ .

Le nombre de variables internes est  $p=7+6m + \sum_{g=1,m} (3n_s(g)+6m+1)$ ,  $m$  étant le nombre de phases et  $n_s(g)$  étant le nombre de systèmes de glissement de la phase  $g$ .

Dans le cas où on prend en compte l'irradiation, le nombre total de variables internes est :

$$p=7+6m + \sum_{g=1,m} (3n_s(g)+12m+6m+1)$$

Les six premières variables internes sont les composantes de la déformation viscoplastique macroscopique  $\mathbf{E}^{vp}$  :

$$V_1 = E_{xx}^{vp}, V_2 = E_{yy}^{vp}, V_3 = E_{zz}^{vp}, V_4 = \sqrt{(2)} E_{xy}^{vp}, V_5 = \sqrt{(2)} E_{xz}^{vp}, V_6 = \sqrt{(2)} E_{yz}^{vp};$$

la septième est la déformation viscoplastique équivalente cumulée macroscopique  $P$  :

$$V_7 = \sum \Delta E_{eq}^{vp} \text{ avec } \Delta E_{eq}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\Delta \mathbf{E}^{vp} : \Delta \mathbf{E}^{vp});$$

puis, pour chaque phase, on trouve les 6 composantes des déformations viscoplastiques ou du tenseur  $\beta$  de la phase :  $\left\{ \varepsilon_{xx}^{vp}(g), \varepsilon_{yy}^{vp}(g), \varepsilon_{zz}^{vp}(g), \sqrt{(2)} \varepsilon_{xy}^{vp}(g), \sqrt{(2)} \varepsilon_{xz}^{vp}(g), \sqrt{(2)} \varepsilon_{yz}^{vp}(g) \right\}_{g=1,m}$ ;

ensuite, pour chaque phase, et pour chaque système de glissement de la phase, on trouve les valeurs de  $\alpha_s$ ,  $\gamma_s$ ,  $P_s$  ;

si l'irradiation est prise en compte, pour chaque phase, on trouve les 12 densités de dislocation liées à l'irradiation  $\rho_{irr}^s$  ;

puis, pour chaque phase, on trouve les 6 composantes des contraintes de la phase :  $\left\{ \sigma_{xx}(g), \sigma_{yy}(g), \sigma_{zz}(g), \sqrt{(2)} \sigma_{xy}(g), \sqrt{(2)} \sigma_{xz}(g), \sqrt{(2)} \sigma_{yz}(g) \right\}_{g=1,m}$  ;

la dernière variable interne est un indicateur de plasticité (seuil dépassé en au moins un système de glissement au pas de temps courant).

## 5 Implantation numérique dans *Code\_Aster*

D'une façon générale, les comportements monocristallins sont intégrés aux méthodes de Runge-Kutta pour l'intégration explicite, et à l'environnement « *plasti* » pour l'intégration implicite [R5.03.14]. Les tenseurs d'orientation des systèmes de glissement sont quant à eux tous définis dans la routine *LCMSG* fournissant le tenseur en repère global pour le nième système de la famille fournie dont le nom est fourni par la routine appelante.

Pour ajouter un nouveau comportement de monocristal, ou simplement une nouvelle loi d'écoulement ou d'écrouissage, il convient de définir ses paramètres dans *DEFI\_MATERIAU*. Suivant le cas (écoulement, écrouissage isotrope ou cinématique), il faut ajouter la lecture de ces paramètres dans les routines *LCMAFL*, *LCMAEI*, *LCMAEC*. Pour l'intégration, il suffit d'écrire la définition des accroissements de variables internes dans les routines *LCMMFE* (écoulement), *LCMMFC* (écrouissage cinématique) et *LCMMFI* (écrouissage isotrope), pour que l'intégration explicite fonctionne.

L'intégration implicite utilise également les routines *LCMMFE*, *LCMMFC* et *LCMMFI*. Elle demande en plus de définir les dérivées des équations par rapport aux différentes variables. Les dérivées sont à

écrire dans les routines LCMMJF (dérivées de l'équation d'écoulement), LCMMJI (dérivées de la relation d'écoulement isotrope) et LCMMJC (dérivées de la relation d'écoulement cinématique).

Pour plus de détails sur l'architecture de la résolution des comportements cristallins, voir [D5.04.02].

## 6 Utilisation

Ces modèles sont accessibles dans Code\_Aster en 3D, déformations planes (**D\_PLAN**), contraintes planes (**C\_PLAN**, par la méthode de De Borst [R5.03.03]) et axisymétrie (**AXIS**).

### 6.1 Cas du monocristal

Dans le cas de microstructures maillées, les différents grains d'un monocristal étant représentés par des groupes de mailles, il faut affecter les paramètres des matériaux et les comportements des monocristaux ainsi que leurs orientations aux différents grains.

Les valeurs des paramètres des relations de comportement sont fournies à l'aide de la commande **DEFI\_MATERIAU**. Ceci se définit à partir des mots clés **MONO\_VISC1**, **MONO\_VISC2**, **MONO\_DD\_KR**, **MONO\_DD\_CFC** pour l'écoulement, **MONO\_ISOT1**, **MONO\_ISOT2**, **MONO\_DD\_CFC** pour l'écrouissage isotrope et **MONO\_CINE1**, **MONO\_CINE2** pour l'écrouissage cinématique [U4.43.01]. Par exemple [V6.04.172] :

```
MATER1=DEFI_MATERIAU (
/ ELAS      =_F( E=..., NU=...,
/ ELAS_ORTH=_F( E_L=192500,
                E_T=128900,
                NU_LT=0.23,
                G_LT=74520, ),
# RELATIONS D' ECOULEMENT
/ MONO_VISC1=_F(N=10, K=40,C=6333),
/ MONO_VISC2=_F(N=10, K=40,C=6333,D=37,A=121),
/ MONO_DD_KR=_F(...),
# ECROUISSAGE ISOTROPE
/ MONO_ISOT1=_F(R_0=75.5,Q=9.77,B=19.34,H=2.54),
/ MONO_ISOT2=_F(R_0=75.5,Q1=9.77,B1=19.34,H=2.54,Q2=-33.27, B2=5.345, ),
# ECROUISSAGE CINEMATIQUE
/ MONO_CINE1=_F(D=36.68),
/ MONO_CINE2=_F(D=36.68, GM=, PM=, ),
);
```

On peut ainsi dissocier, au niveau des données, l'écoulement de l'écrouissage isotrope et de l'écrouissage cinématique.

Il faut maintenant définir le (ou les) type de monocristal étudié. Pour cela, on définit le comportement de façon externe à **STAT\_NON\_LINE**, par l'intermédiaire de l'opérateur **DEFI\_COMPOR**, par exemple :

```
MONO1=DEFI_COMPOR(MONOCRISTAL =(_F( MATER=MATER1,
                                     ECOULEMENT=MONO_VISC1,
                                     MONO_ISOT=MONO_ISOT1,
                                     MONO_CINE=MONO_CINE1,
                                     FAMI_SYST_GLIS=('CUBIQUE1', ),
                                     _F( MATER=MATER1,
                                         ECOULEMENT=MONO_VISC1,
                                         MONO_ISOT=MONO_ISOT2,
```

```

MONO_CINE=MONO_CINE2,
FAMI_SYST_G LIS='CUBIQUE2',),
),

_F( MATER=MATER2,
ECOULEMENT=MONO_VISC1,
MONO_ISOT=MONO_ISOT2,
MONO_CINE=MONO_CINE2,
FAMI_SYST_G LIS='PRISMATIQUE',),

_F( MATER=MATER2,
ECOULEMENT=MONO_VISC1,
MONO_ISOT=MONO_ISOT2,
MONO_CINE=MONO_CINE2,
FAMI_SYST_G LIS='BCC24',),
),
)

```

La structure de donnée produite contient des noms de systèmes de glissement, associés à des noms de paramètres de matériau, pour chaque comportement de monocristal .

FAMI_SYST_G LIS	MATE_SYST	TYPE_LOI	ECOULEMENT	MONO_ISOT	MONO_CINE1
'CUBIQUE'	MATER1	VISC	MONO_VISC1	MONO_ISOT1	MONO_CINE1
'BASAL'	MATER1	VISC	MONO_VISC1	MONO_ISOT1	MONO_CINE1
'PRISMATIQUE'	MATER1	VISC	MONO_VISC1	MONO_ISOT2	MONO_CINE2
'BCC24'	MATER1	VISC	MONO_VISC1	MONO_ISOT2	MONO_CINE2...
...	...	...	...	...	...

L'opérateur `DEFI_COMPOR` calcule le nombre total de variables internes associé au monocristal.

Enfin, pour réaliser un calcul de micro-structure, il faut donner, grain par grain, ou par groupe de mailles (représentant des ensembles de grains) une orientation, à l'aide du mot-clé `MASSIF` de `AFFE_CARA_ELEM`. Par exemple :

```

ORIELEM = AFFE_CARA_ELEM ( MODELE = MO_MECA, MASSIF = (
  _F ( GROUP_MA='GRAIN1', ANGL_REP=(348.0,24.0,172.0),),
  _F ( GROUP_MA='GRAIN2', ANGL_REP=( 327.0, 126.0, 335.0),),
  _F ( GROUP_MA='GRAIN3', ANGL_REP=( 235.0, 7.0, 184.0),),
  _F ( GROUP_MA='GRAIN4', ANGL_REP=( 72.0, 338.0, 73.0), ,
... )

```

#### Remarque 1 :

Les orientations des systèmes de glissement peuvent être renseignées en angles nautiques sous le mot clé de `ANGL_REP` ou en angles d'Euler sous le mot clé `ANGL_EULER`.

#### Remarque 2 :

- Posur un même monocristal, les valeurs des paramètres peuvent être différentes d'une famille de systèmes de glissement à l'autre. C'est pourquoi on peut définir un matériau différent par occurrence du mot-clé facteur `MONOCRISTAL`. Mais dans ce cas, comment fournir transmettre à `STAT_NON_LINE` l'information stipulant qu'en un point de gauss (tous ceux du groupe de mailles concerné), on a plusieurs matériaux présents ? Ceci est possible grâce à une évolution de `AFFE_MATERIAU [U4.43.03]` et de la structure de données matériau [D4.06.18] :

```

MAT=AFFE_MATERIAU (MAILLAGE=MAIL,
                   AFFE      =_F (GROUP_MA='GRAIN1',
                                MATER=(MATER1,MATER2),)
                   ,
                   );

```

Les autres données du calcul sont identiques à un calcul de structure habituel.

Enfin, dans `STAT_NON_LINE`, le comportement issu de `DEFI_COMPOR` est fourni, sous le mot clé `COMP_INCR` via le mot clé `COMPOR`, obligatoire avec le mot-clé `RELATION='MONOCRISTAL'`.  
`COMP_INCR = _F( RELATION = 'MONOCRISTAL', COMPOR = COMPI`

Précisions que pour l'intégration explicite, (`ALGO_INTE='RUNGE_KUTTA'`), il est inutile de demander la réactualisation de la matrice tangente puisque celle-ci n'est pas calculée. Pour débiter des itérations de Newton de l'algorithme global, il peut être utile de spécifier `PREDICTION='EXTRAPOLE'` [U4.51.03].

On pourra trouver des exemples d'utilisation dans les tests : `SSNV171`, `SSNV172`, `SSNV194`.

## 6.2 Cas du polycristal

Dans le cas de polycristaux multiphasés, chaque phase correspond à un monocristal. On utilisera donc les paramètres définis précédemment dans `DEFI_MATERIAU` pour le monocristal. Ici, il s'agit de définir, pour chaque phase, l'orientation, la fraction volumique, le monocristal utilisé, et le type de loi de localisation. Ceci est effectué sous le mot-clé `facteur POLYCRISTAL` de `DEFI_COMPOR`.

```
MONO1=DEFI_COMPOR(MONOCRISTAL=_F(MATER=MATPOLY,  
    ECOULEMENT='MONO_VISC2',  
    MONO_ISOT='MONO_ISOT2',  
    MONO_CINE='MONO_CINE1',  
    ELAS='ELAS',  
    FAMI_SYST_GLIS='OCTAEDRIQUE',),),);  
  
POLY1=DEFI_COMPOR(POLYCRISTAL=( _F(MONOCRISTAL=MONO1,  
    FRAC_VOL=0.025,  
    ANGL_REP=(-149.676,15.61819,154.676),),),  
    _F(MONOCRISTAL=MONO1,  
    FRAC_VOL=0.025,  
    ANGL_REP=(-150.646,33.864,55.646),),),  
    _F(MONOCRISTAL=MONO1,  
    FRAC_VOL=0.025,  
    ANGL_REP=(-137.138,41.5917,142.138),),),  
    .....  
    _F(MONOCRISTAL=MONO1,  
    FRAC_VOL=0.025,  
    ANGL_REP=(-481.729,35.46958,188.729),),),),  
    LOCALISATION='BETA',  
    DL=321.5,  
    DA=0.216,);
```

Le mot-clé `POLYCRISTAL` permet de définir chaque phase par la donnée d'une orientation, (fournie par `ANGL_REP` ou `ANGL_EULER`), d'une fraction volumique, d'un mono-cristal (c'est-à-dire un modèle de comportement et des systèmes de glissement).

Le mot-clé `LOCALISATION` permet de choisir la méthode de localisation pour l'ensemble des phases du polycristal.

Le mot clé `MASSIF` permet de choisir une orientation globale du polycristal sous le mot clé `ANGL_REP` si c'est en angles nautiques ou bien sous le mot clé `ANGL_EULER` si c'est en angles d'Euler.

Enfin, dans `STAT_NON_LINE`, le comportement issu de `DEFI_COMPOR` est fourni, sous le mot clé `COMP_INCR` via le mot clé `COMPOR`, obligatoire avec le mot-clé `RELATION='POLYCRISTAL'`.  
`COMP_INCR = _F( RELATION = 'POLYCRISTAL',  
 COMPOR = COMPI )`

## 6.3 Exemple

A titre d'exemple de mis en œuvre, on présente ici succinctement un calcul d'agrégat, de forme cubique (volume élémentaire) comprenant 100 grains monocristallins, définis chacun par un groupe

de mailles. Le nombre total d'éléments est 86751. Avec des mailles d'ordre 1 (TETRA4) il comporte 15940 nœuds. Avec des mailles d'ordre 2 (TETRA10), il en comporte 121534. Le chargement consiste en une déformation homogène, appliquée par l'intermédiaire d'un déplacement normal imposé sur une face du cube (direction  $z$ ). On atteint une déformation de 4% en 1s et 50 incréments.

```
ACIER=DEFI_MATERIAU(ELAS=_F(E =145200.0,NU=0.3),,
                    MONO_VISC1=_F(N=10.,K=40.,C=10.),,
                    MONO_ISOT2=_F(R_0=75.5,
                                    B1 =19.34,
                                    B2 =5.345,
                                    Q1 =9.77,
                                    Q2 =33.27,
                                    H=0.5),
                    MONO_CINE1=_F(D=36.68),,);

COEF=DEFI_FONCTION(NOM_PARA ='INST', VALE =(0.0,0.0,1.0,1.0),,);
MAT=AFFE_MATERIAU(MAILLAGE=MAIL, AFFE=_F(TOUT ="OUI", MATER=(ACIER),,));

COMPORT=DEFI_COMPOR(MONOCRISTAL=( _F(MATER =ACIER,
    ECOULEMENT="MONO_VISC1",
    MONO_ISOT ="MONO_ISOT2",
    MONO_CINE ="MONO_CINE1",
    ELAS="ELAS",
    FAMI_SYST_GLIS='OCTAEDRIQUE',),
),,);

ORIELEM = AFFE_CARA_ELEM ( MODELE = MO_MECA, MASSIF =(
_F ( GROUP_MA='GRAIN1', ANGL_REP=(348.0,24.0,172.0), ),
_F ( GROUP_MA='GRAIN2', ANGL_REP=( 327.0, 126.0, 335.0), ),
_F ( GROUP_MA='GRAIN3', ANGL_REP=( 235.0, 7.0, 184.0), ),
.....
_F ( GROUP_MA='GRAIN99', ANGL_REP=( 201.0, 198.0, 247.0), ),
_F ( GROUP_MA='GRAIN100', ANGL_REP=( 84.0, 349.0, 233.0), ),
))

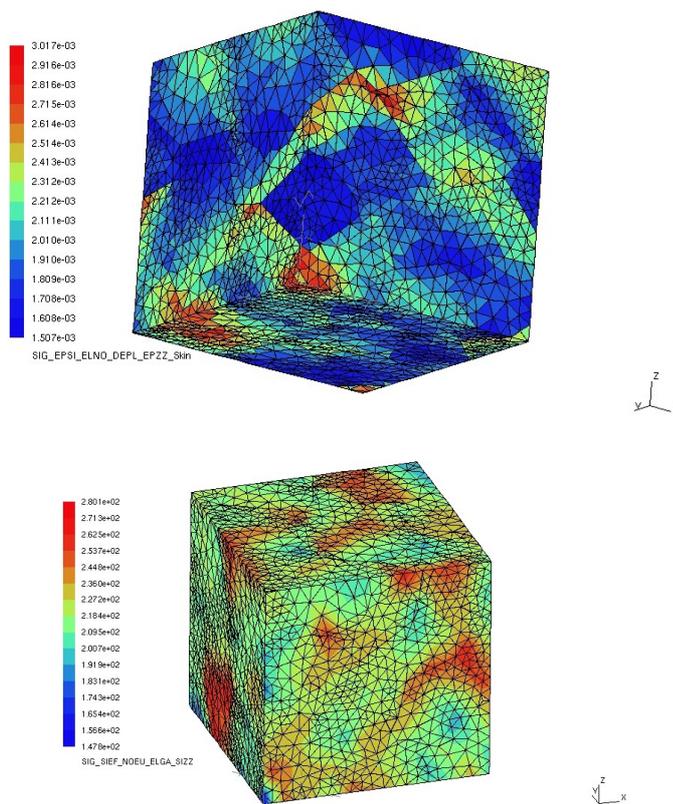
FO_UZ = DEFI_FONCTION ( NOM_PARA = 'INST',VALE = ( 0.0, 0.0, 1.0, 0.04, ),)

CHME4=AFFE_CHAR_MECA_F(MODELE=MO_MECA, DDL_IMPO=_F(GROUP_NO='HAUT', DZ=FO_UZ),)

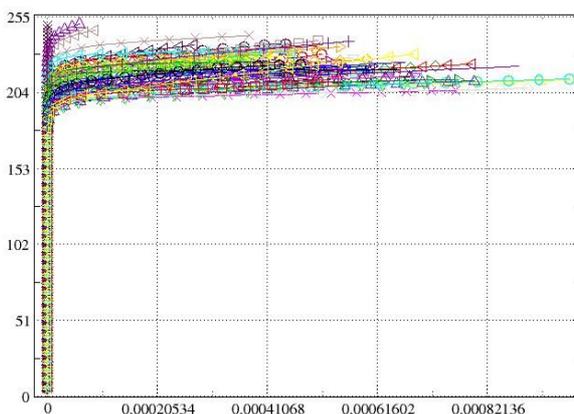
LINST = DEFI_LIST_REEL (DEBUT= 0.,INTERVALLE =( _F ( JUSQU_A = 1.,NOMBRE= 50 ),) )

SIG=STAT_NON_LINE(MODELE =MO_MECA,CARA_ELEM=ORIELEM,CHAM_MATER =MAT,
    EXCIT=( _F(CHARGE=CHME1),
            _F(CHARGE=CHME2),
            _F(CHARGE=CHME3),
            _F(CHARGE=CHME4),),
    COMP_INCR=_F( RELATION ='MONOCRISTAL',COMPOR =COMPORT),
    INCREMENT=_F(LIST_INST=LINST),)
```

Les figures suivantes représentent des isovaleurs des déformations les contraintes suivant  $z$ . On note la non homogénéité des valeurs, et on peut même discerner le contour des grains.



Pour pouvoir exploiter ce type de résultats, on peut par exemple calculer des champs moyens par grains. Sur la figure suivante, on a représenté les contraintes équivalentes en fonction des déformations plastiques équivalentes pour l'ensemble des grains.



## 7 Bibliographie

- MERIC L., CAILLETAUD G. : « single crystal modeling fort structural calculations » in Journal of Engineering Material and Technology, janvier 1991, vol 113, pp171-182.
- LECLERCQ S., DIARD, O., PROIX J.M. : “Etude d’impact de l’implantation d’une bibliothèque de lois de comportement et de règles de transition d’échelles » Note EDF R&D HT-26/03/053/A.
- CAILLETAUD G. : “A micromechanical approach to inelastic behaviour of metals”, Int. J. of Plasticity, 8, pp. 55-73, 1992.
- PILVIN P. : “The contribution of micromechanical approaches to the modelling of inelastic behaviour of polycrystals”, Int. Conf. on Biaxial / Multiaxial fatigue, France, ESIS/SF2M, pp. 31-46, 1994.
- BERVEILLER M., ZAOUI A. : “An extension of the self-consistent scheme to plasticity flowing polycrystal” J. Mech. Phys. Solids, 6, pp. 325-344, 1979.
- G.MONNET “A crystalline plasticity law for austenitic stainless steels”, Note EDF R&D H-B60-2008-04690-EN
- N.Rupin « implementation of a new constitutive law based on dislocation dynamics for FCC materials» Note EDF-R&D : Note EDF R&D HT24-2010-01128-EN.
- C.Petry “Procédure de génération de maillages d’agrégats polycristallins” Note EDF R&D H-T24-2008-03481
- A.ZEGHADI : « Effet de la morphologie 3D et de la taille de grain sur le comportement mécanique d’agrégats polycristallins ». Thèse de l’Ecole des Mines de Paris, 2005.
- N.Rupin : « Déformation à chaud de métaux biphasés. Modélisations théoriques et confrontations expérimentales ». Thèse de l’Ecole Polytechnique, 2007.
- M.Fivel, S.Forest “Plasticité cristalline et transition d’échelle : cas du monocristal”. Techniques de l’ingénieur M4 016
- « Computational methods for plasticity » Wiley 2008, EA de Souza Neto, D. Peric, DRJ. Owen
- « A computational procedure for rate-independent crystal plasticity » L.ANAND & M.KOTHARI, J.Mech.Phys.Solids, vol 44, n°4, pp.525-558, 1996
- C. Stolz. Milieux continus en transformations finies : hyperélasticité, rupture, élasto-plasticité. Les éditions de l’Ecole Polytechnique, 2002.
- Homogénéisation en mécanique des matériaux”, tome 2. M.Bornert, P.Gilormini, T.Bertheau
- J. SCHWARTZ : “Approche non locale en plasticité cristalline : application à l’étude du comportement mécanique de l’acier AISI 316LN en fatigue oligocyclique”. Thèse de l’Ecole Centrale de Paris, Juin 2011.
- G.Monnet : “DELIVERABLE D1-2.9. Crystal plasticity constitutive law for irradiated RPV steel” Note EDF R&D H-T27-2011-02738-EN, Décembre 2011.

## 8 Historique des versions du document

Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
7.4	J.M.PROIX, O.DIARD, T.KANIT EDF/R&D	Version initiale
8.4	J.EL-GHARIB,J.M.PROIX, EDF/R&D	Compléments
9.2	J.EL-GHARIB,J.M.PROIX, EDF/R&D	Ajout du comportement MONO_DD_KR.
9.4	J.EL-GHARIB,J.M.PROIX, EDF/R&D	Optimisation du comportement MONO_DD_KR.
10.2	J.M.PROIX	remarque sur la matrice d'interaction
10.3	N.RUPIN,J.M.PROIX, EDF/R&D	Ajout du comportement DD_CFC
10.5	N.RUPIN,J.M.PROIX, EDF/R&D	Ajout de la rotation du réseau cristallin
11.1	N.RUPIN, F.LATOURTE, J.M.PROIX, EDF/R&D	Ajout des grandes déformations
11.1	N.RUPIN,J.M.PROIX, EDF/R&D	Fiches 16373 (critère de convergence) et 17422 : correction variables internes du POLYCRISTAL.
11.1	P. DE BONNIERES, J.M. PROIX	Fiche 14586 : ajout du comportement DD_FAT
11.2	J.M. PROIX	Fiche 18398 : résorption de ALGO_C_PLAN
11.2	J.M. PROIX	Fiche 18692 ajout de DD_CC
11.3	J.M. PROIX	Fiche 19021 ajout des variables internes pour DD_CC_IRRA

## Annexe 1 Expression du Jacobien des équations élasto-viscoplastiques intégrées

Le système à résoudre est de la forme :

$$R(Y) = R(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) = \begin{cases} s(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ e(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ n_s \begin{cases} a(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ g(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ p(\Sigma, \Delta E^{vp}, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \end{cases} \end{cases} \\
 = \begin{cases} \Lambda^{-1} \Sigma - (\Lambda^{-1}) \Sigma - (\Delta E - \Delta E^{th} - \Delta E^{vp}) \\ \Delta E^{vp} - \sum_s \mu_s \Delta \gamma_s \\ n_s \begin{cases} \Delta \alpha_s - h(\tau_s^+, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ \Delta \gamma_s - g(\tau_s^+, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \\ \Delta p_s - f(\tau_s^+, \alpha_s^+, \gamma_s^+, p_s^+) \end{cases} \end{cases} \\
 = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_s^+ = \Sigma^+ : \mu_s$$

Soit donc à évaluer les termes de l'hypermatrice jacobienne  $J$  à l'instant  $t + \Delta t$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial s}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial s}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial s}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial s}{\partial \Delta p_s} \\ \frac{\partial e}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial e}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial e}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial e}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial e}{\partial \Delta p_s} \\ \frac{\partial a}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial a}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial a}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial a}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial a}{\partial \Delta p_s} \\ \frac{\partial g}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial g}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial g}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial g}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial g}{\partial \Delta p_s} \\ \frac{\partial p}{\partial \Delta \Sigma} & \frac{\partial p}{\partial \Delta E^{vp}} & \frac{\partial p}{\partial \Delta \alpha_s} & \frac{\partial p}{\partial \Delta \gamma_s} & \frac{\partial p}{\partial \Delta p_s} \end{bmatrix}$$

En ce qui concerne la première ligne de la matrice, indépendamment des équations d'écoulement et d'écroutissement, on a :

$$\frac{\partial s}{\partial \Delta \Sigma} = D^{-1} \quad \frac{\partial s}{\partial \Delta E^{vp}} = Id \quad \frac{\partial s}{\partial \Delta \alpha_s} = \frac{\partial s}{\partial \Delta \gamma_s} = \frac{\partial s}{\partial \Delta p_s} = 0$$

La deuxième ligne peut s'écrire également indépendamment de l'écoulement et des écroutissements :

$$\frac{\partial e}{\partial \Delta \Sigma} = 0 \quad \frac{\partial e}{\partial \Delta E^{vp}} = Id \quad \frac{\partial e}{\partial \Delta \alpha_s} = 0 \quad \frac{\partial e}{\partial \Delta \gamma_s} = -\mu_s \quad \frac{\partial e}{\partial \Delta p_s} = 0$$

La première colonne des lignes correspondant aux équations (a), (g) et (p) s'écrit :

$$\frac{\partial a}{\partial \Delta \Sigma} = \frac{\partial a}{\partial \Delta \tau_s} \frac{\Delta \tau_s}{\Delta \Sigma}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta \Sigma} = \frac{\partial g}{\partial \Delta \tau_s} \frac{\Delta \tau_s}{\Delta \Sigma}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta \Sigma} = \frac{\partial p}{\partial \Delta \tau_s} \frac{\Delta \tau_s}{\Delta \Sigma}$$

avec

$$\frac{\Delta \tau_s}{\Delta \Sigma} = (\mu_s)^T$$

La deuxième colonne est identiquement nulle (du fait de l'équation (e)) : les relations d'écoulement et d'écrouissage ne peuvent s'exprimer qu'en fonction de  $\Delta \gamma_s$  et non pas de  $\Delta E^{vp}$ .

Le dernier bloc d'équations, dépend quant à lui des comportements choisis :

$$\frac{\partial a}{\partial \Delta \alpha_s} \quad \frac{\partial a}{\partial \Delta \gamma_s} \quad \frac{\partial a}{\partial \Delta p_s}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta \alpha_s} \quad \frac{\partial g}{\partial \Delta \gamma_s} \quad \frac{\partial g}{\partial \Delta p_s}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta \alpha_s} \quad \frac{\partial p}{\partial \Delta \gamma_s} \quad \frac{\partial p}{\partial \Delta p_s}$$

## Exemple

Choisissons la relation d'écoulement viscoplastique **MONO\_VISC1**

$$(g) \Delta \gamma_s - \Delta p_s \frac{\tau_s - c\alpha_s}{|\tau_s - c\alpha_s|} = 0$$

$$(p) \Delta p_s - \Delta t \cdot \left\langle \frac{|\tau_s - c\alpha_s| - R_s(p_s)}{k} \right\rangle^n = 0$$

avec l'écrouissage isotrope **MONO\_ISOT1** :  $R_s(p_s) = R_0 + Q \left( \sum_{r=1}^N h_{sr} (1 - e^{-bp_r}) \right)$ ,  $h_{sr} = (1 - \delta_{sr}) + \delta_{sr}$

et un écrouissage cinématique défini par **MONO\_CINE1**

$$(a) \Delta \alpha_s - \Delta \gamma_s + d\alpha_s \Delta p_s = 0$$

alors :

$$\frac{\partial a}{\partial \Delta \tau_s} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta \tau_s} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta \tau_s} = \frac{-n \Delta t}{K^n} \langle |\tau_s - c\alpha_s| - R_s(p_s) \rangle^{n-1} \frac{\tau_s - c\alpha_s}{|\tau_s - c\alpha_s|}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \Delta \alpha_s} = 1 + d\Delta p_s$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta \alpha_s} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta \alpha_s} = \frac{nc \Delta t}{K^n} \langle |\tau_s - c\alpha_s| - R_s(p_s) \rangle^{n-1} \frac{\tau_s - c\alpha_s}{|\tau_s - c\alpha_s|}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \Delta \gamma_s} = -1$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta \gamma_s} = 1$$

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta \gamma_s} = 0$$

$$\frac{\partial a}{\partial \Delta p_s} = d\alpha_s$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta p_s} = \frac{\tau_s - c\alpha_s}{|\tau_s - c\alpha_s|}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta p_s} = 1 + \frac{n \Delta t}{K^n} \langle |\tau_s - c\alpha_s| - R_s(p_s) \rangle^{n-1} \frac{dR_s(p_s)}{d\Delta p_s}$$

$$\frac{dR_s(p_s)}{d\Delta p_s} = Qb_{ss} e^{-bp_s}$$

et, concernant l'interaction entre systèmes de glissement, il y a un seul terme non nul :

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta p_r} = 1 + \frac{n \Delta t}{K^n} \langle |\tau_s - c\alpha_s| - R_s(p_s) \rangle^{n-1} \frac{dR_s(p_s)}{d\Delta p_r}$$

$$\frac{dR_s(p_s)}{d\Delta p_r} = Qb_{sr} e^{-bp_r}$$

## Annexe 2 Évaluation de l'opérateur tangent cohérent

Il s'agit de trouver l'opérateur tangent cohérent, c'est à dire calculé à partir de la solution de  $(R(Y) = 0)$  en fin d'incrément. Pour une petite variation de  $R$ , en considérant cette fois  $\Delta E$  comme variable et non comme paramètre, on obtient :

$$\frac{\partial R}{\partial \Sigma} \delta \Sigma + \frac{\partial R}{\partial \Delta E} \delta \Delta E + \frac{\partial R}{\partial \Delta E^{vp}} \delta \Delta E^{vp} + \frac{\partial R}{\partial \Delta \alpha_s} \delta \Delta \alpha_s + \frac{\partial R}{\partial \Delta \gamma_s} \delta \Delta \gamma_s + \frac{\partial R}{\partial \Delta p_s} \delta \Delta p_s = 0$$

Ce système peut s'écrire :

$$\frac{\partial R}{\partial Y} \delta(Y) = X, \text{ avec } Y = \begin{bmatrix} \Sigma \\ \Delta E^{vp} \\ \Delta \alpha_s \\ \Delta \gamma_s \\ \Delta p_s \end{bmatrix} \text{ et } X = \begin{bmatrix} \delta \Delta E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En écrivant la matrice jacobienne sous la forme :

$$J \cdot \delta Y = \begin{bmatrix} Y_0 & [1] & [0] \\ [0] & [1] & Y_1 \\ Y_2 & [0] & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \\ \Delta E^{vp} \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

Avec :

$$Y_0 = \Lambda^{-1}$$

$$\Delta Z = \begin{pmatrix} \Delta \alpha_s \\ \Delta \gamma_s \\ \Delta p_s \end{pmatrix} \times n_s$$

Les sous-matrices ont pour dimensions :

$$\dim(Y_0 = \Lambda^{-1}) = [6, 6]$$

$$\dim Y_1 = [6, 3 * n_s]$$

$$\dim Y_2 = [3 * n_s, 6]$$

$$\dim Y_3 = [3 * n_s, 3 * n_s]$$

En opérant par éliminations et substitutions successives, le troisième bloc du système d'équation donne :

$$\Delta Z = -(Y_3)^{-1} Y_2 \Sigma$$

$$\Delta E^{vp} = -Y_1 \Delta Z = Y_1 (Y_3)^{-1} Y_2 \Sigma$$

$$(Y_0 + Y_1 (Y_3)^{-1} Y_2) \Sigma = \Delta E$$

l'opérateur tangent recherché peut donc s'écrire directement :

$$\left( \frac{\partial \Sigma}{\partial E} \right)_{t+\Delta t} = \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \Delta E} \right)_{t+\Delta t} = (Y_0 + Y_1 Y_3^{-1} Y_2)^{-1}$$

## Annexe 3 Évaluation de l'opérateur tangent cohérent – Cas du système réduit

Il s'agit de trouver l'opérateur tangent cohérent, c'est à dire calculé à partir de la solution de  $(R(Y)=0)$  en fin d'incrément. Pour une petite variation de  $R$ , en considérant cette fois  $\Delta E$  comme variable et non comme paramètre, on obtient :

$$\frac{\partial R}{\partial \Sigma} \delta \Sigma + \frac{\partial R}{\partial \Delta E} \delta \Delta E + \frac{\partial R}{\partial \Delta \gamma_s} \delta \Delta \gamma_s = 0$$

Ce système peut s'écrire :

$$\frac{\partial R}{\partial Y} \delta(Y) = X \text{ avec } Y = \begin{bmatrix} \Sigma \\ \Delta \gamma_s \end{bmatrix} \text{ et } X = \begin{bmatrix} \delta \Delta E \\ 0 \end{bmatrix}$$

En écrivant la matrice jacobienne sous la forme :

$$J \cdot \delta Y = \begin{bmatrix} Y_0 & Y_1 \\ Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

Avec :

$$Y_0 = \Lambda^{-1} \\ \Delta Z = \{ \Delta \gamma_s \} \times n_s$$

Les sous-matrices ont pour dimensions :

$$\dim(Y_0 = \Lambda^{-1}) = [6,6]$$

$$\dim Y_1 = [6, n_s]$$

$$\dim Y_2 = [n_s, 6]$$

$$\dim Y_3 = [n_s, n_s]$$

En opérant par éliminations et substitutions successives, le troisième bloc du système d'équation donne :

$$\Delta Z = -(Y_3)^{-1} Y_2 \Sigma \\ (Y_0 - Y_1 (Y_3)^{-1} Y_2) \Sigma = \Delta E$$

l'opérateur tangent recherché peut donc s'écrire directement :

$$\left( \frac{\partial \Sigma}{\partial E} \right)_{t+\Delta t} = \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \Delta E} \right)_{t+\Delta t} = (Y_0 - Y_1 Y_3^{-1} Y_2)^{-1}$$

## Annexe 4 Matrices tangentes en grandes déformations :

Système local résolu par Newton :

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{S}, \Delta \omega) = \Lambda^{-1} \cdot \mathbf{S} - \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e - \mathbf{I}_d) = 0$$

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{S}, \Delta \omega) = \Delta \omega_s - h_s(\tau_s(\mathbf{S}), \Delta \omega_s) = 0$$

avec  $\tau_s(\mathbf{S}) = \left[ (2\Lambda^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{I}_d) \mathbf{S} \right] : \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s$  et  $\mathbf{F}_{n+1}^e = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}$

Calcul de la matrice tangente :

En exprimant la variation de  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  par rapport à  $\mathbf{S}$ ,  $\Delta \omega$  et  $\Delta \mathbf{F}$ , on obtient le système :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{S}} \delta \mathbf{S} + \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \Delta \omega} \delta \Delta \omega + \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \Delta \mathbf{F}} \delta \Delta \mathbf{F} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{S}} \delta \mathbf{S} + \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \Delta \omega} \delta \Delta \omega &= 0 \quad \text{car} \quad \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \Delta \mathbf{F}} = 0 \end{aligned}$$

en remplaçant  $\delta \Delta \omega$  issu du deuxième groupe d'équations dans le premier (condensation statique) on obtient :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{S}} - \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \Delta \omega} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \Delta \omega} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{S}} \right) \delta \mathbf{S} &= \frac{-\partial \mathbf{R}_1}{\partial \Delta \mathbf{F}} \delta \Delta \mathbf{F} \quad \text{donc :} \\ \frac{\delta \mathbf{S}}{\delta \Delta \mathbf{F}} &= - \left( \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{S}} - \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \Delta \omega} \left( \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \Delta \omega} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \mathbf{S}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \Delta \mathbf{F}} \end{aligned}$$

ceci permet de calculer cette expression intervenant dans l'opérateur tangent uniquement en fonction de la matrice jacobienne du système d'équations local.

L'opérateur tangent complet peut s'écrire, en configuration actuelle (cf. R5.03.21) :  $\frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta \Delta \mathbf{F}}$  avec  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des contraintes de Kirchhoff, déduit de  $\mathbf{S}$  par :  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}^e \mathbf{S} \mathbf{F}^{eT}$

on en déduit :  $\frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta \Delta \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\delta \Delta \mathbf{F}} \mathbf{S} \mathbf{F}^{eT} + \mathbf{F}^e \frac{\partial \mathbf{S}}{\delta \Delta \mathbf{F}} \mathbf{F}^{eT} + \mathbf{F}^e \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{F}^{eT}}{\delta \Delta \mathbf{F}}$

il reste à calculer  $\frac{\partial \mathbf{F}^e}{\delta \Delta \mathbf{F}} = \frac{\partial \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\delta \Delta \mathbf{F}}$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{ij}^e}{\delta \Delta \mathbf{F}_{kl}} = \delta_{ik} F^e (t_{i-1})_{lb} (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}_{bj} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{ij}^{eT}}{\delta \Delta \mathbf{F}_{kl}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{ji}^e}{\delta \Delta \mathbf{F}_{kl}} = \delta_{jk} F^e (t_{i-1})_{la} (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}_{ai}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{1ij}}{\delta \Delta \mathbf{F}_{kl}} = \frac{-1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}^{eT}}{\delta \Delta \mathbf{F}} \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{eT} \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\delta \Delta \mathbf{F}} \right]_{ijkl} = \frac{-1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_{mi}^e}{\delta \Delta \mathbf{F}_{kl}} \mathbf{F}_{mj}^e + \mathbf{F}_{mi}^e \frac{\partial \mathbf{F}_{mj}^e}{\delta \Delta \mathbf{F}_{kl}} \right]$$

Il reste à calculer les termes de la matrice jacobienne, spécifiques aux grandes déformations.

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1(\mathbf{S}, \Delta \omega)}{\partial \mathbf{S}} = \Lambda^{-1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^{eT}}{\partial \mathbf{S}} \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{eT} \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \mathbf{S}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \mathbf{S}} = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e \frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \mathbf{S}} = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e \sum_s \left[ \frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_s} \frac{\partial \Delta \gamma_s}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathbf{S}} \right]$$

avec  $\frac{\partial \tau_s}{\partial \mathbf{S}} = \left[ 2 \Lambda^{-1} (\boldsymbol{\mu}_s \mathbf{S}) + 2 (\Lambda^{-1} \mathbf{S}) \boldsymbol{\mu}_s + \boldsymbol{\mu}_s \right]$  où  $\boldsymbol{\mu}_s = \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s$

ce qui s'écrit en composantes :  $\frac{\partial \tau_s}{\partial S_{ab}} = \left[ 2 \Lambda_{abmn}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_s \mathbf{S})_{mn} + 2 (\Lambda_{akmn}^{-1} S_{mn}) (\boldsymbol{\mu}_s)_{kb} + (\boldsymbol{\mu}_s)_{ab} \right]$

$$\frac{\partial (\mathbf{R}_1)_{ij}}{\partial S_{kl}} = \Lambda_{ijkl}^{-1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^{eT}}{\partial S_{kl}} \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{eT} \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial S_{kl}} \right) \quad \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial S_{kl}} = \Delta \mathbf{F}_{im} \mathbf{F}_{mn}^e \sum_s \left[ \frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_s} \frac{\partial \Delta \gamma_s}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial S_{kl}} \right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1(\mathbf{S}, \Delta \omega)}{\partial \Delta \omega_s} = \frac{-1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^{eT}}{\partial \Delta \omega_s} \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{eT} \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \Delta \omega_s} \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \Delta \omega_s} = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e \frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \omega_s} = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e \sum_r \left[ \frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_r} \frac{\partial \Delta \gamma_r}{\partial \Delta \omega_s} \right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_2(\mathbf{S}, \Delta \omega)}{\partial \mathbf{S}} = - \frac{\partial h_s}{\partial \mathbf{S}} = - \sum_r \frac{\partial h_s}{\partial \tau_r} \frac{\partial \tau_r}{\partial \mathbf{S}} = - \frac{\partial h_s}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathbf{S}}$$

Les termes  $\frac{\partial \Delta \gamma_s}{\partial \tau_s}$ ,  $\frac{\partial \Delta \gamma_r}{\partial \Delta \omega_s}$ ,  $\frac{\partial h_s}{\partial \tau_s}$  sont spécifiques à chaque comportement monocristallin, et sont calculés de façon identique aux petites déformations.

Il reste à calculer  $\frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_r}$ . Suivant les expressions choisies pour le calcul de  $(\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}$  :

1.  $(\Delta \mathbf{F}^p)^{-1} = \exp(-\sum \Delta \gamma_s \boldsymbol{\mu}_s)$  conduit à calculer la dérivée de l'exponentielle :

$$\frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_r} = - \frac{\partial \exp(-\sum_s \Delta \gamma_s \boldsymbol{\mu}_s)}{\partial (-\sum_s \Delta \gamma_s \boldsymbol{\mu}_s)} \boldsymbol{\mu}_r$$

Ceci peut être calculé grâce à un développement en séries, décrit dans 40 .

2.  $(\Delta \mathbf{F}^p)^{-1} = \left( \frac{\mathbf{A}}{(\det \mathbf{A})^{\frac{1}{3}}} \right)^{-1}$  avec  $\mathbf{A} = \mathbf{I}_d + \sum \Delta \gamma_s \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s$

$$\frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_r} = - (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1} \otimes (\Delta \mathbf{F}^p)^{-T} \frac{\partial \Delta \mathbf{F}^p}{\partial \Delta \gamma_r} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial((\Delta \mathbf{F}^p)^{-1})_{ij}}{\partial \Delta \gamma_r} = -((\Delta \mathbf{F}^p)^{-1})_{ik} ((\Delta \mathbf{F}^p)^{-T})_{jl} \frac{\partial(\Delta \mathbf{F}^p)_{kl}}{\partial \Delta \gamma_r}$$

avec :

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{F}^p}{\partial \Delta \gamma_r} = (\det \mathbf{A})^{-\frac{1}{3}} \left( \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{n}_r - \frac{1}{3} (\mathbf{A}^{-T} : \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{n}_r) \mathbf{A} \right)$$

ou en composantes :

$$\frac{\partial(\Delta \mathbf{F}^p)_{ij}}{\partial \Delta \gamma_r} = (\det \mathbf{A})^{-\frac{1}{3}} \left( (\mathbf{m}_r \otimes \mathbf{n}_r)_{ij} - \frac{1}{3} (\mathbf{A})_{kl}^{-T} (\mathbf{m}_r \otimes \mathbf{n}_r)_{kl} \mathbf{A}_{ij} \right)$$

1.  $(\Delta \mathbf{F}^p)^{-1} = (\mathbf{B})(\det \mathbf{B})^{-\frac{1}{3}}$  avec  $\mathbf{B} = \mathbf{I}_d - \sum \Delta \gamma_s \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s$  conduit à

$$\frac{\partial(\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_r} = -(\det \mathbf{B})^{-\frac{1}{3}} \left( \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{n}_r + \frac{1}{3} ((\mathbf{B})^{-T} : \mathbf{m}_r \otimes \mathbf{n}_r) \mathbf{B} \right)$$

ou en composantes :

$$\frac{\partial((\Delta \mathbf{F}^p)^{-1})_{ij}}{\partial \Delta \gamma_r} = -(\det \mathbf{B})^{-\frac{1}{3}} \left( (\mathbf{m}_r \otimes \mathbf{n}_r)_{ij} + \frac{1}{3} (\mathbf{B})_{kl}^{-T} (\mathbf{m}_r \otimes \mathbf{n}_r)_{kl} \mathbf{B}_{ij} \right)$$

## Annexe 5 Écriture générale des matrices jacobiennes

### Formes générales du système local résolu par Newton :

Petites déformations:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\sigma}, \Delta\beta) &= \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \cdot \Delta\boldsymbol{\sigma} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th} + \sum_s \Delta\gamma_s \boldsymbol{\mu}_s = 0 \\ \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\sigma}, \Delta\beta) &= \Delta\beta_s - k_s(\tau_s(\boldsymbol{\sigma}), \Delta\beta) = 0 \end{aligned} \quad \text{où l'inconnue est : } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

avec  $\tau_s(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mu}_s$

Grandes déformations

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1(\mathbf{S}, \Delta\beta) &= \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \cdot \mathbf{S} - \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e - \mathbf{I}_d) = 0 \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{S}, \Delta\beta) &= \Delta\beta_s - k_s(\tau_s(\mathbf{S}), \Delta\beta) = 0 \end{aligned} \quad \text{où l'inconnue est : } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \Delta\beta \end{bmatrix}$$

avec  $\tau_s(\mathbf{S}) = \left[ (2\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{I}_d) \mathbf{S} \right] : \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s$  et  $\mathbf{F}_{n+1}^e = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e (\Delta \mathbf{F}^p (\Delta \gamma_s))^{-1}$

Et, suivant le comportement considéré,

$$\Delta\gamma_s = \Delta p_s(\tau_s, \Delta\beta_s) \xi_s \quad \text{et} \quad \xi_s = \frac{\tau_s}{|\tau_s|} \quad \text{ou} \quad \frac{\tau_s - f(\alpha)}{|\tau_s - f(\alpha)|} \quad \text{correspond au signe de l'écoulement}$$

$\Delta\beta_s$  représente soit l'incrément de glissement plastique  $\Delta\gamma_s$ , pour les lois MONO\_VISC\*, soit la variation de densité de dislocations  $\Delta\omega_s$  pour les lois MONO\_DD\_\*

Les dérivées de ces équations pour le calcul de la matrice jacobienne peuvent être écrites de façon générale :

HPP		GDEF	
$J_{11} = \frac{\partial \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\sigma}, \Delta\beta)_i}{\partial \sigma_j}$	$J_{12} = \frac{\partial \mathbf{R}_1(\boldsymbol{\sigma}, \Delta\beta)_i}{\partial \beta_s}$	$J_{11} = \frac{\partial \mathbf{R}_1(\mathbf{S}, \Delta\beta)_i}{\partial S_j}$	$J_{12} = \frac{\partial \mathbf{R}_1(\mathbf{S}, \Delta\beta)_i}{\partial \beta_s}$
$J_{21} = \frac{\partial \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\sigma}, \Delta\beta)_s}{\partial \sigma_i}$	$J_{22} = \frac{\partial \mathbf{R}_2(\boldsymbol{\sigma}, \Delta\beta)_s}{\partial \beta_r}$	$J_{21} = \frac{\partial \mathbf{R}_2(\mathbf{S}, \Delta\beta)_s}{\partial S_i}$	$J_{22} = \frac{\partial \mathbf{R}_2(\mathbf{S}, \Delta\beta)_s}{\partial \beta_r}$

$J_{11}$

En HPP :  $\frac{\partial R_1^i}{\partial \sigma_j} = (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i \frac{\partial \Delta\gamma_s}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial \sigma_j} = (\boldsymbol{\Lambda}^{-1})_{ij} + \sum_s (\mu_s)_i (\mu_s)_j \frac{\partial \Delta\gamma_s}{\partial \tau_s}$

et en grandes déformations  $\frac{\partial \mathbf{R}_1(\mathbf{S}, \Delta\omega)}{\partial \mathbf{S}} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^{eT}}{\partial \mathbf{S}} \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{eT} \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \mathbf{S}} \right)$  et

$$\frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \mathbf{S}} = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n^e \sum_s \left[ \frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_s} \frac{\partial \Delta \gamma_s}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathbf{S}} \right] \quad \text{où} \quad \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathbf{S}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_s} \quad \text{sont calculés en 47}$$

$J_{12}$

En HPP : 
$$\frac{\partial R_i^{(1)}}{\partial \Delta \beta_s} = \sum_r (\mu_r)_i \frac{\partial \Delta \gamma_r}{\partial \Delta \beta_s}$$

et en grandes déformations 
$$\frac{\partial \mathbf{R}_1(\mathbf{S}, \Delta \beta)}{\partial \Delta \beta_s} = \frac{-1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}^{eT}}{\partial \Delta \beta_s} \mathbf{F}^e + \mathbf{F}^{eT} \frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \Delta \beta_s} \right)$$
 et

$$\frac{\partial \mathbf{F}^e}{\partial \Delta \beta_s} = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_n \sum_r \left[ \frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_r} \frac{\partial \Delta \gamma_r}{\partial \Delta \beta_s} \right],$$
 où  $\frac{\partial (\Delta \mathbf{F}^p)^{-1}}{\partial \Delta \gamma_r}$  est calculé en 47

$J_{21}$

En HPP : 
$$\frac{\partial R_s^2}{\partial \sigma_i} = -(\mu_s)_i \frac{\partial k_s}{\partial \tau_s}$$

et en grandes déformations 
$$\frac{\partial \mathbf{R}_2(\mathbf{S}, \Delta \beta)}{\partial \mathbf{S}} = -\frac{\partial (k_s)}{\partial \mathbf{S}} = -\sum_r \frac{\partial k_s}{\partial \tau_r} \frac{\partial \tau_r}{\partial \mathbf{S}} = -\frac{\partial k_s}{\partial \tau_s} \frac{\partial \tau_s}{\partial \mathbf{S}}.$$

$\frac{\partial \tau_s}{\partial \mathbf{S}}$  est calculé en 47.

$J_{22}$

terme identique en HPP et en grandes déformations : 
$$\frac{\partial R_2^s}{\partial \Delta \beta_r} = \delta_{sr} - \frac{\partial k_s}{\partial \Delta \beta_r}$$
 ou encore (suivant l'ordre de

remplissage de la matrice jacobienne) :

$$\frac{\partial R_2^r}{\partial \Delta \beta_s} = \delta_{rs} - \frac{\partial k_r}{\partial \Delta \beta_s}$$

Les dérivées précédentes ont en commun des termes spécifiques à chaque comportement, qui sont détaillés pour chacun dans ce document :

$$\frac{\partial \Delta \gamma_s}{\partial \tau_s} = \frac{\partial \Delta p_s}{\partial \tau_s} \xi_s,$$

$$\frac{\partial \Delta \gamma_r}{\partial \Delta \beta_s} = \frac{\partial \Delta p_r}{\partial \Delta \beta_s} \xi_r,$$

$$\frac{\partial k_s}{\partial \tau_s}$$

$$\frac{\partial k_r}{\partial \Delta \beta_s}$$



## MONO\_DD\_CFC et MONO\_DD\_FAT

Pour la loi de comportement `MONO_DD_CFC`, la matrice d'interaction adaptée aux 12 systèmes de glissement est obtenue par la dynamique des dislocations discrètes (DDD). Ces valeurs sont fonctions du type de dislocations qui interagissent, le tableau suivant récapitule ces informations. Le paramétrage des systèmes CFC utilisés est celui de Schmid et Boas. Pour la loi `MONO_DD_FAT`, on utilise actuellement la même matrice d'interaction que celle de la loi `MONO_DD_CFC`.

Normale	$\bar{1}11$			111			$\bar{1}\bar{1}1$			1 $\bar{1}\bar{1}$		
Direction	$0\bar{1}1$	101	110	$0\bar{1}1$	$\bar{1}01$	$\bar{1}10$	011	101	$\bar{1}10$	011	$\bar{1}01$	110
Désignation	A2	A3	A6	B2	B4	B5	C1	C3	C5	D1	D4	D6

La correspondance entre les numéros des systèmes de glissement de la famille octaédrique et le paramétrage de Schmid et Boas est la suivante :

Normale	$\bar{1}11$			111			$\bar{1}\bar{1}1$			1 $\bar{1}\bar{1}$		
Direction	$0\bar{1}1$	101	110	$0\bar{1}1$	$\bar{1}01$	$\bar{1}10$	011	101	$\bar{1}10$	011	$\bar{1}01$	110
Numéro (SB)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Désignation	A2	A3	A6	B2	B4	B5	C1	C3	C5	D1	D4	D6
Numéro Aster	7	9	8	2	1	3	12	11	10	5	4	6

La matrice d'interaction est formée de  $4 \times 4$  bloc, chaque bloc étant une matrice  $3 \times 3$ . Nous précisons ici cette matrice dans l'ordre des systèmes de glissement défini dans Aster :

Systèmes de glissement	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12
1, 2, 3	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
4, 5, 6		$A_0$	$A_3$	$A_2$
7, 8, 9			$A_0$	$A_1$
10, 11, 12				$A_0$

Les matrices  $3 \times 3$  sont définies de la façon suivante :

$$A_0 = \begin{pmatrix} a^* & a^* & a^* \\ a^* & a^* & a^* \\ a^* & a^* & a^* \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{\text{colinéaire}} & a_{\text{glissile}} & a_{\text{glissile}} \\ a_{\text{glissile}} & a_{\text{Hirth}} & a_{\text{Lomer}} \\ a_{\text{glissile}} & a_{\text{Lomer}} & a_{\text{Hirth}} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{\text{Hirth}} & a_{\text{glissile}} & a_{\text{Lomer}} \\ a_{\text{glissile}} & a_{\text{colinéaire}} & a_{\text{glissile}} \\ a_{\text{Lomer}} & a_{\text{glissile}} & a_{\text{Hirth}} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{\text{Hirth}} & a_{\text{Lomer}} & a_{\text{glissile}} \\ a_{\text{Lomer}} & a_{\text{Hirth}} & a_{\text{glissile}} \\ a_{\text{glissile}} & a_{\text{glissile}} & a_{\text{colinéaire}} \end{pmatrix}$$

## MONO\_DD\_CC

Pour la loi de comportement `MONO_DD_CC`, la matrice d'interaction adaptée aux 12 systèmes de glissement de type `CUBIQUE1` est obtenue par la dynamique des dislocations discrètes (DDD). Ces valeurs sont fonctions du type de dislocations qui interagissent, le tableau suivant récapitule ces informations. Le paramétrage des systèmes `CC` utilisés est :

Direction	[111]			[111]		
Normale	(110)	(101)	(011)	(011)	(101)	(110)
Numéro	1	2	3	4	5	6

Direction	[111]			[111]		
Normale	(110)	(101)	(011)	(110)	(101)	(011)
Numéro	7	8	9	10	11	12

La matrice d'interaction est formée de 4x4 bloc, chaque bloc étant une matrice 3x3. Nous précisons ici cette matrice dans l'ordre des systèmes de glissement défini dans Aster (famille CUBIQUE1) :

Systèmes de glissement	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12
1, 2, 3	$A_0$	$A_4$	$A_3$	$A_2$
4, 5, 6	$A_4$	$A_0$	$A_5$	$A_5^T$
7, 8, 9	$A_3$	$A_5^T$	$A_0$	$A_1$
10, 11, 12	$A_2$	$A_5$	$A_1$	$A_0$

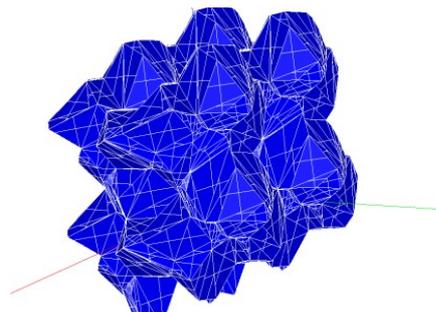
Les matrices 3x3 sont définies de la façon suivante :

$$A_0 = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_1 \\ h_1 & h_1 & h_0 \end{pmatrix} \quad
 A_1 = \begin{pmatrix} h_4 & h_3 & h_2 \\ h_3 & h_5 & h_3 \\ h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix} \quad
 A_2 = \begin{pmatrix} h_4 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_3 & h_5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} h_5 & h_3 & h_3 \\ h_3 & h_4 & h_2 \\ h_3 & h_2 & h_4 \end{pmatrix} \quad
 A_4 = \begin{pmatrix} h_3 & h_5 & h_3 \\ h_4 & h_3 & h_2 \\ h_4 & h_3 & h_2 \end{pmatrix} \quad
 A_5 = \begin{pmatrix} h_3 & h_3 & h_5 \\ h_2 & h_4 & h_3 \\ h_4 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$$

## Annexe 7 Procédure de création de maillage

La création de maillages repose sur une répartition aléatoire de germes (centres des cellules de Voronoï). On construit les grains sous forme de cellules de Voronoï (à l'aide de la bibliothèque qhull, confer <http://www.qhull.org/>) Mais lorsque l'on part d'une répartition aléatoire de germes, on constate que l'on obtient, sans retraitement, des cellules de Voronoï comportant des arêtes parfois très petites, ce qui conduit à un maillage soit de mauvaise qualité, soit impossible à réaliser étant donnée la dispersion des densités locales.



## Figure 8-a. géométrie d'un agrégat engendré avec des cellules de Voronoï

Pour l'élimination des petites arêtes on utilise la propriété suivante : la présence d'une petite arête est liée au fait qu'un germe est proche de la sphère circonscrite au tétraèdre ayant pour sommets 4 autres germes, sans être exactement sur cette sphère. Dans ce cas, il suffit de projeter ce germe sur la sphère pour éliminer la petite arête. L'algorithme construit donc une répartition aléatoire de germes de façon itérative, en veillant à ce que la position de chaque nouveau germe par rapport aux sphères circonscrites existantes soit correcte. (avec projection éventuelle).

Ensuite il faut restreindre la géométrie obtenue au cube représentant le V.E.R. Pour cela on utilise la bibliothèque PyXL (<http://www.tc.cornell.edu/~myers/PyXL>) qui propose des outils (écrits en python et en C) pour tronquer des cellules de Voronoï sur une géométrie donnée. Après cette opération, il est nécessaire de vérifier à nouveau que l'on n'a pas créé de trop petites arêtes. Dans ce cas, on ajoute localement des germes sur les cellules comportant les petites arêtes, puis on recalcule avec ces nouveaux germes les cellules de Voronoï et leurs enveloppes convexes. A la fin de la génération du nombre de germes requis, on calcule le nombre de petites arêtes dont la longueur est inférieure à un certain seuil ainsi que la longueur de la plus petite arête, et on élimine les sommets des cellules quasi-confondus (suite à la projection d'un germe sur une sphère circonscrite).

Il suffit ensuite de générer les données nécessaires à un logiciel de maillage. Les géométries des agrégats sont écrites au format SALOME. La géométrie au format SALOME (fichier écrit en python) offre des fonctionnalités utiles comme le calcul des volumes des cellules. Le maillage est effectué avec le module MESH.

En résumé la création d'un maillage consiste donc en l'appel à une unique procédure python qui enchaîne les actions suivantes :

Création de la géométrie : La procédure enchaîne des appels à des modules écrits en fortran pour gagner en temps calcul (projections sur les sphères) et les bibliothèques Qhull et PyXL ainsi que des procédures python pour créer la géométrie avec le nombre de germes souhaités. Ceci crée un fichier de géométrie au format SALOME, ainsi que des directives de maillage.

Lecture du fichier python et création du maillage dans SALOME, avec calcul du volume de chaque grain et la position des centres de gravité des grains. Le maillage est écrit au format MED pour le calcul avec Code\_Aster.

Une description complète de cette procédure est fournie dans [10]. Elle fonctionne en 2D et en 3D : Quelques exemples de maillage sont fournis ci-dessous :

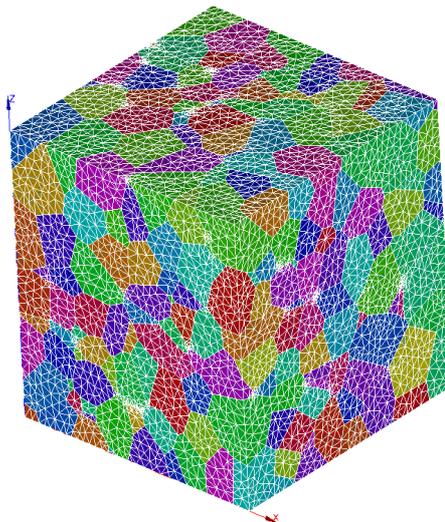


Figure 8-b. maillage d'un agrégat à 988 grains comportant 311510 tétraèdres Tetra4

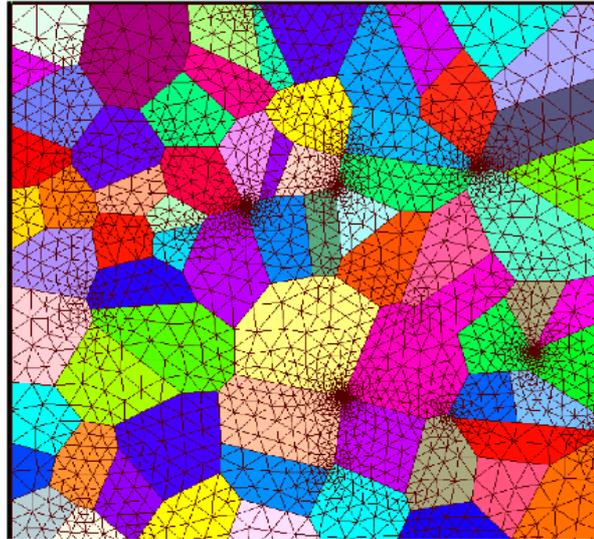


Figure 8-c. maillage d'un agrégat 2D comportant 70 cellules

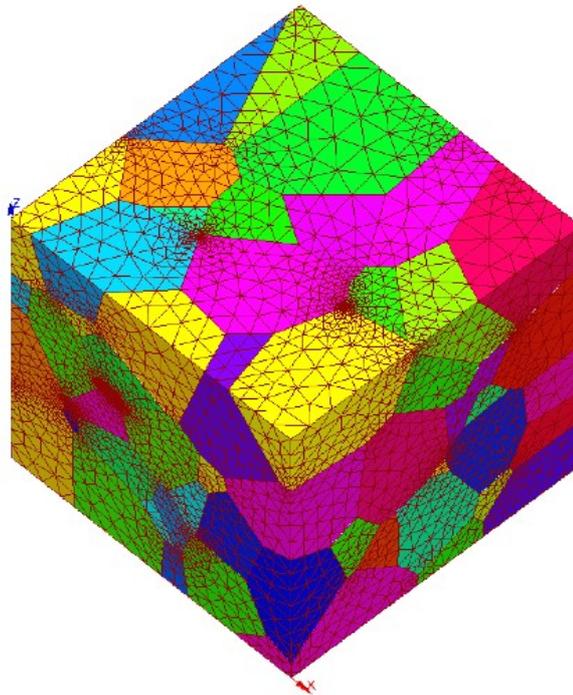


Figure 8-d. maillage 3D de 135 cellules