

Sous-structuration dynamique cyclique

Résumé :

Ce rapport repose sur les notions de calcul par synthèse modale décrites dans le document [R4.06.02].

Nous abordons les méthodes de sous-structuration dynamique cyclique. Complètement dédiées à l'étude des structures à répétitivité cyclique, elles tirent le meilleur parti des particularités géométriques de la structure. Les méthodes de CRAIG-BAMPTON et de MAC NEAL, développées dans ce cadre, sont exposées.

Table des matières

1 Introduction.....	3
2 Répétitivité cyclique.....	4
2.1 Définition.....	4
2.2 Propagation d'onde.....	4
2.3 Notion de diamètres et de cercles nodaux.....	5
2.4 Conditions aux limites.....	6
3 Méthodes de sous-structuration cyclique.....	7
3.1 Méthode de Craig-Bampton.....	7
3.2 Méthode de Mac Neal.....	13
4 Mise en œuvre dans le Code_Aster.....	16
5 Conclusion.....	16
6 Bibliographie.....	17
7 Description des versions du document.....	17

1 Introduction

Dans ce document, nous faisons la synthèse des méthodes de sous-structuration dynamique cyclique. Nous donnons une définition de la répétitivité cyclique (ou symétrie cyclique) et nous présentons les principales incidences de cette propriété sur le comportement dynamique de la structure (cercles et diamètres nodaux, modes doubles). Puis, nous exposons, de manière assez détaillée, les deux méthodes de sous-structuration dynamique cyclique, implémentées dans *Code_Aster*. Des améliorations ont été apportées aux méthodes classiques, par la prise en compte de la présence des nœuds de l'axe.

Ces méthodes supposent que le maillage du secteur de base est tel que ses traces sur les interfaces droite et gauche sont coïncidentes (maillages compatibles).

Notations générales :

ω_m	: Pulsation maximale d'un système ($rad.s^{-1}$)
$\mathbf{M}$	: Matrice de masse issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{K}$	: Matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis
$\mathbf{q}$	: Vecteur des degrés de liberté issus de la modélisation éléments finis
$\mathbf{f}_{ext}$	: Vecteur des forces extérieures au système
$\mathbf{f}_L$	: Vecteur des forces de liaison appliquées à une sous-structure
Φ	: Matrice contenant les vecteurs d'une base de projection organisés en colonne
η	: Vecteur des degrés de liberté généralisés
$\mathbf{B}$	: Matrice d'extraction des degrés de liberté d'interface
$\mathbf{L}$	: Matrice de liaison
T	: Énergie cinétique
U	: Énergie de déformation
$\mathbf{Id}$	: Matrice identité
λ	: Matrice diagonale des rigidités généralisées
	: Matrice de flexibilité dynamique résiduelle
$\mathbf{R}_e(\omega)$	
$\mathbf{R}_e(0)$	: Matrice de flexibilité statique résiduelle

Notations spécifiques à la sous-structuration cyclique :

N	=	nombre de secteurs
α	=	angle formé par le secteur de base
β	=	déphasage inter-secteur
Oz	=	axe de la symétrie cyclique
θ	=	rotation d'angle α et d'axe Oz
$\text{Re}(Z)$	=	partie réelle du complexe Z
$\text{Im}(Z)$	=	partie imaginaire du complexe Z
θ	=	matrice de passage des nœuds de droite aux nœuds de gauche
θ_a	=	matrice de changement de secteur pour les nœuds de l'axe

Remarque :

L'indice	d	est	relatif	
"	g	"	"	aux degrés de liberté de droite
"	a	"	"	aux degrés de liberté de gauche
"	1	"	"	aux degrés de liberté de l'axe
"	1	"	"	aux modes propres identifiés
"	2	"	"	aux modes propres inconnus

2 Répétitivité cyclique

2.1 Définition

On dit qu'une structure est à répétitivité cyclique d'axe Oz , s'il existe un angle $0 < \alpha < \pi$ tel que la structure soit géométriquement et mécaniquement invariante par rotation autour de Oz de cet angle. Si α est le plus petit angle vérifiant cette propriété, alors toute portion angulaire d'angle α de la structure est appelée "secteur de base" (ou "secteur irréductible").

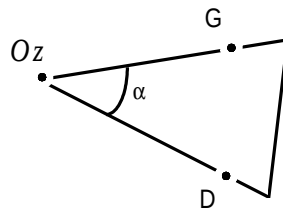
La structure globale est alors composée de N secteurs :

$$N = \frac{2\pi}{\alpha}$$

2.2 Propagation d'onde

On note θ la rotation d'axe Oz et d'angle α définie dans R^3 .

Considérons un secteur de base d'une structure à répétitivité d'axe Oz , et deux points similaires de deux secteurs contigus G et D :



On a la relation entre les points G et D :

$$G = \theta(D)$$

On remarque que la structure est laissée invariante par toute rotation θ^m (avec m entier).

On peut noter que toutes les rotations laissant la structure invariante (géométriquement et mécaniquement) sont en nombre fini :

$$\theta^m \quad m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Considérons une variable d'état scalaire du système mécanique étudié U , et Z le complexe associé :

$$U = \text{Re}(Z) = \text{Re}(U + jV)$$

Il est possible de démontrer, par la théorie des groupes finis, la relation suivante pour les points D et G [bib5] :

$$\exists m \in \{0, 1, \dots, \frac{N}{2}\} \quad \text{tel que} \quad Z(G) = e^{jm\alpha} Z(D) \quad \text{éq 2.2-1}$$

Remarques :

les quantités sont exprimées dans le repère cylindrique (r, θ, z) ,
pour une structure axisymétrique (cas particulier de répétitivité cyclique), m est appelé indice de FOURIER,
dans le cas d'une onde plane non amortie, $e^{jm\alpha}$ est le déphasage complexe entre deux secteurs contigus ; l'équation signifie que ce déphasage ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs connues,
il est possible de limiter le nombre des valeurs de m aux valeurs comprises entre 0 et $N/2$; en effet, on montre que l'onde associée au déphasage $N-m$ est identique à celle associée au déphasage m , mais progresse en sens inverse [bib5].

Si N est pair : $m=0$ et $m=N/2$ correspondent à des modes réels :

$$m=0 \Rightarrow \forall D \quad U(\theta(D))=U(D)$$

$$m=N/2 \Rightarrow \forall D \quad U(\theta(D))=-U(D)$$

Toutes les autres valeurs de m correspondent à des modes apparaissant par paires orthogonales à une fréquence donnée (on parle alors de modes dégénérés) :

$$U=\text{Re}(Z) \quad \text{et} \quad V=\text{Im}(Z)$$

Si N est impair : $m=0$ correspond à un mode réel non dégénéré :

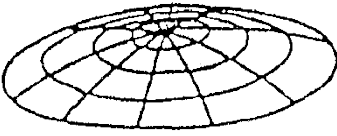
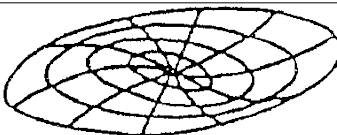
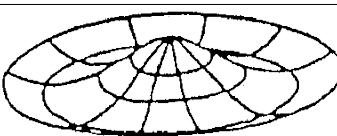
$$m=0 \Rightarrow \forall D \quad U(\theta(D))=U(D)$$

Toutes les autres valeurs de m correspondent à des modes dégénérés apparaissant par paires orthogonales :

$$U=\text{Re}(Z) \quad \text{et} \quad V=\text{Im}(Z)$$

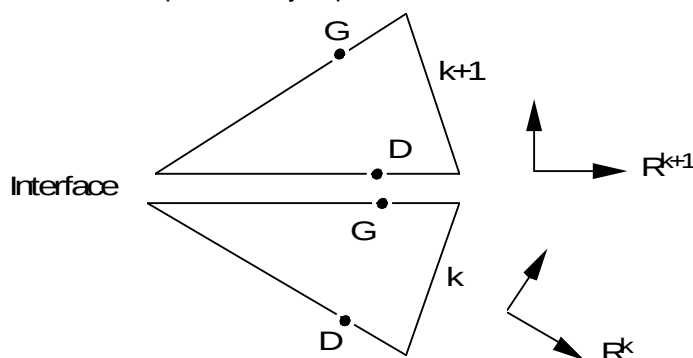
2.3 Notion de diamètres et de cercles nodaux

La propriété de répétitivité cyclique, traduite par l'équation [éq 2.2-1] permet de connaître a priori l'allure des modes propres de la structure, qui se rapproche fortement de ce que l'on peut observer pour des structures axisymétriques. Si l'on considère un mode propre d'une structure à symétrie cyclique, tous les secteurs ont la même déformée mais avec une amplitude fonction de leur position angulaire, ce que l'on peut traduire par un déphasage entre sous-structures. Ce mode peut être classé à partir du nombre de diamètres et de cercles nodaux qui le caractérisent. Un diamètre nodal (qui n'est confondu avec un diamètre que si la structure est axisymétrique) est une ligne de points de mouvement nul passant par l'axe de répétitivité ; un cercle nodal (qui n'a la forme circulaire que pour les structures axisymétriques) est une ligne de points de mouvement nul, elle même à répétitivité cyclique. On constate que c'est la déformée du mode de la sous-structure sur lequel s'appuie le mode de la structure complète qui détermine le nombre de cercle(s) nodal(aux). Par contre, le nombre de diamètre(s) nodal(aux) est défini par le déphasage entre deux secteurs consécutifs.

Déformée du secteur	Phase entre secteur	Déformée d'ensemble	Famille
Flexion 1	N secteurs en phase		0 cercle 0 diamètre
Flexion 1	N/2 secteurs en phase		0 cercle 1 diamètre
Flexion 2	N secteurs en phase		1 cercle 0 diamètre
Flexion 2	N/secteurs en phase		1 cercle 1 diamètre

2.4 Conditions aux limites

Considérons une structure à répétitivité cyclique, et deux secteurs de base successifs de celle-ci :



Les liaisons entre secteurs étant considérées comme parfaites, on a les conditions entre les secteurs :

$$q_g^k = q_d^{k+1} \quad \text{continuité des déplacements}$$

$$f_{L_g}^k = -f_{L_d}^{k+1} \quad \text{principe d'action-réaction} \quad \text{éq 2.4-1}$$

L'exposant indique le numéro du secteur considéré. Les conditions de liaison précédentes sont exprimées dans le repère global.

Par la formule [éq 2.2-1] relative à la propagation d'onde dans la structure et en posant : $\beta = m\alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \{q^{k+1}\}_{k+1} &= e^{j\beta} \{q^k\}_k \\ \{f_L^{k+1}\}_{k+1} &= e^{j\beta} \{f_L^k\}_k \end{aligned}$$

L'indice k signifie que la quantité est exprimée dans le repère lié au secteur $k : R^k$.

Les équations de liaison [éq 2.4-1], écrites dans le repère lié au secteur k font donc intervenir la matrice de passage du secteur k au secteur $k+1$. Cette matrice n'est autre que la matrice de rotation des degrés de liberté de droite vers ceux de gauche, soit la matrice de rotation d'axe Oz et d'angle α , notée : θ .

Nous obtenons donc le système suivant :

$$\begin{aligned} \{q_g^k\}_k &= e^{j\beta} \theta \{q_d^k\}_k \\ \{f_{L_g}^k\}_k &= -e^{j\beta} \theta \{f_{L_d}^k\}_k \end{aligned} \quad \text{éq 2.4-2}$$

Les conditions aux limites [éq 2.4-2] permettent de calculer les modes propres de l'ensemble de la structure à partir d'un seul secteur de base.

Cette formalisation peut être généralisée au cas des nœuds de l'axe. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \{q_a^k\}_k &= e^{j\beta} \theta_a \{q_a^k\}_k \\ \{f_{L_a}^k\}_k &= -e^{j\beta} \theta_a \{f_{L_a}^k\}_k \end{aligned}$$

On vérifie que si β est non nul, le déplacement des nœuds de l'axe est nul (en fait, on note alors la présence d'un ou de plusieurs diamètres nodaux).

3 Méthodes de sous-structuration cyclique

3.1 Méthode de Craig-Bampton

On considère le problème aux valeurs propres de la structure globale exprimé sur le secteur de base. Ce dernier est donc soumis aux forces de liaison qui lui sont appliquées par les secteurs contigus. Par ailleurs, le secteur de base vérifie les équations de liaison [éq 2.4-2]. Nous avons donc :

$$(K - \omega^2 M)q = f_L$$

$$q_g = e^{j\beta} \theta q_d \quad \text{éq 3.1-1}$$

$$f_{L_g} = -e^{j\beta} \theta f_{L_d}$$

Nous supposons que la base est composée des modes propres dynamiques du secteur de base encastré à ses interfaces, notés ϕ , et des modes contraints relatifs aux degrés de liberté d'interfaces droite et gauche, notés Ψ_d et Ψ_g .

Compte tenu du fait que la seule contribution aux déplacements d'un degré de liberté d'interface provient du mode contraint correspondant, la transformation de RITZ peut s'écrire :

$$q = \begin{pmatrix} q_i \\ q_d \\ q_g \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \Psi_d & \Psi_g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_i \\ q_d \\ q_g \end{pmatrix} = \Phi \eta$$

Dès lors, en utilisant la transformation de RITZ, le système d'équations [éq 3.1-1] devient :

$$(\overline{K} - \omega^2 \overline{M}) \begin{Bmatrix} \eta_i \\ q_d \\ q_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \Psi_d & \Psi_g \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{L_d} \\ f_{L_g} \end{Bmatrix} \quad \text{éq 3.1-2}$$

$$q_g = e^{j\beta} \theta q_d \\ f_{L_g} = -e^{j\beta} \theta f_{L_d}$$

Les matrices surmontées d'une barre sont les projections des matrices éléments finis sur la base modale du secteur de base (matrices généralisées).

On peut démontrer que les modes contraints sont orthogonaux aux modes normaux vis à vis de la matrice de rigidité [bib5]. Ainsi, les produits correspondants sont nuls.

Adoptons les notations suivantes :

- m : indice relatif aux modes propres du secteur,
- d : indice relatif aux modes contraints de l'interface droite,
- g : indice relatif aux modes contraints de l'interface gauche.

On peut donc écrire ces matrices sous la forme :

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{K}_{dd} & \overline{K}_{dg} \\ 0 & \overline{K}_{gd} & \overline{K}_{gg} \end{bmatrix} \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} \overline{M}_{mm} & \overline{M}_{md} & \overline{M}_{mg} \\ \overline{M}_{dm} & \overline{M}_{dd} & \overline{M}_{dg} \\ \overline{M}_{gm} & \overline{M}_{gd} & \overline{M}_{gg} \end{bmatrix}$$

Compte tenu de leur définition, les modes contraints vérifient :

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} \Psi_{di} \\ \Psi_{dd} \\ \Psi_{dg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{di} \\ Id \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Psi_g = \begin{bmatrix} \Psi_{gi} \\ \Psi_{gd} \\ \Psi_{gg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{gi} \\ 0 \\ Id \end{bmatrix}$$

Le second membre de l'équation matricielle [éq 3.1-2] devient :

$$\begin{bmatrix} \phi_i & 0 & 0 \\ \Psi_{di} & Id & 0 \\ \Psi_{gi} & 0 & Id \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{L_d} \\ f_{L_g} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{L_d} \\ f_{L_g} \end{Bmatrix}$$

En tenant compte de ces notations, développons l'équation matricielle vérifiée par le secteur de base :

$$\begin{aligned}\overline{K}_{mm}\eta_i - \omega^2(\overline{M}_{mm}\eta_i + \overline{M}_{md}q_d + \overline{M}_{mg}q_g) &= 0 \\ \overline{K}_{dd}q_d + \overline{K}_{dg}q_g - \omega^2(\overline{M}_{dm}\eta_i + \overline{M}_{dd}q_d + \overline{M}_{dg}q_g) &= f_{L_d} \\ \overline{K}_{gd}q_d + \overline{K}_{gg}q_g - \omega^2(\overline{M}_{gm}\eta_i + \overline{M}_{gd}q_d + \overline{M}_{gg}q_g) &= f_{L_g} \\ q_g &= e^{j\beta}\theta q_d \\ f_{L_g} &= -e^{j\beta}\theta f_{L_d}\end{aligned}$$

Introduisons les deux dernières équations de ce système dans les trois premières :

$$\begin{aligned}(\overline{K}_{mm} - \omega^2\overline{M}_{mm})\eta_i - \omega^2(\overline{M}_{md} + e^{j\beta}\overline{M}_{mg}\theta)q_d &= 0 \\ (\overline{K}_{dd} + e^{j\beta}\overline{K}_{dg}\theta)q_d - \omega^2(\overline{M}_{dm}\eta_i + (\overline{M}_{dd} + e^{j\beta}\overline{M}_{dg}\theta)q_d) &= f_{L_d} \\ (\overline{K}_{gd} + e^{j\beta}\overline{K}_{gg}\theta)q_d - \omega^2(\overline{M}_{gm}\eta_i + (\overline{M}_{gd} + e^{j\beta}\overline{M}_{gg}\theta)q_d) &= -e^{j\beta}\theta f_{L_d}\end{aligned}$$

L'association des deux dernières équations permet d'éliminer les termes des forces de liaison. On aboutit alors à un problème aux valeurs propres final que l'on peut mettre sous la forme :

$$(\tilde{K}(\beta) - \omega^2\tilde{M}(\beta))\tilde{q} = 0 \quad \text{éq 3.1-3}$$

Avec : $\tilde{q} = \begin{Bmatrix} \eta_i \\ q_d \end{Bmatrix}$

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \begin{bmatrix} \overline{K}_{mm} & 0 \\ 0 & \overline{K}_{dd} + e^{i\beta}\overline{K}_{dg}\theta + e^{-i\beta}\theta^T\overline{K}_{gd} + \theta^T\overline{K}_{gg}\theta \end{bmatrix} \\ \tilde{M} &= \begin{bmatrix} \overline{M}_{mm} & \overline{M}_{md} + e^{i\beta}\overline{M}_{mg}\theta \\ \overline{M}_{dm} + e^{-i\beta}\theta^T\overline{M}_{gm} & \overline{M}_{dd} + e^{i\beta}\overline{M}_{dg}\theta + e^{-i\beta}\theta^T\overline{M}_{gd} + \theta^T\overline{M}_{gg}\theta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Les matrices de masse et de rigidité du problème final sont hermitiennes. Les valeurs propres solutions sont donc réelles. D'autre part, le problème est de taille réduite.

La résolution du problème aux valeurs propres complexes [éq 3.1-3] permet de déterminer les coordonnées généralisées complexes des modes propres de la structure globale. Les valeurs complexes des déplacements du secteur de base dans le mode global sont données, à partir des coordonnées généralisées, par la formule suivante :

$$q' = \begin{bmatrix} \phi & \Psi_d + e^{j\beta}\theta\Psi_d \end{bmatrix} \tilde{q} \quad \text{éq 3.1-4}$$

Pour déterminer les valeurs réelles des déplacements, il faut distinguer trois cas selon les valeurs du déphasage inter-secteur :

Cas n° 1 : $\beta = 0$:

Les déplacements $\mathbf{q}'$ donnés par la formule [éq 3.1-4] sont alors à valeurs réelles. Tous les secteurs ont même déformée et vibrent en phase. On a alors un seul mode propre réel :

$$\mathbf{q} = \text{Re}(\mathbf{q}') = \mathbf{q}' \quad \text{éq 3.1-5}$$

Cas n°2 : $0 < \beta < (N+1)/2$:

Les déplacements fournis par la formule [éq 3.1-4] sont à valeurs complexes. A chacun de ces modes complexes correspondent deux modes réels dégénérés orthogonaux :

$$\mathbf{q}_1 = \text{Re}(\mathbf{q}') \quad \mathbf{q}_2 = \text{Im}(\mathbf{q}') \quad \text{éq 3.1-6}$$

Cas n°3 : $\beta = N/2$ ($\Rightarrow N$ est pair) :

Les déplacements fournis par [éq 3.1-4] sont alors à valeurs complexes. Il y a $N/2$ diamètres nodaux, deux secteurs contigus vibrent alors en opposition de phase. Chaque mode complexe est à l'origine d'un seul mode réel :

$$\mathbf{q} = \text{Re}(\mathbf{q}') = -\text{Im}(\mathbf{q}') \quad \text{éq 3.1-7}$$

Prise en compte des nœuds de l'axe :

On suppose dans ce paragraphe que les degrés de liberté portés par les nœuds de l'axe, au même titre que les nœuds d'interfaces droite et gauche, ont été bloqués pour le calcul des modes dynamiques du secteur de base et ont fait l'objet de calculs de modes contraints.

La base de projection est donc composée des modes propres dynamiques du secteur de base encasté à ses interfaces, notés ϕ , et des modes contraints relatifs aux degrés de liberté d'interfaces droite, gauche et axe, notés Ψ_d , Ψ_g et Ψ_a .

Comme nous l'avons vu au chapitre [§2.4], si β est non nul, le déplacement des nœuds de l'axe est nul (présence d'au moins un diamètre nodal). La prise en compte des nœuds de l'axe n'a donc de sens que si $\beta = 0$. Dans cette démonstration, nous nous limiterons à ce cas.

Le problème aux valeurs propres de la structure globale et les équations de liaison, exprimés sur cette base valent alors :

$$(\bar{K} - \omega^2 \bar{M}) \begin{Bmatrix} \eta_i \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_g \\ \mathbf{q}_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \Psi_d & \Psi_g & \Psi_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{L_d} \\ \mathbf{f}_{L_g} \\ \mathbf{f}_{L_a} \end{Bmatrix} \quad \text{éq 3.1-8}$$

$$\mathbf{q}_g = \theta \mathbf{q}_d \text{ et } \mathbf{q}_a = \theta_a \mathbf{q}_d,$$

$$\mathbf{f}_{L_g} = -\theta \mathbf{f}_{L_d} \text{ et } \mathbf{f}_{L_a} = -\theta_a \mathbf{f}_{L_d}$$

Adoptons les notations suivantes :

- m : indice relatif aux modes propres du secteur,
- d : indice relatif aux modes contraints de l'interface droite,
- g : indice relatif aux modes contraints de l'interface gauche,
- a : indice relatif aux modes contraints de l'interface axe.

On peut donc écrire les matrices sous la forme :

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{mm} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{K}_{dd} & \overline{K}_{dg} & \overline{K}_{da} \\ 0 & \overline{K}_{gd} & \overline{K}_{gg} & \overline{K}_{ga} \\ 0 & \overline{K}_{ad} & \overline{K}_{ag} & \overline{K}_{aa} \end{bmatrix} \quad \overline{M} = \begin{bmatrix} \overline{M}_{mm} & \overline{M}_{md} & \overline{M}_{mg} & \overline{M}_{ma} \\ \overline{M}_{dm} & \overline{M}_{dd} & \overline{M}_{dg} & \overline{M}_{da} \\ \overline{M}_{gm} & \overline{M}_{gd} & \overline{M}_{gg} & \overline{M}_{ga} \\ \overline{M}_{am} & \overline{M}_{ad} & \overline{M}_{ag} & \overline{M}_{aa} \end{bmatrix}$$

Compte tenu de leur définition, les modes contraints vérifient :

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} \Psi_{di} \\ \Psi_{dd} \\ \Psi_{dg} \\ \Psi_{da} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{di} \\ Id \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Psi_g = \begin{bmatrix} \Psi_{gi} \\ \Psi_{gd} \\ \Psi_{gg} \\ \Psi_{ga} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{gi} \\ 0 \\ Id \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Psi_a = \begin{bmatrix} \Psi_{ai} \\ \Psi_{ad} \\ \Psi_{ag} \\ \Psi_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{ai} \\ 0 \\ 0 \\ Id \end{bmatrix}$$

Le second membre de l'équation matricielle [éq 3.1-8] devient :

$$\begin{bmatrix} \phi_i & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_{di} & Id & 0 & 0 \\ \Psi_{gi} & 0 & Id & 0 \\ \Psi_{ai} & 0 & 0 & Id \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_{L_d} \\ f_{L_g} \\ f_{L_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{L_d} \\ f_{L_g} \\ f_{L_a} \end{pmatrix}$$

En tenant compte de ces notations, développons l'équation matricielle vérifiée par le secteur de base :

$$\begin{aligned} \overline{K}_{mm} \eta_i - \omega^2 (\overline{M}_{mm} \eta_i + \overline{M}_{md} q_d + \overline{M}_{mg} q_g + \overline{M}_{ma} q_a) &= 0 \\ \overline{K}_{dd} q_d + \overline{K}_{dg} q_g + \overline{K}_{da} q_a - \omega^2 (\overline{M}_{dm} \eta_i + \overline{M}_{dd} q_d + \overline{M}_{dg} q_g + \overline{M}_{da} q_a) &= f_{L_d} \\ \overline{K}_{gd} q_d + \overline{K}_{gg} q_g + \overline{K}_{ga} q_a - \omega^2 (\overline{M}_{gm} \eta_i + \overline{M}_{gd} q_d + \overline{M}_{gg} q_g + \overline{M}_{ga} q_a) &= f_{L_g} \\ \overline{K}_{ad} q_d + \overline{K}_{ag} q_g + \overline{K}_{aa} q_a - \omega^2 (\overline{M}_{am} \eta_i + \overline{M}_{ad} q_d + \overline{M}_{ag} q_g + \overline{M}_{aa} q_a) &= f_{L_a} \\ q_g &= \theta q_d \quad \text{et} \quad f_{L_d} = -\theta f_{L_g} \\ q_a &= \theta_a q_d \quad \text{et} \quad f_{L_g} = -\theta_a f_{L_a} \end{aligned}$$

Remplaçons, dans les quatre premières équations du système q_g et f_{L_g} par leurs expressions respectives, en fonction de q_d et f_{L_d} et réécrivons, sous une autre forme, les deux dernières équations du système, relatives aux nœuds de l'axe.

$$\begin{aligned} (\overline{K}_{mm} - \omega^2 \overline{M}_{mm}) \eta_i - \omega^2 \{ (\overline{M}_{md} + \overline{M}_{mg} \theta) q_d + \overline{M}_{ma} q_a \} &= 0 \\ (\overline{K}_{dd} + \overline{K}_{dg} \theta) q_d + \overline{K}_{da} q_a - \omega^2 \{ (\overline{M}_{dm} \eta_i + (\overline{M}_{dd} + \overline{M}_{dg} \theta) q_d) + \overline{M}_{da} q_a \} &= f_{L_d} \\ (\overline{K}_{gd} + \overline{K}_{gg} \theta) q_d + \overline{K}_{ga} q_a - \omega^2 \{ (\overline{M}_{gm} \eta_i + (\overline{M}_{gd} + \overline{M}_{gg} \theta) q_d) + \overline{M}_{ga} q_a \} &= -\theta f_{L_d} \\ (\overline{K}_{ad} + \overline{K}_{ag} \theta) q_d + \overline{K}_{aa} q_a - \omega^2 \{ (\overline{M}_{am} \eta_i + (\overline{M}_{ad} + \overline{M}_{ag} \theta) q_d) + \overline{M}_{aa} q_a \} &= f_{L_a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_a &= (1 + \theta_a) \frac{q_a}{2} \\ (1 + \theta_a^T) f_{L_a} &= 0 \end{aligned}$$

On remplace, dans les quatre premières équations du système q_a par son expression déterminée dans l'avant dernière équation. D'autre part, l'association de la deuxième et de la troisième équation permet d'éliminer les termes des forces de liaison à droite. Enfin, la quatrième équation est multipliée par $(1 + \theta_a^T)$, ce qui permet d'éliminer les termes des forces de liaison à l'axe. On aboutit alors à un problème aux valeurs propres final que l'on peut mettre sous la forme :

$$(\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M}) \tilde{q} = 0 \quad \text{éq 3.1-9}$$

Avec :

$$\tilde{q} = \begin{Bmatrix} \eta_i \\ q_d \\ q_a/2 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{K}_{dd} + \overline{K}_{dg} \theta + \theta^T \overline{K}_{gd} + \theta^T \overline{K}_{gg} \theta & (\overline{K}_{da} + \theta^T \overline{K}_{ga})(1 + \theta_a) \\ 0 & (1 + \theta_a^T)(\overline{K}_{ad} + \overline{K}_{ag} \theta) & (1 + \theta_a^T) \overline{K}_{aa} (1 + \theta_a) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \overline{M}_{mm} & \overline{M}_{md} + \overline{M}_{mg} \theta & \overline{M}_{ma} (1 + \theta_a) \\ \overline{M}_{dm} + \theta^T \overline{M}_{gm} & \overline{M}_{dd} + \overline{M}_{dg} \theta + \theta^T \overline{M}_{gd} + \theta^T \overline{M}_{gg} \theta & (\overline{M}_{da} + \theta^T \overline{M}_{ga})(1 + \theta_a) \\ (1 + \theta_a^T) \overline{M}_{am} & (1 + \theta_a^T)(\overline{M}_{ad} + \overline{M}_{ag} \theta) & (1 + \theta_a^T) \overline{M}_{aa} (1 + \theta_a) \end{bmatrix}$$

Les déplacements de l'axe, divisés par deux, permettent de conserver aux matrices de rigidité et de masse leur caractère hermitien. On restitue les déplacements complexes modaux par la formule suivante :

$$q' = \begin{bmatrix} \phi & \Psi_d + e^{j\beta} \theta \Psi_d & 2 \Psi_a \end{bmatrix} \tilde{q}$$

3.2 Méthode de Mac Neal

On considère le problème aux valeurs propres de la structure globale exprimé sur le secteur de base. Ce dernier est donc soumis aux forces de liaison qui lui sont appliquées par les secteurs contigus. Par ailleurs, le secteur de base vérifie les équations de liaison [éq 2.4-2]. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} (K - \omega^2 M) q &= f_L \\ q_g &= e^{j\beta} \theta q_d \\ f_{L_g} &= -e^{j\beta} \theta f_{L_d} \end{aligned} \quad \text{éq 3.2-1}$$

La base modale utilisée pour réduire les dimensions du problème à résoudre, est une base modale à interfaces libres comprenant des modes dynamiques et les modes d'attache relatifs aux degrés de liberté des interfaces droite et gauche. Supposons que les degrés de liberté du secteur de base sont ordonnés de la manière suivante :

$$q = \begin{pmatrix} q_i \\ q_d \\ q_g \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{degrés de liberté internes} \\ \text{degrés de liberté de l'interface droite} \\ \text{degrés de liberté de l'interface gauche} \end{array}$$

Soient B_d et B_g , les matrices rectangulaires d'extraction telles que :

$$q_d = B_d q \quad \text{et} \quad q_g = B_g q$$

La condition aux limites sur les déplacements devient avec ces notations :

$$B_g q = e^{j\beta} \theta B_d q \Rightarrow B_{dg} q = 0 \quad \text{avec} \quad B_{dg} = e^{j\beta} \theta B_d - B_g \quad \text{éq 3.2-2}$$

Pour les forces, la condition aux limites devient :

$$f_L = B_g^T f_{L_g} + B_d^T f_{L_d} \Rightarrow f_L = (B_g^T - e^{-j\theta} B_d^T \theta^T) f_{L_g} = -B_{dg}^T f_{L_g}$$

Considérons comme base, pour la transformation de RITZ, l'ensemble des modes propres dynamiques du secteur de base, en distinguant les modes identifiés et les modes inconnus :

$$q = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \text{éq 3.2-3}$$

où l'indice 1 (resp. 2) fait référence aux modes connus (resp. inconnus). Dans la suite, nous supposons que les modes propres sont normés à la masse modale unitaire.

En remplaçant q par son expression en fonction des modes propres, et en multipliant à gauche par la transposée de la matrice des modes, les équations matricielles [éq 3.2-1] et [éq 3.2-2] deviennent :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \omega^2 Id) \eta_1 &= \phi_1^T f_L \\ (\lambda_2 - \omega^2 Id) \eta_2 &= \phi_2^T f_L \\ B_{dg} \phi_1 \eta_1 + B_{dg} \phi_2 \eta_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{éq 3.2-4}$$

où λ est la matrice des rigidités généralisées (les masses généralisées sont unitaires).

On peut donc en tirer une formulation de η_2 :

$$\eta_2 = (\lambda_2 - \omega^2 Id)^{-1} \phi_2^T f_L \quad \text{éq 3.2-5}$$

Dès lors, on peut éliminer η_2 du système d'équations [éq 3.2-4]. On obtient alors le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \omega^2 Id) \eta_1 + \phi_1^T B_{dg}^T f_{Lg} &= 0 \\ B_{dg} \phi_1 \eta_1 - B_{dg} \phi_2 (\lambda_2 - \omega^2 Id)^{-1} \phi_2^T B_{dg}^T f_{Lg} &= 0 \end{aligned}$$

Le système final à résoudre peut s'écrire :

$$(\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M}) \tilde{q} = 0 \quad \text{éq 3.2-6}$$

Avec :

$$\tilde{q} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ f_{Lg} \end{pmatrix}$$

Les expressions des matrices de rigidité et de masse sont :

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \phi_1 B_{dg}^T \\ B_{dg} \phi_1 & -B_{dg} R_e(\omega) B_{dg}^T \end{bmatrix} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $[R_e(\omega)]$ est la matrice de flexibilité dynamique résiduelle des modes non identifiés :

$$R_e(\omega) = \Phi_2 (\lambda_2 - \omega^2 Id)^{-1} \Phi_2^T$$

On approxime la flexibilité dynamique résiduelle par sa contribution statique, en prenant en compte les modes d'attache. Alors, la formule de restitution qui permet de calculer les valeurs complexes des déplacements à partir des coordonnées généralisées des modes solutions de [éq 3.2-6] est la suivante :

$$q' = \begin{bmatrix} \phi_1 & -R_e(0) B_{dg}^T \end{bmatrix} \tilde{q}$$

Les valeurs réelles des déplacements sont déterminées, comme pour la méthode de Craig-Bampton, par les formules [éq 3.1-5], [éq 3.1-6], [et éq 3.1-7].

Prise en compte des nœuds de l'axe :

Nous supposons, dans ce paragraphe, que les degrés de liberté portés par les nœuds de l'axe, au même titre que les nœuds d'interfaces droite et gauche, ont fait l'objet de calculs de modes d'attache. Nous nous limitons à $\beta = 0$ qui est le seul cas modifié par la prise en compte des nœuds de l'axe ([§2.4] et [§3.1]). Nous avons donc :

$$\begin{aligned} (K - \omega_2 M) q &= f_L \\ q_g &= \theta q_d \text{ et } f_{Lg} = -\theta f_{La} \\ q_a &= \theta_a q_d \Rightarrow (1 - \theta_a) q_a = 0 \\ f_{La} &= -\theta_a f_{Lg} \Rightarrow f_{La} = (1 - \theta_a^T) \frac{f_{Lg}}{2} \end{aligned} \quad \text{éq 3.2-7}$$

L'organisation des degrés de liberté du secteur de base est similaire à celle du chapitre précédent :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_d \\ \mathbf{q}_g \\ \mathbf{q}_a \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{degrés de liberté internes} \\ \text{degrés de liberté de l'interface droite} \\ \text{degrés de liberté de l'interface gauche} \\ \text{degrés de liberté de l'interface axe} \end{array}$$

Soient $\mathbf{B}_a$ la matrice rectangulaire d'extraction des degrés de liberté de l'axe :

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{B}_a \mathbf{q}$$

La condition aux limites sur les déplacements de l'axe devient avec ces notations :

$$(1 - \theta_a) \mathbf{B}_a \mathbf{q} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_{aa} \mathbf{q} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_{aa} = (\theta_a - 1) \mathbf{B}_a$$

Pour les forces, la condition aux limites devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_L &= \mathbf{B}_g^T \mathbf{f}_{L_g} + \mathbf{B}_d^T \mathbf{f}_{L_d} + \mathbf{B}_a^T \mathbf{f}_{L_a} \Rightarrow \mathbf{f}_L = -\mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} + \mathbf{B}_a^T (1 - \theta_a^T) \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} \\ &\Rightarrow \mathbf{f}_L = -\mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} + \mathbf{B}_{aa}^T \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} \end{aligned}$$

La base de la transformation de RITZ est composée de l'ensemble des modes propres libres du secteur de base, en distinguant les modes identifiés (indice 1) et les modes inconnus (indice 2) définie par l'équation [éq 3.2-3].

L'équation [éq 3.2-7], écrite dans cette base prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \omega^2 \mathbf{Id}) \boldsymbol{\eta}_1 &= \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{f}_L \\ (\lambda_2 - \omega^2 \mathbf{Id}) \boldsymbol{\eta}_2 &= \boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{f}_L \\ \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\eta}_2 &= 0 \\ \mathbf{B}_{aa} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{B}_{aa} \boldsymbol{\phi}_2 \boldsymbol{\eta}_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{éq 3.2-8}$$

La seconde équation permet de déterminer $\boldsymbol{\eta}_2$ (cf. [éq 3.2-5]), qui peut ainsi être éliminé du système. On obtient alors le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \omega^2 \mathbf{Id}) \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} + \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{B}_{aa}^T \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} &= 0 \\ \mathbf{B}_{dg} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{B}_{dg} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} - \mathbf{B}_{dg} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{aa}^T \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} &= 0 \\ \mathbf{B}_{aa} \boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{B}_{aa} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{dg}^T \mathbf{f}_{L_g} - \mathbf{B}_{aa} \mathbf{R}_e(\omega) \mathbf{B}_{aa}^T \frac{\mathbf{f}_{L_a}}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, en définissant le vecteur inconnu suivant :

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \mathbf{f}_{L_g} \\ \mathbf{f}_{L_a}/2 \end{pmatrix}$$

On obtient le système final suivant :

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}) \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{éq 3.2-9}$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \phi_1 B_{dg}^T & \phi_1^T B_{aa}^T \\ B_{dg} \phi_1 & -B_{dg} R_e(\omega) B_{dg}^T & -B_{dg} R_e(\omega) B_{aa}^T \\ B_{aa} \phi_1 & -B_{aa} R_e(\omega) B_{dg}^T & -B_{aa} R_e(\omega) B_{aa}^T \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La division par deux des forces de liaison appliquées à l'axe permet de conserver aux matrices de rigidité et de masse leur caractère hermitien.

On restitue les déplacements complexes modaux par la formule suivante :

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} \phi_1 & -R_e(0) B_{dg}^T & -2 R_e(0) B_{aa}^T \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}$$

4 Mise en œuvre dans Code_Aster

Le traitement du secteur de base est identique à celui des sous-structures dans la sous-structuration classique. Il fait intervenir les opérateurs : `MODE_ITER_SIMULT` [U4.52.03] ou `MODE_ITER_INV` [U4.52.04], `DEFI_INTERF_DYNA` [U4.64.01] et `DEFI_BASE_MODEALE` [U4.64.02].

Les modes propres de la structure à symétrie cyclique sont calculés par l'opérateur `MODE_ITER_CYCL` [U4.52.05] en fonction de la base de projection du secteur de base précédemment définie et du nombre de secteurs de la structure complète.

La restitution des résultats sur base physique est identique à la sous-structuration classique. Elle fait intervenir l'opérateur `REST_SOUS_STRUC` [U4.63.32] et éventuellement l'opérateur `DEFI_SQUELETTE` [U4.24.01].

5 Conclusion

Les principes de la sous structuration permettent d'exposer la transformation de RITZ et la recombinaison modale pour aboutir à la synthèse modale qui intègre ces deux techniques. Les règles de liaisonnement entre sous-structures sont explicitées.

Deux méthodes ont été développées dans *Code_Aster* : celle de Craig-Bampton et celle de Mac Neal. Nous présentons, ici, leurs particularités, aussi bien dans la définition de la base modale initiale, que dans son exploitation.

Après avoir exposé la définition d'une structure à symétrie cyclique et les propriétés qui en découlent, nous avons présenté les méthodes de sous-structuration cyclique mises en œuvre dans *Code_Aster*. Elles se révèlent très intéressantes pour le calcul des modes propres d'une structure à symétrie cyclique, telles que les rotors des machines tournantes dont elles profitent pleinement des caractéristiques géométriques et mécaniques.

6 Bibliographie

- 1.R. ROY, J. CRAIG & M. C. BAMPTON : "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis" AIAA Journal, (July 1968), Vol. 6, N° 7, p. 1313-1319.
- 2.R. H. MAC NEAL : "A hybrid method of component mode synthesis" Computers and Structures, (1971), Vol. 1, p. 581-601.
- 3.J. F. IMBERT : "Analyse des Structures par Eléments Finis" 1979, Cepadues Edition.
- 4.P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration dynamique en éléments finis". Rapport EDF HP-61/90.149.
- 5.P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration cyclique en éléments finis". Rapport EDF HP-61/91.156
- 6.P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration dans le *Code_Aster*". Rapport EDF HP-61/92.149
- 7.J. PELLET : "Code de Mécanique Aster - Manuel de référence : Les éléments finis dans Aster" Clé : [R3.03.01] "Dualisation des conditions aux limites"
- 8.G. JACQUART : "Code de Mécanique Aster - Manuel de référence : Dynamique en base modale". Clé : R5.06.01 "Méthodes de RITZ en dynamique linéaire et non-linéaire"
- 9.T. KERBER : "Cahier des charges : mise en oeuvre de la sous-structuration harmonique" - Rapport D.E.R. HP-61/93.053
- 10.T. KERBER : "Sous-structuration harmonique dans le *Code_Aster*" - Rapport D.E.R. HP-61/93.104
- 11.C. VARE : "Cahier des charges de l'implémentation du calcul transitoire linéaire par sous-structuration dynamique dans le *Code_Aster*" - Rapport D.E.R. HP-61/94.135/B
- 12.C. VARE : "Documentations Utilisateur et Validation des opérateurs de calcul transitoire par sous-structuration" - Rapport D.E.R. HP-61/94.208/A

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
04/08/09	O. NICOLAS, G. ROUSSEAU, C. VARE (EDF- R&D/AMA, DPN/UTO)	