

Génération de signaux sismiques

Résumé :

Dans les études sismiques « best-estimate », on est souvent amené à effectuer des analyses dynamiques transitoires. Le signal sismique est alors modélisé par un processus stochastique. Ce processus exprime l'accélération au sol en fonction du temps.

On appelle trajectoires les signaux temporels (accélérogrammes) qui sont des réalisations du processus stochastique. Ces signaux peuvent provenir des bases de données (accélérations au sol mesurées lors de séisme) ou être obtenus par simulation numérique (cf. aussi [bib17]). La simulation de signaux sismiques artificiels, telle que réalisée par l'opérateur `GENE_ACCE_SEISME`, est décrite dans ce document.

Table des matières

1	Modélisation de l'excitation sismique par un processus stochastique.....	2
1.1	Modélisation du séisme par un processus non stationnaire à DSP évolutive.....	2
1.2	Paramétrage des fonctions de modulation.....	4
1.2.1	Fonction de modulation Gamma.....	5
1.2.2	Fonction de modulation de Jennings & Housner.....	6
1.3	Signaux compatibles avec un SRO.....	6
2	Simulation de trajectoires du processus.....	8
2.1	Discrétisation.....	8
2.2	Représentation intégrale des processus stationnaires.....	9
2.3	Représentation intégrale des processus non stationnaires à DSP évolutive.....	9
3	Incertitudes et variabilité naturelle des signaux.....	10
4	Références.....	10
5	Annexe.....	11

1 Modélisation de l'excitation sismique par un processus stochastique

Les processus stochastiques gaussiens sont entièrement caractérisés par leur densité spectrale de puissance (DSP). Si le processus est stationnaire, alors on peut simuler des trajectoires très aisément à l'aide du théorème de représentation spectrale comme décrit dans le §2. Ce théorème s'applique également aux processus gaussiens non stationnaires sous la condition que le processus puisse s'exprimer sous forme d'une DSP évolutive à oscillation faible (c'est-à-dire que les propriétés changent lentement avec le temps).

Dans une analyse sismique simplifiée, on modélise uniquement la phase forte du signal sismique. Ce dernier est alors supposé stationnaire durant cette période. C'est notamment le cas dans le cadre des analyses sismiques linéaires par combinaison modale (CQC, SRSS).

Néanmoins, des études et analyses statistiques ont montré que le signal sismique est non stationnaire en amplitude et en contenu fréquentiel. Quant au contenu fréquentiel, son évolution peut être estimée à partir de signaux naturels. Dans la plupart du temps on observe une décroissance de la fréquence centrale avec le temps [bib9]. Cette baisse de la fréquence centrale de l'excitation sismique peut aller de pair avec la baisse des fréquences propres de la structure soumise au séisme. Cette coïncidence peut avoir des effets aggravants qu'il convient de prendre en compte dans les modélisations de structures non linéaires.

1.1 Modélisation du séisme par un processus non stationnaire à DSP évolutive

On modélise le mouvement sismique par des réalisations d'un processus gaussien centré décrit par sa densité spectrale de puissance évolutive [bib8] :

$$S_X(\omega, t) = q(t) S_Y(\omega, t) q(t) \in \mathbb{R} \quad (1)$$

où $S_Y(\omega, t)$ est la partie non séparable de la densité spectrale qui modélise l'évolution du contenu fréquentiel du signal sismique au cours du temps. La fonction $q(t)$ est une fonction de modulation déterministe qui détermine l'amplitude du signal (par exemple la fonction de modulation de Jennings & Housner [bib4] ou la fonction Gamma). Dans le cas où on a $S_Y(\omega, t) \equiv S_Y(\omega)$, c'est-à-dire que la DSP ne dépend pas du temps, Y est un processus stationnaire et $X(t) = q(t)Y(t)$, $t \in T$ un processus quasi stationnaire dont uniquement l'amplitude varie avec le temps. On parle alors de DSP séparable : $S_X(\omega, t) = q^2(t) S_Y(\omega)$.

Le modèle implanté dans *Code_Aster* s'appuie sur la DSP de Kanai-Tajimi [bib13] qui exprime un bruit blanc filtré et modélise l'accélération sismique en champ libre. Les deux paramètres du modèle original de Kanai-Tajimi sont donc la pulsation propre du filtre ainsi que l'amortissement de ce dernier. Ce modèle a connu des évolutions depuis, notamment en ce qui concerne le filtrage du contenu basses fréquences [bib2] et l'introduction de l'évolution du contenu fréquentiel des signaux sismiques (*Ahmadi & Fan* [bib1]). Le filtrage des basses fréquences permet d'obtenir des signaux en accélération qui peuvent être intégrés sans dérives en déplacement et en vitesse (il faut avoir recours à la « baseline correction » si des constantes d'intégration doivent être éliminées). Enfin, une fonction de modulation est appliquée afin d'obtenir la variation de l'amplitude. La modélisation retenue est résumée dans ce qui suit :

- Le processus Y est caractérisé par la DSP de Kanai-Tajimi (KT) : cette DSP modélise la réponse en accélération absolue d'une masse soumise à une excitation par bruit blanc (le mouvement sismique au rocher). Autrement dit, la DSP de Kanai-Tajimi décrit un bruit blanc filtré par un oscillateur de pulsation propre ω_0 et amortissement réduit ξ_0 .
- La pulsation fondamentale ω_0 de la DSP de KT évolutive est une fonction du temps :

$$S_{KT}(\omega, t) = \frac{(\omega_0^4 + 4\xi_0^2 \omega_0(t)^2 \omega^2)}{((\omega_0(t)^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_0^2 \omega_0(t)^2 \omega^2)} S_0$$

On suppose une évolution linéaire de la pulsation propre par rapport au temps durant la phase forte du séisme :

$$\omega_0(t) = \begin{cases} \omega_1 & \text{si } t < t_1 \\ \omega_1 - \omega'(t - t_1) & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ \omega_2 & \text{si } t > t_2 \end{cases}$$

où t_1 et t_2 désignent respectivement le début et la fin de la phase forte (cf. §1.2 pour une définition de ces quantités). Pour $t < t_1$ la pulsation propre est supposée constante est égale à ω_1 .

Pour $t > t_2$, la pulsation propre est supposée constante est égale à $\omega_2 = \omega_1 - \omega'(t_2 - t_1)$. L'utilisateur doit veiller à ce que la pulsation propre donnée par cette relation reste positive au cours du temps.

- Filtrage de la DSP de KT par un filtre de pulsation propre $\omega_f = 0.5 \pi \text{ rad/s}$ et un amortissement réduit $\xi_f = 1.0$ selon Clough & Penzien (CP). Ce filtrage permet d'ôter le contenu en très basses fréquences qui conduit à des dérivées non nulles (déplacements et vitesses non nulles à la fin du séisme). Les sismologues parlent à ce sujet de « Corner Frequency », à savoir la fréquence minimale en dessous de laquelle le spectre doit tendre vers 0. Ceci nous conduit à la DSP corrigée $S_{CP}(\omega)$:

$$S_{CP}(\omega, t) = |h(\omega)|^2 S_{KT}(\omega, t), \text{ où le filtre s'écrit } h(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega_f^2 - \omega^2 + 2\xi_f \omega_f \omega)}$$

- On propose deux fonctions de modulation temporelle de l'amplitude $q(t)$: la fonction gamma et la fonction de Jennings & Housner [bib4]. La fonction gamma s'écrit :

$$q(t) = \alpha_1 t^{(\alpha_2 - 1)} \exp(-\alpha_3 t)$$

Les paramètres α_2 et α_3 décrivent respectivement la forme et la durée de la phase forte du signal. Le paramètre α_1 détermine l'énergie du signal et peut être déterminé à partir de la donnée de l'intensité d'Arias. La fonction de Jennings & Housner [bib4] s'écrit :

$$q(t) = \begin{cases} t/t_1 & \text{si } 0 \leq t < t_1 \\ 1 & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \exp(-\alpha(t - t_2)^\beta) & \text{si } t_2 < t \leq T \end{cases}$$

Les paramètres α et β déterminent l'allure de la pente après t_2 .

La figure 1 montre la DSP de Kanai-Tajimi filtré (DSP de Clough & Penzien) pour une fréquence propre donnée. Pour des fonctions de DSP régulières, la fréquence propre du filtre est proche de la fréquence fondamentale de la DSP. Dans la figure 1, on visualise également la largeur de bande de la DSP, noté δ . La largeur de bande de la DSP est liée à l'amortissement du filtre comme explicité dans le §1.4.

Remarque :

Un modèle très similaire à celui décrit ci-dessus est proposé dans la référence (Rezaeian & Der Kiureghian, [bib9, bib10]). La différence entre les deux approches réside principalement dans l'écriture du problème dans le domaine temps par Rezaeian & Der Kiureghian et non dans le

domaine des fréquences à travers la densité spectrale comme proposé ici. Or, l'écriture dans le domaine temps possède un certain nombre de désavantages, comme la nécessité d'évaluer l'intégrale de convolution et de travailler avec le processus de Wiener (bruit blanc) qui n'est pas un processus du second ordre. La formulation du problème par un bruit blanc filtré décrit par sa DSP évolutive comme proposé ici est, en revanche, très aisée et numériquement bien plus efficace.

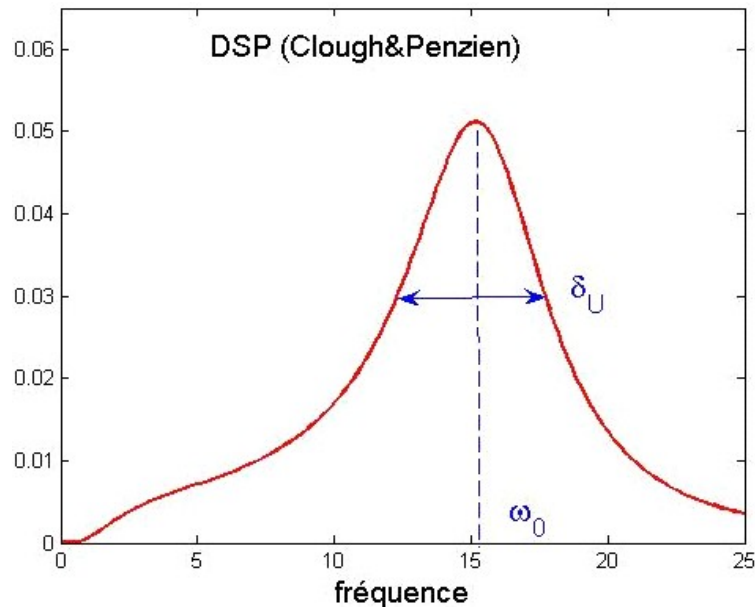


Figure 1. DSP de Kanai-Tajimi après filtrage des basses fréquences selon Clough & Penzien [bib2].

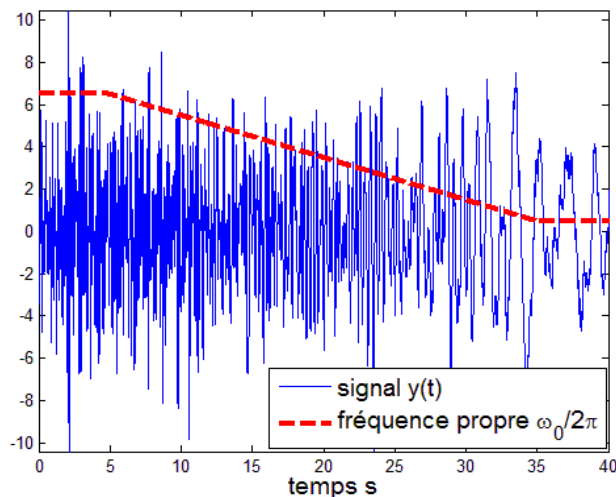


Figure 1b. Illustration d'une évolution du contenu fréquentiel d'un signal sans modulation (DSP de Clough & Penzien évolutive avec $\xi_0=0.2$).

1.2 Paramétrage des fonctions de modulation

Les paramètres qui caractérisent la fonction de modulation sont la durée de phase forte T_{SM} , l'instant du début de la phase forte t_{ini} et l'intensité d'Arias I_a .

L'intensité d'Arias moyenne $\bar{I}_a$ d'un processus $Y(t) \in \mathbb{R}$ modulé par une fonction $q(t)$, décrit par l'équation (1), s'exprime comme :

$$\bar{I}_a = E \left(\frac{\pi}{2g} \int_0^\infty X^2(t) dt \right) = \frac{\pi}{2g} \int_0^\infty q^2(t) E(Y^2(t)) dt$$

sachant que $X(t) = q(t)Y(t)$. L'opérateur E dans l'expression ci-dessus désigne l'espérance mathématique et $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Si on normalise le processus $Y(t)$ de sorte à ce que $\sigma_Y(t) = 1$, on peut écrire :

$$\bar{I}_a = \frac{\pi}{2g} \int_0^\infty q^2(t) dt \quad (2)$$

En pratique l'intégration se fait jusqu'à l'instant de fin T_f des signaux sismiques. La durée de la phase forte moyenne $\bar{T}_{SM}$ est définie à partir de l'intensité d'Arias qui exprime l'énergie contenu dans le signal sismique. Ainsi, $\bar{T}_{SM}$ est définie comme la durée de temps entre les instant de temps $t_{0.05}$ et $t_{0.95}$ où respectivement 5% et 95% de l'intensité d'Arias sont réalisés. L'instant $t_{0.05}$ désigne en conséquence le début de la phase forte moyenne, $\bar{t}_{ini}$, tel que :

$$\bar{t}_{ini} : \frac{\pi}{2g \bar{I}_a} \int_0^{\bar{t}_{ini}} q^2(t) dt = 0.05$$

et $\bar{t}_{ini} + \bar{T}_{SM}$ la fin de la phase forte :

$$\bar{t}_{ini} + \bar{T}_{SM} : \frac{\pi}{2g \bar{I}_a} \int_0^{\bar{t}_{ini} + \bar{T}_{SM}} q^2(t) dt = 0.95$$

Étant donné la durée de la phase forte, l'intensité d'Arias moyenne $\bar{I}_a$ permet de déterminer l'écart-type du processus X .

Pour le paramétrage des fonctions de modulation, on suppose données les moyennes de ces trois paramètres: durée de phase forte moyenne $\bar{T}_{SM}$, instant du début de la phase forte moyenne $\bar{t}_{ini}$ et l'intensité d'Arias moyenne $\bar{I}_a$.

Par ailleurs, on considère des processus $X(t)$ normalisés de sorte que l'écart-type soit unitaire à chaque instant de temps.

L'amplitude des signaux à générer est déterminée par la donnée de l'intensité d'Arias (énergie), l'écart-type σ_X sur la durée de la phase forte ou encore le maximum médian a_m sur la durée de la phase forte.

En pratique, le maximum médian a_m est associé à la donnée du PGA (Peak Ground Acceleration). Ainsi, si le PGA est donné, alors on considère que celui-ci correspond à la médiane des maxima $a_m = \text{Médiane}(\max_{t \in T} (|X(t)|))$ des trajectoires du processus (durant la phase forte $\bar{T}_{SM}$). Ceci nous permet de déterminer l'écart-type σ_X correspondant à ce maximum à l'aide du facteur de pic $\eta_{T_{SM}}$:

$$a_m \approx \eta_{T_{SM}} \sigma_X$$

Le facteur de pic est donné par la formule

$$\eta_{T_{SM}, P}^2 = 2 \ln(2N_\eta [1 - \exp(-\delta^{1.2} \sqrt{\pi \ln(2N_\eta)})])$$

où $N_\eta = 1,4427 T_{SM} \nu_0^+$. Les variables ν_0^+ (fréquence centrale) et δ (largeur de bande) se calculent à partir des moments de la DSP selon les équations (7) et (8) du §1.3.

Remarque :

Les paramètres des fonctions de modulation sont déterminés à partir de la phase forte moyenne et l'intensité d'Arias moyenne, comme décrit ci-dessus. Les phases fortes, maxima (PGA) et intensités d'Arias des signaux sismiques générés avec cette modélisation exhiberont en conséquence une certaine variabilité autour des moyennes.

1.2.1 Fonction de modulation Gamma

On identifie, par moindres carrés, les paramètres α_2 et α_3 tels que l'instant $\bar{t}_1$ corresponde au début de la phase forte et $\bar{t}_{ini} + T_{SM}$ à la fin de la phase forte. Le paramètre α_1 est une constante de normalisation qui est choisie telle que l'équation (2) soit vérifiée si l'intensité d'Arias est donnée comme paramètre d'entrée.

Dans le cas où un écart-type ou le maximum médian sont donnés, on normalise la fonction Gamma de sorte à ce que l'énergie durant la phase forte corresponde à l'énergie d'une modulation unitaire constante :

$$\int_{t_1}^{t_2} q(t)^2 dt = \bar{T}_{SM}.$$

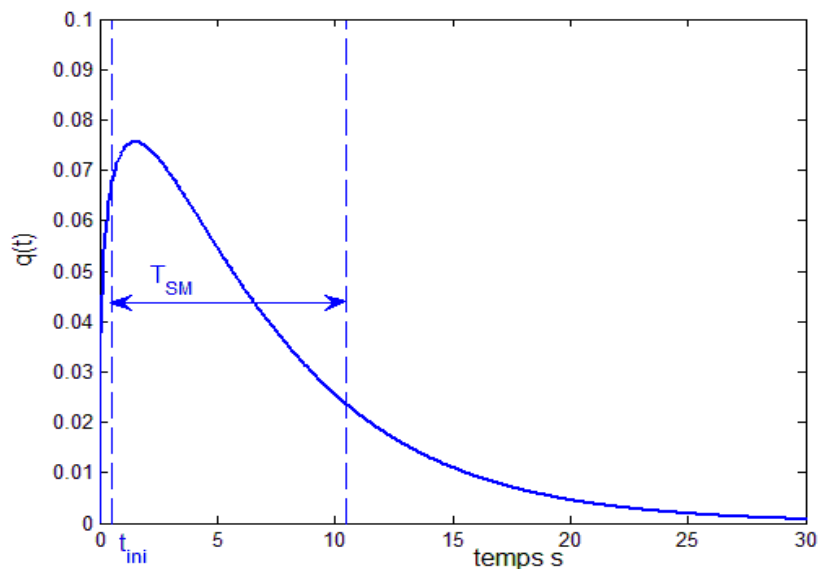


Figure 2. Fonction de modulation Gamma pour $t_{ini}=0.5s$ et $T_{SM}=10s$, $I_a=0.5$.

1.2.2 Fonction de modulation de Jennings & Housner

L'instant t_1 est pris égal à $\bar{t}_{ini}$ alors que la durée de la phase forte donne l'instant t_2 qui correspond à la fin du plateau. On associe ici la longueur du plateau à la durée de la phase forte $\bar{T}_{SM}$. Il faut néanmoins souligner que la longueur du plateau de la fonction de Jennings & Housner ne correspond en général pas (exactement) à la notion de durée de phase forte définie ci-dessus à partir de l'intensité d'Arias.

Les paramètres α et β du modèle de Jennings & Housner sont des paramètres supplémentaires qui déterminent l'allure de la fonction de modulation au delà de la phase forte. Ils sont à renseigner par l'utilisateur. La fonction est ensuite multipliée par une constante afin de respecter l'intensité d'Arias moyenne $\bar{I}_a$, un écart-type ou le maximum médian.

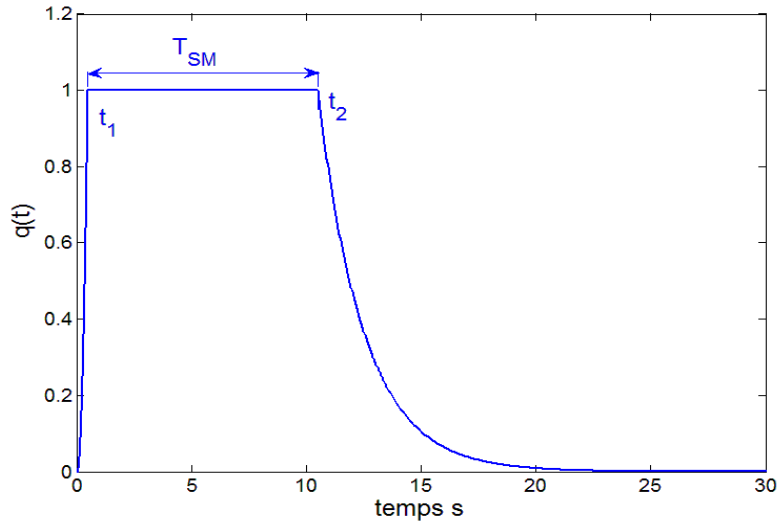


Figure 3. Exemple de fonction de modulation temporelle de Jennings & Housner pour $t_{ini}=0.5s$ et $T_{SM}=10s$.

1.3 Signaux compatibles avec un SRO

Dans le cas où le séisme est modélisé par un processus stationnaire gaussien durant la phase forte T_{SM} , il est possible d'établir une relation (approchée) entre la densité spectrale $S_Y(\omega)$ du processus et son spectre de réponse d'oscillateur (SRO), $S_a(\omega, \xi)$. Ce dernier est en effet souvent donné par les sismologues ou prescrit par des codes et réglementations.

Le problème du premier passage permet de lier le SRO (pour une pulsation ω_n et un amortissement réduit ξ_0 donnés) à l'écart-type du processus via le facteur de pic η :

$$S_a(\omega_n, \xi_0) \approx \omega_n^2 \eta_{T_{SM}, p} \sigma_n \quad (3)$$

où σ_n est l'écart-type du processus réponse

$$\sigma_n^2 = \int |h_{\omega_n, \xi_0}(\omega)|^2 S_Y(\omega) d\omega$$

et :

$$h_{\omega_n, \xi_0}(\omega) = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2\xi_0\omega_n\omega}$$

est la fonction de transfert (filtre) de pulsation propre ω_n et d'amortissement réduit ξ_0 .

Le facteur de pic permet d'estimer les p -fractiles de la distribution des maxima d'un processus gaussien à partir de l'écart-type. Le facteur de pic, dû à Vanmarcke [bib16], s'écrit :

$$\eta_{T_{SM}, p}^2 = 2 \ln(2N_\eta [1 - \exp(-\delta^{1.2} \sqrt{\pi \ln(2N_\eta)})]) \quad (4)$$

Dans cette expression, δ est la largeur de bande du processus (cf. Figure 1) et

$$N_\eta = \frac{T_{SM}}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} (-\ln p)^{-1}$$

Les λ_i sont les moments spectraux de la DSP du processus réponse :

$$\lambda_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i |h_{\omega_n, \xi_0}(\omega)|^2 S_Y(\omega) d\omega, \quad (5)$$

avec en particulier $\sqrt{\lambda_0}$ l'écart-type du processus. Afin de déterminer la DSP compatible avec le SRO, il faut inverser l'expression (3). On peut montrer que l'on a, en première approximation pour une excitation par bruit blanc ($S_Y(\omega) = \text{const}$) et pour un filtre avec fréquence propre ω_n :

$$\lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h_{\omega_n, \xi_0}(\omega)|^2 S_Y(\omega) d\omega \approx S_Y(\omega_n) \int_{-\infty}^{+\infty} |h_{\omega_n, \xi_0}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi S_Y(\omega_n)}{2 \xi \omega_n^3}$$

Cette formule a été améliorée par la suite par Vanmarcke [bib15, bib16] pour tenir compte de la contribution de $S_Y(\omega)$ dans la gamme de pulsations $[-\omega_n, \omega_n]$ où $h_{\omega_n}(\omega) \approx 1/\omega_n^2$:

$$\lambda_0 \approx \frac{\pi S_Y(\omega_n)}{2 \xi \omega_n^3} + \frac{2}{\omega_n^4} \int_0^{\omega_n} S_Y(\omega_n) d\omega - \frac{2}{\omega_n^3} S_Y(\omega_n)$$

Ceci nous conduit à la formule de Vanmarcke pour évaluer une DSP $G^S(\omega)$ à partir d'un SRO $S_a(\omega, \xi)$ (pour un amortissement ξ_0 donné) :

$$G^S(\omega_n) = \frac{1}{\omega_n \left(\frac{\pi}{2 \xi_0} - 2 \right)} \left[\frac{S_a^2(\omega_n, \xi_0)}{\eta_{T_{SM}, P}^2} - 2 \int_0^{\omega_n} G^S(\omega) d\omega \right], \quad \omega_n > 0 \quad (6)$$

sous condition que ces deux fonctions soient suffisamment lisses. La formule originale de Vanmarcke a ensuite été utilisée sous des formes plus ou moins proches par de nombreux auteurs [bib7, bib3]. Elle est implantée dans sa version originale (équation (6)) dans `INFO_FONCTION`. Cette DSP permet de générer des trajectoires du processus stationnaire ou quasi stationnaire (variation de l'amplitude par multiplication par une fonction de modulation) en faisant appel à l'opérateur `GENE_FONC_ALEA` (cf. §1.2).

Alternativement, on peut estimer les paramètres de la DSP de Kanai-Tajimi, à savoir la fréquence propre ω_0 et l'amortissement réduit ξ_0 , à partir des moments de la DSP compatible avec le spectre :

$$\lambda_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^i G^S(\omega) d\omega$$

L'écart-type du processus est donnée par le moment d'ordre 0 :: $\sigma^2 = \lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} G^S(\omega) d\omega$. Ensuite, il faut identifier les paramètres ω_0 et ξ_0 de manière à ce que les moments d'ordre 1 et 2 de la DSP de Kanai-Tajimi et de la DSP $G^S(\omega)$, compatible avec le SRO, soient proches ou coïncident. Ceci permet de construire un modèle de séisme non stationnaire (non stationnaire en amplitude et en contenu fréquentiel) en introduisant l'évolution de la fréquence centrale.

En pratique, il convient d'identifier ω_0 et ξ_0 tels que la fréquence centrale ν_0^+ et la largeur de bande δ des DSP coïncident. La fréquence centrale, à savoir la fréquence où l'énergie du processus est concentrée, peut être calculée par la classique formule de Rice :

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}, \quad (7)$$

Cette valeur correspond au taux de passages par zéro à pente positive. Il peut également être déterminé à partir d'un accélérogramme par comptage de passages positives par zéro. La largeur de bande δ de la DSP s'exprime comme suit [bib15] :

$$\delta = \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}\right)}, \quad (8)$$

Ces deux paramètres sont illustrés sur la figure 1. Ils peuvent être calculés à l'aide de `POST_DYNA_ALEA` et permettent d'estimer les paramètres de la DSP de Kanai-Tajimi, à savoir la pulsation propre ω_0 et l'amortissement réduit ξ_0 .

Pour la réponse en déplacement d'un oscillateur à un bruit blanc, on connaît des expressions analytiques des paramètres ω_0 et ξ_0 en fonction des moments et donc de la largeur de bande et fréquence centrale. Ces expressions s'appliquent également à la DSP de Kanai-Tajimi, si l'amortissement est faible. La DSP de Kanai-Tajimi correspond en effet à la réponse en accélération (absolue) d'un oscillateur soumis à un bruit blanc et non la réponse en déplacement.

Ainsi, si l'amortissement est faible, la fréquence propre de la DSP de Kanai-Tajimi peut être prise égale à la fréquence centrale. Mais l'approximation n'est en générale pas très bonne. Des études ont montré qu'une meilleure approximation peut être obtenue en prenant la fréquence correspondant au centre de gravité de la partie positive de la DSP.

La largeur de bande s'exprime en fonction de l'amortissement réduit ξ , toujours pour la réponse d'un oscillateur à un bruit blanc, par la formule [bib15] :

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{1}{1 - \xi^2} \left(1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}{1 - 2\xi^2}\right)\right)^2}$$

Pour des valeurs d'amortissement faibles $\xi < 0.1$, on peut estimer l'amortissement réduit par la relation asymptotique pour $\xi \rightarrow 0$, suivante [bib15] :

$$\delta \approx \sqrt{\frac{4\xi}{\pi}} \quad (9)$$

Une bonne approximation de l'amortissement réduit peut être obtenue en prenant $\xi \approx \frac{\pi \delta^{2/1.2}}{4}$ (cf. aussi (4)).

La pulsation propre ω_0 et l'amortissement réduit ξ_0 identifiés sont ensuite utilisés pour construire le modèle de séisme avec `GENE_ACCE_SEISME`.

2 Simulation de trajectoires du processus

La méthode classique pour la simulation d'un processus stochastique gaussien stationnaire, centré s'appuie sur la représentation intégrale des processus, cf. par exemple [bib11]. La représentation spectrale ainsi que l'algorithme de simulation numérique sont rappelés dans ce qui suit.

On traite le cas général d'un processus gaussien vectoriel $Y(t) \in \mathbb{R}^M, t \in [0, T]$ caractérisé par sa DSP matricielle $S_Y(\omega) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(M, M)$. Cette méthode peut être étendue au cas des processus non stationnaires à DSP évolutive $S'_Y(\omega, t) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(M, M)$ si le processus est à variation lente.

2.1 Discrétisation

La simulation numérique nécessite la discrétisation du domaine temporel. On utilise une discrétisation temporelle à pas Δt constant. La fréquence de coupure se déduit directement de cette valeur : $\Omega_c = \pi / (\Delta t)$. Pour une discrétisation par N pas de temps, on note $t_j = j \Delta t, j=0, \dots, N-1$ les points d'échantillonnage temporel. Par ailleurs, on définit le pas de fréquence par $\Delta \omega = 2 \Omega_c / N$ et la durée du signal temporel est $T = \Delta t (N-1)$.

Les densités spectrales sont définies sur l'intervalle $F = [-\Omega_c, +\Omega_c]$ et les points de discrétisation fréquentielle sont choisis comme les milieux des pavés : $\omega_j = -\Omega_c + (0.5 + j) \Delta \omega, j=0, \dots, N-1$.

2.2 Représentation spectrale des processus stationnaires

Le théorème de la représentation spectrale (cf. [bib11]) dit qu'il existe un processus stochastique $dZ(\omega) \in \mathbb{C}^M$ à incréments orthogonaux tels que :

$$Y(t) = \int_{\mathbb{R}^M} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (10)$$

Ce processus, appelé processus spectral associé à Y , vérifie :

$$E(dZ(\omega) dZ(\omega')^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq \omega' \\ S_Y(\omega) d\omega & \text{si } \omega = \omega' \end{cases} \quad (11)$$

où E est l'opérateur de l'espérance mathématique et dZ est un processus à incréments orthogonaux.

La matrice de densité spectrale $S_Y(\omega)$ étant, par construction, une matrice hermitienne positive pour tout $\omega \in F$, il existe une matrice $L(\omega) \in \mathbb{C}^M$ telle que :

$$S_Y(\omega) = L(\omega) L(\omega)^*$$

La matrice $L(\omega)$ peut être obtenue par décomposition de Cholesky si le rang de $S_Y(\omega)$ est maximal. $L(\omega)$ est alors une matrice triangulaire inférieure. On peut alors simuler des trajectoires du processus par la formule

$$Y(t) = \sqrt{\Delta \omega} \Re e \sum_{j=0}^{N-1} L(\omega_j) \chi_j e^{i\omega_j t} \quad (12)$$

où les χ_j sont des vecteurs aléatoires gaussiens complexes dont les composantes sont indépendantes.

L'utilisation de la IFFT permet de réduire considérablement le coût numérique de la simulation. En effet, on peut écrire l'expression (12) sous la forme

$$Y(t_k) = \sqrt{\Delta \omega} \Re e (V_k e^{-i\pi k(1-1/N)}) \quad (13)$$

où V_k est calculable par IFFT :

$$V_k = \sum_{j=0}^{N-1} L(\omega_j) \chi_j e^{2i\pi k j N^{-1}}$$

Cet algorithme peut être utilisé pour les processus gaussiens stationnaires et non stationnaires à DSP séparable. Dans ces cas, on a $S_Y(\omega, t) \equiv S_Y(\omega)$ dans l'équation (1) et on peut générer des trajectoires du processus $Y \in \mathbb{R}$ sur l'intervalle $[0, T]$. On obtient les signaux sismiques modulés en appliquant la fonction de modulation de sorte à ce que $X(t) = q(t) Y(t)$. Ceci est réalisé par l'opérateur `GENE_ACCE_SEISME`.

2.3 Représentation spectrale des processus non stationnaires à DSP évolutive

La représentation spectrale s'applique toujours à des processus non stationnaires décrits par leur DSP évolutive non séparable :

$$Y(t) = \int_{\mathbb{R}^M} e^{i\omega t} dZ(\omega, t) \quad (14)$$

sous condition que la DSP évolue lentement avec le temps [bib8,bib6]. Il existe alors un processus stochastique $dZ(\omega, t) \in \mathbb{C}^M$ à incréments orthogonaux tels que

$$E(dZ(\omega, t) dZ(\omega', t)^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq \omega' \\ S_Y(\omega, t) d\omega & \text{si } \omega = \omega' \end{cases}$$

où E est l'opérateur de l'espérance mathématique et dZ est un processus à incréments orthogonaux. On peut alors simuler des trajectoires du processus par la formule

$$Y(t) = \sqrt{\Delta\omega} \Re e \sum_{j=0}^{N-1} L(\omega_j, t) X_j e^{i\omega_j t} \quad (15)$$

où les X_j sont des vecteurs aléatoires gaussiens complexes dont les composantes sont indépendantes. La matrice $L(\omega, t)$ peut toujours être obtenue par décomposition de Cholesky si le rang de $S_Y(\omega, t)$ est maximal. En revanche, il n'est pas possible de faire appel à la transformée de Fourier rapide comme dans le cas stationnaire (cf. équation(13)).

On peut ensuite obtenir les signaux sismiques modulés en appliquant la fonction de modulation de sorte à ce que $X(t) = q(t) Y(t)$. Ceci est réalisé dans *Code_Aster* par l'opérateur GENE_ACCE_SEISME.

3 Incertitudes et variabilité naturelle des signaux

Les paramètres du modèle sont :

- La durée moyenne de la phase forte $\bar{T}_{SM}$ et l'instant de début de la phase forte moyenne $\bar{t}_{ini}$ (fonction de modulation),
- La pulsation propre ω_1 et la pente ω' de la DSP de Kanai-Tajimi (ou ω_0 si on considère une valeur constante),
- L'amortissement réduit ξ_0 de la DSP de Kanai-Tajimi,
- L'intensité d'Arias moyenne $\bar{I}_a$ (énergie moyenne contenu dans le signal sismique), le PGA (maximum médian a_m) ou l'écart-type σ_X .

Afin de mieux représenter la variabilité naturelle des signaux sismiques et pour tenir compte de l'incertitude sur les paramètres du modèle, on peut modéliser ces derniers par des variables aléatoires. Chaque signal sismique simulé correspond alors à un tirage particulier des paramètres du modèle. La méthode de tirage de l'Hypercube Latin constitue une méthode efficace qui permet de bien balayer le domaine de définition des paramètres pour un nombre réduit de tirages.

Les valeurs moyennes ainsi que les distributions de ces paramètres peuvent être estimées à partir de signaux sismiques naturels correspondants au scénario recherché. Ils sont, pour certains, également disponibles dans la littérature. On en trouve un traitement très exhaustif dans la référence [bib9]. Des moyennes, valeurs minimales et maximales et distributions des paramètres, identifiées à partir d'accélérographes enregistrés sur

sol moyen à dur et $D > 10\text{km}$ (issus de la base de séismes NGA [bib14]), sont présentées dans l'annexe de ce document. Ces résultats sont tirés du rapport de Rezaeian & Der Kiureghian [bib9].

4 Références

- 1) Ahmadi, G. Fan FG, (1990) Nonstationary Kanai-Tajimi models for El Centro 1940 and Mexico City 1985 earthquake, Probabilistic Engineering Mechanics, 5, 171-181.
- 2) Clough RW., Penzien J. (1975), Dynamics of Structures. McGraw-Hill.
- 3) Cacciola, P. (2010), A stochastic approach for generating spectrum compatible fully non stationary earthquakes, Computers and Structures 88, 889-901.
- 4) Jennings, P.C., Housner, G.W., Tsai, C. (1969) Simulated earthquake motions for design purpose. Proc. 4th World Conference Earth. Eng. Santiago, vol. A-1: 145-160.
- 5) Kanai, K. (1957). Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground motion. Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo 35:2, pp. 308-325.
- 6) Poirion, F. and Soize, C. (1989). Simulation numérique des champs stochastiques gaussiens homogène et non homogène. La Recherche Aéronautique, pp. 41-61.
- 7) Preumont A. (1980), A method for generation of artificial accelerograms. Nuclear Eng. Design, 59, 357-368.
- 8) Priestley, M.B. (1964) Evolutionary spectra and nonstationary processes. J. Royal Statistical Society 27(2), 204-237.
- 9) Rezaeian S, Der Kiureghian A. (2010), Stochastic modeling and simulation ground motions for performance-based earthquake engineering, PEER report 2010/02.
- 10) Rezaeian S, Der Kiureghian A. (2010), Simulation of synthetic ground motions for specified earthquake and site characteristics, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 39 , 1155-1180.
- 11) Soize, C. (1993), Méthodes mathématiques en analyse du signal. Masson, Paris.
- 12) Stewart et al. (2008), Special Issue of the NGA Relations Project, Earthquake Spectra 24:1.
- 13) Tajimi, H. (1960). A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake. 2nd WCEE, Tokyo 2, pp. 781-798.
- 14) US NGA strong-motion database (<http://peer.berkeley.edu/nga/>)
- 15) Vanmarcke E.H. (1972), Properties of spectral moments with applications to random vibration. J Engrg. Mech. Div. ASCE 98, 425-446.
- 16) Vanmarcke, E.H., Gasparini, D.A. (1977) Simulated earthquake ground motions. Proc. 4th Int. Conf. on Smirt, K1/9, San Francisco.
- 17) Zentner I., Poirion F. (2012), Enrichment of seismic ground motion databases using Karhunen-Loève expansion. Earthquake Engineering and Structural Dynamics doi: 10.1002/eqe.2166.

Documentation de Code_Aster :

[R4.05.02] : Approche stochastique pour l'analyse sismique.

[R7.10.01] : Dépouillement de réponses aléatoires.

[U4.84.04] : Opérateur POST_DYNA_ALEA

[U4.84.01] :: Opérateur COMB_SISM_MODAL

[U4.32.05] : Opérateur INFO_FONCTION

[U4.36.05] : Opérateur GENE_FONC_ALEA

[U4.36.04] : Opérateur GENE_ACCE_SEISME

5 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
11.2	I.ZENTNER EDF/ R&D/AMA	Version initiale du document.

6 Annexe

On reproduit ci-dessous des tables du PEER report de Rezaeian & Der Kiureghian ([bib9], p.93-94) où des valeurs moyennes ainsi que les distributions des paramètres du modèle de séisme ont été estimées à partir de la base de séismes NGA pour une sélection de séismes enregistrés sur sol moyen à dur et $D > 10 \text{ km}$.

Légende :

I_a : intensité Arias; D_{5-95} : durée de la phase forte (ici T_{SM}); ζ_f : amortissement réduit du filtre (ici ξ_0); ω_{mid} : fréquence propre du filtre à l'instant $t_{0.45}$ (on travaille ici avec la pulsation ω_0 à l'instant $t_{0.05}$); ω' : ratio de variation de la fréquence propre du filtre (la pente de la fonction décrivant l'évolution de la pulsation propre du filtre).

Parameter	Minimum	Maximum	Sample Mean	Sample Standard Deviation	Coefficient of Variation
I_a (s.g.)	0.000275	2.07	0.0468	0.164	3.49
D_{5-95} (s)	5.37	41.29	17.25	9.31	0.54
t_{mid} (s)	0.93	35.15	12.38	7.44	0.60
$\omega_{mid}/2\pi$ (Hz)	1.31	21.6	5.87	3.11	0.53
$\omega'/2\pi$ (Hz/s)	-1.502	0.406	-0.089	0.185	2.07
ζ_f (Ratio)	0.027	0.767	0.213	0.143	0.67

Parameter	Fitted Distribution ⁸	Distribution Bounds
I_a (s.g.)	Lognormal	(0, ∞)
D_{5-95} (s)	Beta	[5,45]
t_{mid} (s)	Beta	[0.5,40]
$\omega_{mid}/2\pi$ (Hz)	Gamma	(0, ∞)
$\omega'/2\pi$ (Hz)	Two-sided Truncated Exponential	[-2,0.5]
ζ_f (Ratio)	Beta	[0.02,1]

⁸ Means and standard deviations of these distributions are according to columns 4 and 5 of Table 4.3.