
Modélisation élasto(visco)plastique prenant en compte des transformations métallurgiques

Résumé :

Ce document présente la modélisation mise en place dans *Code_Aster* pour l'analyse mécanique d'opérations générant des transformations métallurgiques. On présente les différents effets mécaniques résultant des transformations structurales à prendre en compte et leurs modélisations.

Table des matières

1 Introduction.....	3
2 Influence des transformations structurales sur la déformation thermique.....	5
2.1 Zones de déformation thermique.....	5
2.2 Hypothèses et notations.....	6
3 Plasticité de transformation.....	7
4 Restauration d'écroissage.....	9
4.1 Modèle à 2 phases avec un sens de transformation	9
4.2 Généralisation du modèle à n phases avec transformations à double sens.....	11
5 Modèles de déformation (visco)plastique.....	12
5.1 Cas limite : Modèle plastique indépendant du temps.....	14
5.2 Cas limite : Modèle de comportement de fluide visqueux.....	14
5.3 Plasticité multiphasée.....	14
6 Relations de comportement	17
6.1 Partition de la déformation :	17
6.2 Lois de comportement.....	17
6.2.1 Cas avec écroissage isotrope.....	17
6.2.2 Cas avec écroissage cinématique.....	18
6.3 Les différentes relations de comportement élasto-plastique META_P ***.....	19
6.3.1 Relation META_P_IL.....	20
6.3.2 Relation META_P_INL.....	20
6.3.3 Relation META_P_CL.....	20
6.3.4 Relation META_P_IL_PT, META_P_INL_PT, META_P_CL_PT.....	21
6.3.5 Relation META_P_IL_RE , META_P_INL_RE et META_P_CL_RE.....	21
6.3.6 Relation META_P_IL_PT_RE , META_P_INL_PT_RE et META_P_CL_PT_RE.....	21
6.4 Les différentes relations de comportement élasto-viscoplastique META_V ***.....	22
6.4.1 Relation META_V_IL et META_V_INL.....	22
6.4.2 Relation META_V_CL	22
6.4.3 Relation META_V_IL_PT, META_V_INL_PT et META_V_CL_PT.....	22
6.4.4 Relation META_V_IL_RE , META_V_INL_RE et META_V_CL_RE.....	22
6.4.5 Relation META_V_IL_PT_RE , META_V_INL_PT_RE et META_V_CL_PT_RE.....	22
7 Formulation numérique.....	23
7.1 Discrétisation.....	23
7.2 Algorithme de résolution du problème quasi-statique.....	24
7.2.1 Intégration des relations META_***.....	24
7.2.2 Matrice tangente.....	26
7.2.2.1 Phase de prédiction - Option RIGI_MECA_TANG.....	26
7.2.2.2 Itérations de Newton - Option FULL_MECA.....	28
7.2.2.3 Opérateur tangent.....	29
8 Bibliographie.....	32

[9 Description des versions du document.....33](#)

1 Introduction

Certains matériaux subissent des transformations structurales lorsqu'ils sont soumis à des évolutions thermiques particulières [bib1], [bib2], [bib3]. C'est par exemple le cas des aciers faiblement alliés au cours d'opérations de type soudage et traitement thermique ou encore les alliages de zircaloy des gaines de combustible pour certains cas de situation accidentelle (APRP).

Ces transformations ont une influence plus ou moins forte sur les évolutions thermiques et mécaniques.

D'un point de vue thermique, les transformations structurales s'accompagnent d'une modification des caractéristiques thermiques (capacité calorifique volumique, conductivité thermique) du matériau qui les subit, ainsi que d'une production ou d'une absorption d'énergie (chaleurs latentes de transformation) [bib2]. Toutefois, les chaleurs latentes de transformation à l'état solide sont relativement faibles comparées aux chaleurs latentes de changement d'état liquide-solide et on peut donc, en première approximation, considérer les évolutions thermiques et structurales comme découplées. C'est actuellement le cas des options de calculs thermiques et métallurgiques implantées dans *Code_Aster*. [bib16]

D'un point de vue mécanique, les conséquences des transformations structurales (à l'état solide) sont de quatre types [bib2] :

- les caractéristiques mécaniques du matériau qui les subit sont modifiées. Plus précisément, les caractéristiques élastiques (module d'YOUNG et coefficient de POISSON) sont peu affectées alors que les caractéristiques plastiques (limite d'élasticité notamment) et le coefficient de dilatation thermique le sont fortement,
- l'expansion ou la contraction volumique qui accompagne les transformations structurales se traduit par une déformation (sphérique) "de transformation" qui se superpose à la déformation d'origine purement thermique. Cet effet est mis en évidence sur un essai de dilatométrie et, en général, on le regroupe avec celui dû à la modification du coefficient de dilatation et l'on parle globalement de l'influence des transformations sur la déformation thermique,
- une transformation se déroulant sous contraintes peut donner naissance à une déformation irréversible et ce, même pour des niveaux de contraintes très inférieurs à la limite d'élasticité du matériau (à la température et dans l'état structural considérés). On appelle "**plasticité de transformation**" ce phénomène,
- on peut avoir lors de la transformation métallurgique un phénomène de restauration d'écrouissage. L'écrouissage de la phase mère n'est pas transmis aux phases nouvellement créées. Celles-ci peuvent alors naître avec un état d'écrouissage vierge ou n'hériter que d'une partie, éventuellement de la totalité, de l'écrouissage de la phase mère.

Par ailleurs, l'état mécanique influence également le comportement métallurgique. L'état de contraintes peut notamment accélérer ou ralentir la cinétique des transformations et modifier les températures auxquelles elles se produisent. Cependant, la caractérisation expérimentale de cette influence, notamment dans le cas de situations complexes (tridimensionnelles, sous température et état de contraintes variables) demeure très délicate et il est très fréquent de considérer l'évolution structurale comme indépendante de l'état mécanique. C'est le cas du modèle de transformations structurales implanté dans *Code_Aster*.

Si l'on néglige les différents couplages d'origine mécanique, la détermination de l'évolution mécanique associée à un processus mettant en jeu des transformations structurales nécessite donc deux calculs successifs et découplés :

- un calcul thermo-métallurgique (découplé) permettant la détermination des évolutions thermiques puis structurales,
- un calcul mécanique (élasto-viscoplastique) tenant compte des effets dus aux évolutions thermiques et structurales.

Ce document présente la modélisation mécanique implantée dans *Code_Aster*. La modélisation est disponible pour deux matériaux :

- l'acier qui subit aux environs de 850° une transformation austénite-ferritique (passage de phases α à froid de structure cubique face centrée (*cfc*) à une phase γ à chaud de structure cubique centrée (*cc*)). L'acier présente 4 phases ferritiques possibles ; la ferrite, la perlite, la bainite et la martensite,
- les alliages de Zircaloy qui subissent aux environs de $800^{\circ}C$ une transformation de phase à froid α de structure hexagonale compacte à une phase à chaud β de structure *cc*.

Les modèles sont identiques pour les deux matériaux, seul le nombre de phase change.

Le modèle comporte donc 5 phases pour l'acier et 3 phases pour le zircaloy. La modélisation du comportement du zircaloy nécessite en effet de considérer 2 phases à froid de comportement mécanique différent ; une phase α considérée comme pure et une phase α mélangée avec du β [bib16], [bib17]. Les différentes caractéristiques relatives aux différentes phases sont notées :

Aciers	Zircaloy
Ferrite : F1_***	Alpha pure : F1_***
Perlite : F2_***	Alpha mélangé : F2_***
Bainite : F3_***	Bêta : C_***
Martensite : F4_***	
Austénite : C_***	

Nota Bene :

Les notions métallurgiques de bases nécessaires à la compréhension du problème général sont rassemblées en [bib1].

L'algorithme de résolution élasto-plastique, sans prise en compte des effets dus aux transformations structurales est explicité en [bib4].

Ce document est pour partie extrait de [bib5] et [bib14] où l'on fait une présentation plus détaillée du modèle et de quelques éléments de validation.

La présentation des modèles que l'on fait dans ce document est en grande partie illustrée avec le cas de l'acier.

2 Influence des transformations structurales sur la déformation thermique

Un essai de dilatométrie consiste à mesurer la déformation (homogène) d'une éprouvette de petite dimension en fonction de la température (ou du temps) lors d'un cycle thermique imposé (supposé identique en tous les points de l'éprouvette). On présente [Figure 2-a] un essai de dilatométrie d'un acier. Le cycle thermique comporte un chauffage au-delà de la température d'austénitisation (soit 850°C environ), puis un maintien à cette température et, enfin, un refroidissement contrôlé jusqu'à la température ambiante. On obtient alors une évolution de la déformation (variable selon la cinétique de refroidissement imposée) telle que représentée sur la figure.

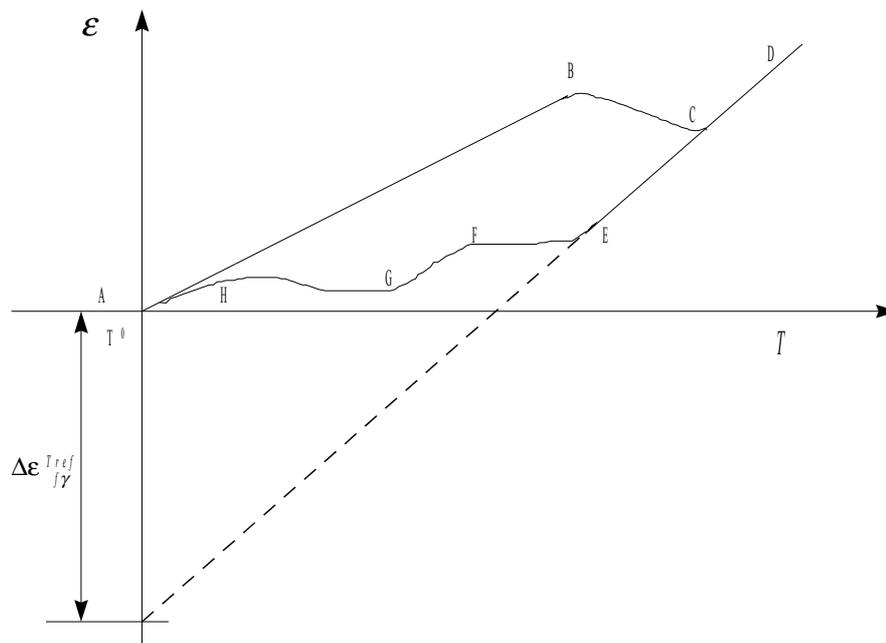


Figure 2-a : Relevé schématique de dilatométrie

2.1 Zones de déformation thermique

Les différentes zones mises en évidence sur la figure [Figure 2-a] peuvent s'interpréter comme suit :

- A-B : dilatation thermique du métal dans sa structure métallurgique initiale (de type ferrito-perlitique ($F+P$), bainitique (B) et/ou martensitique (M)) jusqu'à la température de début d'austénitisation $T(B)$,
- B-C : austénitisation et contraction de l'éprouvette (volume spécifique de la phase austénitique (γ) plus petit),
- C-D : dilatation thermique de l'austénite (avec un coefficient de dilatation différent de celui des phases dites " α " (F), (P), (B), (M)),
- D-E : contraction thermique de l'austénite,
- E-F : première transformation (partielle) de l'austénite (par exemple $\gamma \rightarrow F+P$) qui s'accompagne d'une expansion volumique,
- F-G : zone sans transformation avec contraction thermique du mélange austénite restante - phase formée (avec un certain coefficient de dilatation thermique apparent),
- G-H : seconde transformation de l'austénite restante (par exemple $\gamma \rightarrow M$) qui s'accompagne d'une expansion volumique,
- H-A : contraction thermique de la structure finale (avec le même coefficient de dilatation qu'au chauffage).

2.2 Hypothèses et notations

- Les structures ferritiques, perlitiques, bainitiques et martensitiques ont un coefficient de dilatation thermique identique (noté α_f) différent de celui de l'austénite (noté α_y).

On définit un état de référence pour lequel on considère que la déformation thermique est nulle : on choisit pour cela une phase métallurgique de référence (phase austénitique ou phase ferritique) et une température de référence T_{ref} .

- Soit ε_y^{th} la déformation thermique de la phase austénitique, et ε_f^{th} la déformation thermique des phases ferritique, perlitique, bainitique et martensitique, nous prendrons :

$$\begin{aligned}\varepsilon_y^y &= \alpha_y(T)(T - T_{ref}) - (1 - Z_y^R) \Delta \varepsilon_{fy}^{T_{ref}} \\ \varepsilon_f^{th} &= \alpha_f(T)(T - T_{ref}) + Z_y^R \Delta \varepsilon_{fy}^{T_{ref}}\end{aligned}$$

où :

- T^{ref} : Température de référence,
- $\alpha_y(T)$: coefficient de dilatation moyen de la phase austénitique à la température courante T , par rapport à la température de référence.
- $\alpha_f(T)$: coefficient de dilatation moyen des phases ferritique, perlitique, bainitique et martensitique à la température courante T , par rapport à la température de référence.
- Z_y^R : caractérise la phase métallurgique de référence ;
 $Z_y^R = 1$ lorsque la phase de référence est la phase austénitique,
 $Z_y^R = 0$ lorsque la phase de référence est la phase ferritique.

$\Delta \varepsilon_{fy}^{T_{ref}} = \varepsilon_f^{th}(T_{ref}) - \varepsilon_y^{th}(T_{ref})$ traduit la différence de compacité entre les structures cristallographiques cubiques à faces centrées (austénite) et cubiques centrées (ferrite) à la température de référence T_{ref} .

Soit $\mathbf{Z}(M, t) = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$ les proportions respectives de ferrite, perlite, bainite et martensite présentes en un point matériel M à l'instant t . Moyennant l'hypothèse d'une loi de mélange pour définir la déformation thermique d'un mélange multiphasé (caractérisé par \mathbf{Z}) on a :

$$\varepsilon^{th}(\mathbf{Z}, t) = \left(1 - \sum_{i=1}^{i=4} Z_i\right) \left[\alpha_y(T - T_{ref}) - (1 - Z_y^R) \Delta \varepsilon_{fy}^{T_{ref}}\right] + \left(\sum_{i=1}^{i=4} Z_i\right) \left[\alpha_f \cdot (T - T_{ref}) + Z_y^R \Delta \varepsilon_{fy}^{T_{ref}}\right]$$

Pour le calcul de la déformation thermique il faut donc se donner :

- le coefficient de dilatation des phases à froid,
- le coefficient de dilatation de la phase à chaud,
- une phase métallurgique de référence et une température de référence,
- la différence de compacité entre la phase à chaud et à froid à la température de référence.

Ces données sont fournies par l'utilisateur dans l'opérateur `DEFI_MATERIAU [U4.23.01]` sous le mot clé `ELAS_META_FO` excepté la température de référence qu'on définit dans `AFFE_MATERIAU`.

Les α dépendent de la température et sont calculés pour la température du point de Gauss courant.

3 Plasticité de transformation

Expérimentalement, on constate que le relevé dilatométrique d'une éprouvette en cours de transformation structurale est fortement influencé par l'état de contraintes et que l'application d'une contrainte même inférieure à la limite d'élasticité du matériau peut néanmoins provoquer une déformation irréversible (cf. [Figure 3-a]).

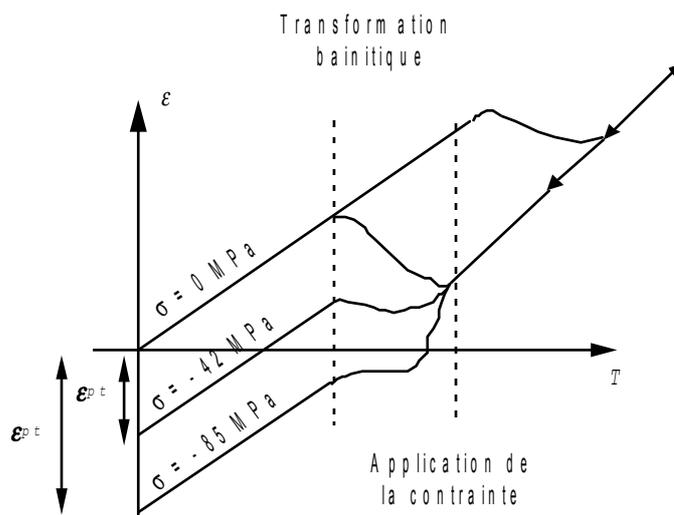


Figure 3-a : Courbes dilatométriques sous contraintes uniaxiales de compression pour un acier 16 MND5

On appelle **plasticité de transformation** ce phénomène et on note ε^{pt} la **déformation irréversible** correspondante.

Le modèle de plasticité de transformation le plus fréquemment utilisé est, à l'origine, la généralisation tridimensionnelle du modèle phénoménologique unidimensionnel établi par DESALOS [bib12]. Si, à partir d'un essai dilatométrique, on trace la différence entre l'allongement ε obtenu pour une contrainte appliquée différente de zéro et celui obtenu pour une contrainte nulle en fonction de l'avancement de la transformation, on constate que :

$$\varepsilon^{pt}(\sigma, b) = \varepsilon(\sigma, b) - \varepsilon(0, b) = kF(b)\sigma$$

- où :
- k est une constante homogène à l'inverse d'une contrainte,
 - F est une fonction normalisée ($F(0)=0$ et $F(1)=1$),
 - et b est la proportion de la phase transformée.

Une généralisation tridimensionnelle et temporelle du modèle expérimental précédent, pour une seule transformation, a été proposée par LEBLOND [bib8], [bib9], [bib10], [bib11], sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pt} = \frac{3}{2} K \tilde{\sigma}_{ij} F'(b) \dot{b}$$

Sur la base d'essais expérimentaux et pour une transformation de type bainitique d'un acier 16MND5 par exemple : K est pris égale à $10^{-4} MPa^{-1}$ et $F(b) = b(2-b)$.

Elle s'appuie sur les considérations heuristiques suivantes :

- la relation doit être "incrémentale", c'est-à-dire relier le taux de déformation plastique au taux de transformation,
- la vitesse de déformation plastique de transformation doit être, comme pour la plasticité classique, proportionnelle à la partie déviatorique $\tilde{\sigma}$ du tenseur contrainte σ ,
 $\left(\tilde{\sigma} = \sigma - \frac{1}{3} tr \sigma \mathbf{Id} \right)$, (la plasticité de transformation se produit sans changement de volume, d'où une dépendance par rapport au déviateur des contraintes plutôt qu'au champ de contraintes lui-même),
- le taux de déformation plastique de transformation doit être nul en dehors des plages de transformations,
- l'intégration de cette relation dans le cas uniaxial à contrainte constante σ doit redonner la relation expérimentale.

Le phénomène de plasticité de transformation peut exister lors des transformations structurales sous contraintes de type ferritique, perlitique, bainitique et martensitique, qui peuvent éventuellement apparaître simultanément. En revanche, on considère que ce phénomène n'existe pas lors de la transformation austénitique. Le modèle général implanté dans *Code_Aster* est donc :

$$\dot{\varepsilon}^{pt}(\sigma, \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{i=4} \dot{\varepsilon}_i^{pt}(\sigma, \mathbf{Z}) = \frac{3}{2} \tilde{\sigma} \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i \left(\sum_{i=1}^{i=4} Z_i \right) \langle \dot{Z}_i \rangle$$

où : $\langle X \rangle$ désigne la partie positive d'une grandeur.

Les données K_i et F'_i sont fournies par l'utilisateur dans `DEFI_MATERIAU` sous le mot clé `META_PT`.

Dans *Code_Aster*, il est possible de ne pas prendre en compte le phénomène de plasticité de transformation. Dans le cas où ce phénomène est pris en compte, il apparaît dès qu'il y a transformation et cela même si la structure plastifie. Le modèle est plus particulièrement dédié à l'acier.

4 Restauration d'écroissage

De façon usuelle l'état d'écroissage d'une phase i est caractérisé par son histoire plastique. Ainsi par exemple dans le cas de la plasticité avec écroissage isotrope linéaire, on prend généralement comme variable d'écroissage la déformation plastique cumulée notée p . Le terme d'écroissage s'écrit alors : $R_i = R_{oi} p$ où R_{oi} est le coefficient d'écroissage linéaire de la phase i .

Lors des transformations métallurgiques, il existe au sein du matériau des déplacements d'atomes plus ou moins importants. Ces déplacements d'atomes peuvent annihiler des dislocations qui sont à l'origine de l'écroissage. Dans ces cas, l'écroissage de la phase mère n'est pas transmis à la phase produite, c'est la restauration d'écroissage. La nouvelle phase peut alors naître avec un état plastique vierge ou n'hériter que d'une partie, éventuellement de la totalité, de l'écroissage de la phase mère. La déformation plastique cumulée p n'est plus caractéristique de l'état d'écroissage et il faut définir d'autres variables d'écroissage pour chaque phase, notées r_i qui tiennent compte de la restauration d'écroissage.

Le terme d'écroissage de la phase i s'écrit alors $R_i = R_{oi} r_i$.

4.1 Modèle à 2 phases avec un sens de transformation

Pour définir les variables r_i , on choisit le modèle proposé par LEBLOND [bib11].

On considère un élément de volume biphasé V qui subit une transformation métallurgique et une déformation plastique.

La phase 1 est la phase mère, caractérisée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fraction volumique } V_1 \\ \text{proportion de phase } (1-z) \\ \text{variable d'écroissage } r_1 \end{array} \right.$$

La phase 2 est la phase produit, caractérisée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fraction volumique } V_2 \\ \text{proportion de phase } z \\ \text{variable d'écroissage } r_2 \end{array} \right.$$

Les équations d'évolution des r_i obtenues par dérivation par rapport au temps s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r}_1 = \dot{p} \\ \dot{r}_2 = \dot{p} - \frac{\dot{z}}{z} r_2 + \frac{\dot{z}}{z} \theta r_1 \end{array} \right. \quad \text{éq 4.1-1}$$

θ caractérise la proportion d'écroissage transmis de la phase mère à la phase produite.

\dot{p} est le taux de déformation plastique équivalente.

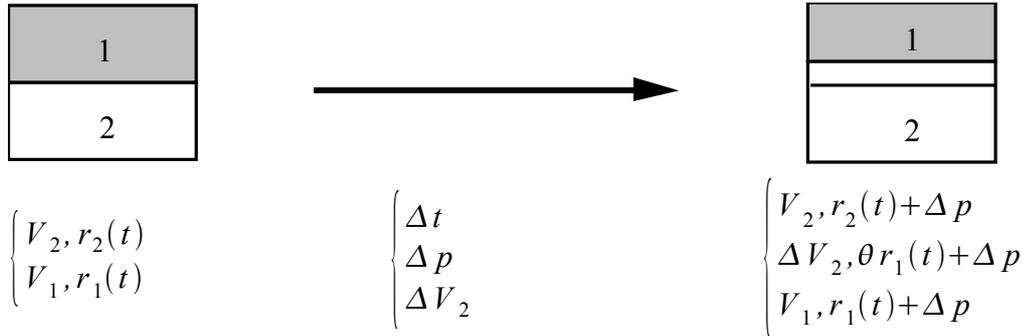
Remarques :

p ici n'est plus une variable interne du problème en tant que telle. La seule signification de \dot{p} est ici d'être le multiplicateur plastique et elle est égale au taux de déformation plastique équivalente.

SJÖSTRÖM obtient les mêmes équations en utilisant un raisonnement phénoménologique qu'on reporte ici pour expliciter le modèle [bib13].

Soit un incrément de temps Δt , tel que entre t et $t + \Delta t$:

- une fraction ΔV_2 de la phase mère se transforme en phase 2 et vient donc se rajouter au volume V_2 de cette phase produit,
- l'élément de volume V subit une déformation plastique Δp .



On suppose que lors de la transformation métallurgique, la fraction transformée ΔV_2 n'hérite que d'une partie θr_1 de l'écroutissage de la phase mère $0 \leq \theta \leq 1$.

Alors les variables d'écroutissage r_i à l'instant $t + \Delta t$ sont telles que :

$$\begin{cases} r_1(t + \Delta t) = r_1(t) + \Delta p \\ r_2(t + \Delta t) = \frac{V_2(r_2(t) + \Delta p) + \Delta V_2(\theta r_1(t) + \Delta p)}{V_2 + \Delta V_2} \end{cases}$$

Soit, en considérant que $r_i(t + \Delta t) = r_i(t) + \Delta r_i$

$$\begin{cases} \Delta r_1 = \Delta p \\ \Delta r_2 = \Delta p + \frac{\Delta V_2}{V_2 + \Delta V_2} \theta r_1 - \frac{\Delta V_2}{V_2 + \Delta V_2} r_2 \end{cases}$$

éq 4.1-2

On obtient les équations [éq 4.1-1] en passant à la limite.

Pour la discrétisation des lois d'évolutions des r_i , on choisit un schéma d'intégration explicite en utilisant directement les équations [éq 4.1-2].

4.2 Généralisation du modèle à n phases avec transformations à double sens

Pour le cas de l'acier les phases existantes sont : Ferrite, Perlite, Bainite, Martensite et Austénite γ de proportions respectives Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 et $1 - \sum_{k=1}^{k=4} Z_k$.

- Dans le cas d'un refroidissement, les transformations métallurgiques à considérer sont les transformations de (γ) en $(F), (P), (B), (M)$.
- Dans le cas d'un chauffage on considère les transformations dans l'autre sens : $(F), (P), (B), (M)$ en (γ) .

On peut donc écrire dans un cas général (où $\langle x \rangle$ désigne la partie positive de x).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } Z_\gamma > 0 \quad \Delta r_g = \Delta p + \frac{\sum_{k=1}^4 \langle -\Delta Z_k \rangle \theta_{k\gamma} r_k^- - \sum_{k=1}^4 \langle -\Delta Z_k \rangle r_\gamma^-}{1 - \sum_{k=1}^4 Z_k} \\ \text{sinon} \quad r_\gamma^- = 0 \text{ et } \Delta r_\gamma^- = 0 \\ \text{Si } Z_k > 0 \quad \Delta r_k = \Delta p + \frac{\langle \Delta Z_k \rangle \theta_{\gamma k} r_\gamma^- - \langle \Delta Z_k \rangle r_k^-}{Z_k} \\ \text{sinon} \quad r_k^- = 0 \text{ et } \Delta r_k^- = 0 \end{array} \right. \quad \text{éq 4.2-1}$$

$\theta_{\gamma k}$: proportion de restauration d'écroissage lors de la transformation γ en k

$\theta_{k\gamma}$: proportion de restauration d'écroissage lors de la transformation k en γ

Pour des transformations avec diffusion (ex : γ en F, P, B) impliquant des déplacements importants d'atomes on pourra prendre $\theta=0$; les dislocations à l'origine de l'écroissage plastique sont totalement annihilées par la transformation. Pour des transformations sans diffusion (ex : transformation martensitique), on pourra prendre $\theta=1$, l'écroissage étant totalement transmis.

Les θ sont fournis par l'utilisateur dans l'opérateur `DEFI_MATERIAU` sous le mot clé `META_RE`.

5 Modèles de déformation (visco)plastique

La principale caractéristique des évolutions thermiques concernées dans ce type d'analyse est qu'elles balaient un large domaine de température, ce qui a un effet important sur le comportement mécanique du matériau qui subit l'évolution thermique. On est notamment dans des domaines de température où les phénomènes de viscosité peuvent ne plus être négligeables. Il peut donc être nécessaire d'utiliser un modèle de comportement élasto-viscoplastique surtout lorsqu'on reste dans ces domaines pendant une durée importante ; par exemple lors des traitements de détensionnement associés au soudage.

On choisit donc un modèle viscoplastique dont les caractéristiques sont telles qu'il permette de décrire avec un même formalisme, donc sans changer de modèle :

- un comportement plastique classique; pour modéliser les cas à basse température lorsque les effets visqueux sont encore négligeables ou pour modéliser les processus à vitesse élevée (soudage),
- un comportement viscoplastique écrouissable à haute température, pour modéliser les effets de fluage et de relaxation associés par exemple aux traitement de détensionnement ou aux soudages multipasses,
- un comportement de type fluide visqueux pour les températures supérieures à la température de fusion, afin d'avoir une description raisonnable de la zone fondue.

Le modèle viscoplastique choisi dégénère en effet pour certains cas limites en modèle de plasticité indépendant du temps, ou en modèle de fluide visqueux.

On se place ici dans le cadre de la plasticité de von Mises avec écrouissage isotrope additif. L'utilisation d'un écrouissage cinématique étant également possible (version 6.1.6).

Fonction seuil :

$$f = \sigma_{eq} - R(r; T, Z) - \sigma_c(T, Z)$$

$$\sigma_{eq} \quad \text{contrainte équivalente de von Mises, } \sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \tilde{\sigma} : \tilde{\sigma} \right)^{1/2}$$

$$R(r; T, Z) : \quad \text{terme d'écrouissage isotrope,}$$

$$\sigma_c(T, Z) : \quad \text{contrainte critique initiale ; correspond à la contrainte minimale initiale à appliquer pour avoir un écoulement viscoplastique.}$$

Taux d'écoulement plastique :

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}$$

La déformation plastique cumulée \dot{p} est visqueuse et s'écrit :

$$\dot{p} = \left(\frac{\langle \sigma_{eq} - R(r; T, Z) - \sigma_c(T; Z) \rangle}{\eta} \right)^n \quad \text{éq 5-1}$$

η, n : coefficients matériaux de viscosité.

Remarque :

On peut réécrire l'équation [éq 5 -1] sous la forme : $\sigma_{eq} - R(r; T, Z) - \sigma_c(T, Z) - \eta \dot{p}^{1/n} = 0$,
c'est-à-dire que dans ce modèle, la contrainte peut s'interpréter comme la somme d'une
contrainte limite d'écoulement (qui se décompose elle même en une contrainte limite initiale et un
terme d'écrouissage) et une contrainte « visqueuse » dépendant de la vitesse de déformation et
nulle à vitesse nulle.

Restauration visqueuse d'écrouissage

On introduit également dans la modélisation le phénomène de restauration visqueuse d'écrouissage
qui conduit à une évanescence partielle de l'écrouissage. Sous l'action de l'agitation thermique, il se
produit une restauration lente de la structure cristalline du métal par annihilation des dislocations et
relaxation des contraintes internes. Le modèle utilisé pour décrire ce phénomène est le suivant :

$$\begin{cases} R = R_0 r \\ \dot{r} = \dot{p} - (Cr)^m \end{cases}$$

Le terme d'évolution de la variable d'écrouissage r comporte donc un terme d'écrouissage dû à la
déformation plastique et un terme de restauration.

Le modèle permet ainsi de décrire le phénomène de fluage primaire (écrouissage) et de fluage
secondaire (stabilisation de l'écrouissage).

Cas de l'écrouissage cinématique linéaire :

De manière équivalente au cas avec écrouissage isotrope les équations s'écrivent ;

fonction seuil :

$$f = (\tilde{\sigma} - X)_{eq} - \sigma_c$$

loi d'écoulement

Ecriture du taux de déformation (visco)plastique

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{(\tilde{\sigma} - \tilde{X})}{(\sigma - X)_{eq}} \quad \text{avec} \quad \dot{p} = \frac{\langle f \rangle^n}{\eta}$$

$$X = \frac{2}{3} H_0 \alpha$$

$\sigma, \tilde{\sigma}$: tenseur de contrainte et son déviateur

α : tenseur variable d'écrouissage cinématique,

X : tenseur d'écrouissage associé au tenseur variable d'écrouissage α ,

H_0 : coefficient d'écrouissage cinématique

modèle d'évolution du tenseur d'écrouissage α d'un matériau à n phases

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_\gamma = \dot{\epsilon}^{vp} + \frac{\sum_k (\langle \dot{z}_k \rangle \theta_{k\gamma} \alpha_k) - \sum_k (\langle \dot{z}_k \rangle \alpha_\gamma)}{z_\gamma} + \frac{3}{2} (C\alpha_{eq})^m \frac{\alpha}{\alpha_{eq}} \\ \dot{\alpha}_k = \dot{\epsilon}^{vp} + \frac{\dot{z}_k \theta_{\gamma k} \alpha_k - \dot{z}_k \alpha_k}{z_k} + \frac{3}{2} (C\alpha_{eq})^m \frac{\alpha}{\alpha_{eq}} \end{cases}$$

Par souci de simplification et de la même manière qu'en isotrope, on prend pour le terme de restauration visqueuse :

$$\begin{cases} \alpha = \sum_i z_i \alpha_i \\ C = \sum_i z_i C_i \\ m = \sum_i z_i m_i \end{cases}$$

θ_{ij} : coefficients de restauration métallurgique lors de la transformation $i \rightarrow j$

C_i, m_i : coefficients de restauration visqueuse de la phase i .

5.1 Cas limite : Modèle plastique indépendant du temps

On veut décrire un comportement élasto-plastique instantané et annuler les effets visqueux. Pour cela les paramètres visqueux η et C seront pris égaux à zéro. Pour s'affranchir des problèmes numériques que peut poser la prise en compte de η et C nuls, et de manière similaire au traitement effectué pour le modèle viscoplastique de Taheri [bib15], on réécrit l'équation [éq 5-1] sous la forme :

$$f - \eta \dot{p}^{1/n} \leq 0 \quad \text{éq 5.1-1}$$

l'inégalité stricte étant obtenue dans le cas $\begin{cases} f < 0 \\ \dot{p} = 0 \end{cases}$ (régime élastique).

Dans le domaine de comportement purement plastique ($\eta \rightarrow 0$) l'inégalité [éq 5.1-1] est alors réduite à : $f = \sigma_{eq} - R - \sigma_c(T) \leq 0$ et \dot{p} ne peut plus être déterminé que par l'équation de consistance $\dot{f} = 0$.

On se retrouve donc bien dans le cadre de la plasticité instantanée indépendante du temps, avec un traitement numérique identique à celui classiquement utilisé pour le traitement de celle-ci.

Remarque :

On notera que σ_c correspond alors à la définition classique de la limite élastique σ_y .
La limite d'élasticité sera notée σ_c en viscoplasticité et σ_y en plasticité indépendante du temps.

5.2 Cas limite : Modèle de comportement de fluide visqueux

A très haute température on a : $\begin{cases} R \rightarrow 0 \\ \sigma_c \rightarrow 0 \end{cases}$

si on prend $n \rightarrow 1$, alors : $\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{eq}}{\eta}$ soit en unidimensionnel : $\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\sigma}{\eta}$. On obtient ainsi un modèle de comportement de type fluide visqueux newtonien, de viscosité η .

Remarque :

Dans Code_Aster, les relations de comportement disponibles sont soit des modèles totalement plastiques indépendants du temps, soit des modèles avec effet visqueux. (cf [§6]).

5.3 Plasticité multiphasée

Les transformations métallurgiques entraînent des modifications des caractéristiques mécaniques du matériau.

Les caractéristiques élastiques (module d'YOUNG et coefficient de POISSON) sont peu affectées par les changements de structures métallurgiques. Seule leur dépendance par rapport à la température est donc prise en compte.

Par contre, les caractéristiques plastiques (limite d'élasticité notamment) dépendent fortement de la structure métallurgique. Il faut donc prendre en compte les différences de caractéristiques plastiques pour chacune des phases possibles. Dans la modélisation la déformation et la contrainte sont définis à l'échelle du point matériel (macroscopique) qui peut être multiphasé. On cherche à définir le comportement plastique équivalent du matériau lorsqu'il présente une structure multiphasée, avec notamment un critère unique de plasticité. La définition du comportement du matériau équivalent se fait à l'aide d'une loi des mélanges sur les caractéristiques des phases. Plus précisément la définition de ce matériau équivalent correspondrait en 1D à un modèle rhéologique de i barres en parallèle tel que :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^{vp} = \dot{\epsilon}_i^{vp} \\ \sigma = \sum_i z_i \sigma_i \text{ avec } \sigma_i = \sigma_{ci} + R_i + \eta \dot{\epsilon}_i^{vp} \end{cases}$$

Plus précisément, dans le cas de la plasticité de von Mises avec écrouissage isotrope ;

- la fonction seuil s'exprime par :

$$f(\sigma, R; T, \mathbf{Z}) = \sigma_{\text{eq}} - R(T, \mathbf{Z}, r) - \sigma_c(T, \mathbf{Z})$$

où :

$$R(T, \mathbf{Z}, r) = \sum_i Z_i R_i(T, r_i)$$

est l'écrouissage du matériau multiphasé, R_i étant celui de la phase i .

où

$$\sigma_c(T, \mathbf{Z}) = \sum_i Z_i \sigma_{ci}$$

est la limite d'élasticité du matériau multiphasé, σ_{ci} celle de la phase i .

- et le taux de déformation plastique vérifie la condition de consistance $\tilde{f}=0$ donnée par cette loi de mélange. C'est-à-dire que lorsque on est en charge, \dot{p} est tel que :

$$\tilde{f} = \sigma_{eq} - R(r; T, Z) - \sigma_c(T, Z) - \sum_i Z_i \eta_i \dot{p}^{1/n_i} = 0$$

On donne également la possibilité d'utiliser une loi des mélanges non linéaire [bib9] telle que on ait en 1D : $\sigma = (1 - f_h(z))\sigma_y + f_h(z)\sigma_\alpha$. On a alors :

- $$\begin{cases} R = (1 - f_h(z))R_y + f_h(z)R_\alpha \\ \sigma_c = (1 - f_h(z))\sigma_{cy} + f_h(z)\sigma_{c\alpha} \end{cases}$$

σ_y est la limite d'élasticité de la phase austénitique,

$z = \sum_{k=1}^4 Z_k$ est la proportion totale des phases " α " (F, P, B, M)

$\sigma_{c\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^4 Z_k \sigma_{c\alpha_k}}{z}$ est la limite d'élasticité équivalente des phases à froid " α "

$R_\alpha = \frac{\sum_{k=1}^4 Z_k R_{\alpha_k}}{z}$ est l'écroutissement moyen des phases à froid.

- et en charge \dot{p} vérifie

$$\tilde{f} = \sigma_{eq} - R(r; T, Z) - \sigma_c(T, Z) - (1 - f_h(z))\eta_y \dot{p}^{1/n_y} - \sum_k \frac{Z_k}{z} \eta_k \dot{p}^{1/n_k} = 0 .$$

$f(z)$ est une fonction définie par l'utilisateur sous l'opérande SY_MELANGE du mot clé facteur ELAS_META_FO.

Les paramètres η_i, n_i, C_i et m_i sont définis dans DEFI_MATERIAU sous le mot clé facteur META_VISC. Les paramètres limites d'élasticité sont définis sous le mot clé facteur ELAS_META_FO ; mot clé *_SY pour les modèles plastiques indépendants du temps et mot clé *_S_VP pour les modèles viscoplastiques.

6 Relations de comportement

6.1 Partition de la déformation :

La déformation s'écrit comme la somme de quatre composantes :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{th} + \varepsilon^{vp} + \varepsilon^{pt}$$

où : $\varepsilon^e, \varepsilon^{th}, \varepsilon^{vp}, \varepsilon^{pt}$ sont respectivement les déformations élastique, thermique, visco-plastique et de plasticité de transformation,

6.2 Lois de comportement

6.2.1 Cas avec écrouissage isotrope

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{th} + \varepsilon^{vp} + \varepsilon^{pt}$$

$$\sigma = \mathbf{A}(T) \varepsilon^e$$

$$\dot{\varepsilon}^{pt} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma} \sum_{i=1}^4 K_i F'_i (1 - Z_\gamma) \langle \dot{\mathbf{Z}}_i \rangle$$

$$\varepsilon^{th}(Z, T) = Z_\gamma \left[\alpha_\gamma (T - T_{ref}) - (1 - Z_\gamma^R) \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \right] + \left(\sum_{i=1}^4 Z_i \right) \left[\alpha_f (T - T_{ref}) + Z_\gamma^R \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \right]$$

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}$$

$$f = \sigma_{eq} - R(T, Z, r) - \sigma_c(T, Z) \quad \text{avec} \quad R(T, Z, r) = \sum_{i=1}^5 Z_i R_i(T, r_i)$$

$$\dot{p} = 0 \quad \text{si} \quad f < 0$$

$$\dot{p} \geq 0 \quad \text{si} \quad f = 0 \quad \text{et vérifie} \quad \tilde{f} = \sigma_{eq} - R(T, Z, r) - \sigma_c(T, Z) - \sum_i Z_i \eta_i \dot{p}^{1/n_i} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r}_\gamma = \dot{p} + \frac{\sum_{k=1}^4 \langle -\dot{Z}_k \rangle \theta_{k\gamma} r_k - \sum_{k=1}^4 \langle -\dot{Z}_k \rangle r_\gamma}{1 - \sum_{k=1}^4 Z_k} - (C r_{moy})^m \quad \text{si} \quad Z_\gamma > 0, \dot{r}_\gamma = 0 \quad \text{si} \quad Z_\gamma = 0 \\ \dot{r}_k = \dot{p} + \frac{\langle \dot{Z}_k \rangle \theta_{\gamma k} r_\gamma - \langle \dot{Z}_k \rangle r_k}{Z_k} - (C r_{moy})^m \quad \text{si} \quad Z_k > 0, \dot{r}_k = 0 \quad \text{si} \quad Z_k = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec} \quad r_{moy} = \sum_{i=1}^5 Z_i r_i$$

f la fonction seuil,
 $r_i, Z_i R_i$ variables internes d'écrouissage et leurs forces thermodynamiques associées,
 $\mathbf{A} = (A_{ijkl})$ le tenseur de rigidité élastique, dépendant de la température,
 $T(t)$ et $\mathbf{Z}(t)$ la température et la structure métallurgique.

6.2.2 Cas avec écrouissage cinématique

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{th} + \varepsilon^{vp} + \varepsilon^{pt}$$

$$\sigma = \mathbf{A}(T) \varepsilon^e$$

$$\dot{\varepsilon}^{pt} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma} \sum_{i=1}^4 K_i F'_i (1 - Z_\gamma) \langle \dot{\mathbf{Z}}_i \rangle$$

$$\varepsilon^{th}(Z, T) = Z_\gamma \left[\alpha_\gamma (T - T_{ref}) - (1 - Z_\gamma^R) \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \right] + \left(\sum_{i=1}^4 Z_i \right) \left[\alpha_f (T - T_{ref}) + Z_\gamma^R \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \right]$$

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{(\tilde{\sigma} - \tilde{X})}{(\sigma - X)_{eq}}$$

$$f = (\sigma - X)_{eq} - \sigma_c(T, Z) \text{ avec } X(T, Z, \alpha) = \sum_{i=1}^5 Z_i X_i(T, \alpha_i)$$

$$\dot{p} = 0 \text{ si } f < 0$$

$$\dot{p} \geq 0 \text{ si } f = 0 \text{ et vérifie } \tilde{f} = \sigma_{eq} - R(T, Z, r) - \sigma_c(T, Z) - \sum_i Z_i \eta_i \dot{p}^{1/n_i} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}_\gamma = \dot{\varepsilon}^{vp} + \frac{\sum_k (\langle \dot{z}_k \rangle \theta_{\gamma k} \alpha_k) - \sum_k (\langle \dot{z}_k \rangle \alpha_\gamma)}{z_\gamma} + \frac{3}{2} (C \alpha_{eq})^m \frac{\alpha}{\alpha_{eq}} \text{ si } Z_\gamma > 0 \quad \dot{\alpha}_\gamma = 0 \text{ sinon} \\ \dot{\alpha}_k = \dot{\varepsilon}^{vp} + \frac{\dot{z}_k \theta_{\gamma k} \alpha_k - \dot{z}_k \alpha_k}{z_k} + \frac{3}{2} (C \alpha_{eq})^m \frac{\alpha}{\alpha_{eq}} \text{ si } Z_k > 0 \quad \dot{\alpha}_k = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \alpha_{eq} = \left(\sum_i Z_i \alpha_i \right)_{eq}$$

f	la fonction seuil,
$r_i, Z_i R_i$	variables internes d'écrouissage et leurs forces thermodynamiques associées,
$\mathbf{A} = (A_{ijkl})$	le tenseur de rigidité élastique, dépendant de la température,
$T(t)$ et $\mathbf{Z}(t)$	la température et la structure métallurgique.

En terme de relations de comportement de STAT_NON_LINE disponibles, la modélisation mise en place offre plusieurs possibilité :

- choix du type de comportement pour la déformation plastique ; plastique indépendant du temps ou avec prise en compte des effets visqueux,
- choix d'un écrouissage isotrope linéaire, isotrope non linéaire ou cinématique,
- prise en compte ou non de la plasticité de transformation,
- prise en compte ou non de la restauration d'écrouissage métallurgique.

Le choix du matériau (acier ou zircaloy) et donc du nombre de phase se fait en renseignant le mot-clé KIT de STAT_NON_LINE. 'ACIER' pour l'acier avec 5 phases et 'ZIRC' pour le zircaloy avec 3 phases.

6.3 Les différentes relations de comportement élasto-plastique META_P_***

Il existe 12 relations de comportement élasto-plastique indépendant du temps META_P*.

- 8 relations à écrouissage isotrope selon que l'on considère un écrouissage isotrope linéaire ou non linéaire, que l'on prenne en compte ou non la plasticité de transformations, que l'on prenne en compte ou non la restauration métallurgique de l'écrouissage.
- 4 relations à écrouissage cinématique linéaire selon que l'on prenne en compte ou non la plasticité de transformations et/ou la restauration métallurgique de l'écrouissage.

Pour ces 12 relations de comportement on renseigne sous le mot-clé ELAS_META_FO ou ELAS_META les paramètres élastiques E et ν , les coefficients de dilatation, ainsi que les limites d'élasticité.

```
/ ELAS_META_FO : ( E : E
                  NU : nu
                  F_ALPHA      : alpha_f
                  C_ALPHA      : alpha_c
                  PHASE_REFE    : 'CHAUD'
                              : 'FROID'
                  EPSF_EPSC_TREF : Delta_epsilon_fc^T_ref

                  F1_SY : sigma_yf1
                  F2_SY : sigma_yf2
                  F3_SY : sigma_yf3
                  F4_SY : sigma_yf4
                  A_SY  : sigma_yc
                  SY_MELANGE : f)
```

avec pour l'acier :

$$\alpha_f : \alpha_f$$

$$\alpha_c : \alpha_y$$

$$\Delta \varepsilon_{fc}^{T_{ref}} : \Delta \varepsilon_{fy}^{T_{ref}}$$

$$\sigma_{yfi} : \text{limite d'élasticité de la phase } i$$

6.3.1 Relation META_P_IL

Cette relation permet de traiter la relation de comportement dans le cas de la plasticité de Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire, appliquée à un matériau qui subit des changements de phases métallurgiques. Les phénomènes de plasticité de transformation et de restauration d'écrouissage sont négligés. Les coefficients d'écrouissage sont fournis sous le mot-clé META_ECRO_LINE de l'opérateur DEFI_MATERIAU.

```
/META_ECRO_LINE :  
F1_D_SIGM_EPSI : H0f1  
F2_D_SIGM_EPSI : H0f2  
F3_D_SIGM_EPSI : H0f3  
F4_D_SIGM_EPSI : H0f4  
C_D_SIGM_EPSI : H0c
```

avec pour l'acier :

H0fi : Coefficient d'écrouissage linéaire de la phase i.

f : fonction de z_y définissant la loi de mélange pour le comportement plastique.

6.3.2 Relation META_P_INL

Cette relation permet de traiter la relation de comportement dans le cas de la plasticité de von Mises avec écrouissage isotrope non linéaire, appliquée à un matériau qui subit des changements de phases métallurgiques. Dans DEFI_MATERIAU en plus de ELAS_META_FO on rentre sous le mot-clé META_TRACTION les courbes $R(r)$.

```
META_TRACTION :  
F1_SIGM :  $R_1(r)$   
F2_SIGM :  $R_2(r)$   
F3_SIGM :  $R_3(r)$   
F4_SIGM :  $R_4(r)$   
C_SIGM :  $R_c(r)$ 
```

6.3.3 Relation META_P_CL

Cette relation permet de traiter la relation de comportement dans le cas de la plasticité de Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire, appliquée à un matériau qui subit des changements de phases métallurgiques. Les phénomènes de plasticité de transformation et de restauration d'écrouissage sont négligés. Les coefficients d'écrouissage sont fournis sous le mot-clé META_ECRO_LINE de l'opérateur DEFI_MATERIAU.

```
/META_ECRO_LINE :  
F1_D_SIGM_EPSI : H0f1  
F2_D_SIGM_EPSI : H0f2  
F3_D_SIGM_EPSI : H0f3  
F4_D_SIGM_EPSI : H0f4  
C_D_SIGM_EPSI : H0c
```

avec pour l'acier:

H0fi : Coefficient d'écrouissage cinématique linéaire de la phase i.

f : fonction de z_y définissant la loi de mélange pour le comportement plastique.

6.3.4 Relation META_P_IL_PT, META_P_INL_PT, META_P_CL_PT

Par rapport à META_P_IL, META_P_INL ou META_P_CL on tient compte en plus de la plasticité de transformation mais on néglige toujours la restauration d'écroissage. En plus des données du mot clé facteur ELAS_META_FO et du mot-clé relatif aux données de l'écroissage, on doit renseigner aussi celles relatives à la plasticité de transformation qui sont fournies sous le mot clé facteur META_PT.

```
/META_PT      : (  F1_D_F_META: F'1          F1_K          : K f1
                  F2_D_F_META: F'2          F2_K          : K f2
                  F3_D_F_META: F'3          F3_K          : K f3
                  F4_D_F_META: F'4          F4_K          : K f4
                )
```

avec pour l'acier :

$$\begin{aligned} F'f1 &= F'_f & Kf1 &= K_f \\ F'f2 &= F'_p & Kf2 &= K_p \\ F'f3 &= F'_b & Kf3 &= K_b \\ F'f4 &= F'_m & Kf4 &= K_m \end{aligned}$$

6.3.5 Relation META_P_IL_RE, META_P_INL_RE et META_P_CL_RE

On tient compte de la restauration d'écroissage mais on néglige la plasticité de transformation. Les données relatives à la restauration d'écroissage sont fournies sous le mot clé facteur META_RE de l'opérateur DEFI_MATERIAU.

```
/ META_RE      : (  C_F1_THETA   :  $\theta_{cf1}$       F1_C_THETA   :  $\theta_{cf2}$ 
                  C_F2_THETA   :  $q_{cf2}$           F2_C_THETA   :  $\theta_{cf2}$ 
                  C_F2_THETA   :  $\theta_{cf2}$           F3_C_THETA   :  $\theta_{cf3}$ 
                  C_F2_THETA   :  $\theta_{cf2}$           F4_C_THETA   :  $\theta_{cf4}$  )
```

avec pour l'acier :

$$\begin{aligned} \theta_{CF1} &= \theta_{\gamma F} & \theta_{F1C} &= \theta_{F\gamma} \\ \theta_{CF2} &= \theta_{\gamma P} & \theta_{F2C} &= \theta_{P\gamma} \\ \theta_{CF3} &= \theta_{\gamma B} & \theta_{F3C} &= \theta_{B\gamma} \\ \theta_{CF4} &= \theta_{\gamma M} & \theta_{F4C} &= \theta_{M\gamma} \end{aligned}$$

6.3.6 Relation META_P_IL_PT_RE, META_P_INL_PT_RE et META_P_CL_PT_RE

On tient compte à la fois des phénomènes de plasticité de transformation et de restauration d'écroissage. Les données des mots clés facteurs ELAS_META_FO, META_PT et META_RE doivent être renseignées.

6.4 Les différentes relations de comportement élasto-viscoplastique

META_V_***

On a de la même façon qu'en plasticité classique, 12 relations de comportement qui sont disponibles selon le type d'érouissage et selon que l'on tienne compte ou pas des phénomènes de plasticité de transformation et/ou de restauration d'érouissage métallurgique. On utilise la même terminologie que dans le cas de la plasticité classique pour différencier les 12 relations élasto-viscoplastiques. Pour chacune des relations on doit renseigner dans ELAS_META ou ELAS_META_FO les limites élastiques d'écoulement visqueuse, à la place des limites d'élasticité apparentes classiques.

F1_SC : σ_{cf}

F2_SC : σ_{cp}

F3_SC : σ_{cb}

F4_SC : σ_{cm}

C_SC : σ_{cy}

SC_MELENAGE : fonction pour la loi des mélanges

au lieu des *_SY pour le cas plastique.

6.4.1 Relation META_V_IL et META_V_INL

Relation de comportement élasto-viscoplastique appliquée à un matériau qui subit des transformations métallurgiques avec érouissage linéaire ou non linéaire. On ne tient pas compte des phénomènes de plasticité de transformation et de restauration d'érouissage métallurgique.

6.4.2 Relation META_V_CL

Relation de comportement élasto-viscoplastique appliquée à un matériau qui subit des transformations métallurgiques avec érouissage cinématique linéaire. On ne tient pas compte des phénomènes de plasticité de transformation et de restauration d'érouissage métallurgique.

6.4.3 Relation META_V_IL_PT, META_V_INL_PT et META_V_CL_PT

Idem que META_P_IL_PT, META_P_INL_PT et META_V_CL_PT mais en viscoplasticité.

6.4.4 Relation META_V_IL_RE, META_V_INL_RE et META_V_CL_RE

Idem que META_P_IL_RE, META_P_INL_RE et META_V_CL_RE mais en viscoplasticité

6.4.5 Relation META_V_IL_PT_RE, META_V_INL_PT_RE et META_V_CL_PT_RE

Idem que META_P_IL_PT_RE, META_P_INL_PT_RE et META_V_CL_PT_RE mais en viscoplasticité

Remarque :

- Pour l'ensemble des relations META_** , les variables internes produites dans le Code_Aster sont :
 - r_i : variables d'érouissage efficace pour les i phases ,
 - d : indicateur de plasticité (0 si le dernier incrément calculé est élastique ; 1 sinon),
 - R : le terme d'érouissage de la fonction seuil
- Par ailleurs, ces modélisations peuvent être réalisées avec la fonctionnalité de réactualisation géométrique PETIT_REAC . Pour les relations à érouissage isotrope, le modèle de grandes déformations SIMO_MIEHE est également disponible.

7 Formulation numérique

On traitera la loi de comportement viscoplastique avec écrouissage isotrope.

7.1 Discrétisation

Connaissant les champs σ, \mathbf{u} et p à l'instant t , on choisit un schéma implicite pour discrétiser en temps les équations du problème continu, sauf pour les paramètres d'écrouissage où l'on utilise les équations [éq 4.2-1].

On remarque qu'avec une discrétisation implicite, seuls deux points différencient les deux types de comportement visco-plastique et plastique indépendant du temps :

- la forme de la fonction de charge, pour laquelle on a un terme complémentaire dans le cas de la viscosité,
- la présence du terme de restauration d'écrouissage dans l'évolution de la variable d'écrouissage pour le cas viscoplastique.

De plus, la plasticité classique incrémentale apparaît comme le cas limite (sans difficulté numérique

associée) de la viscoplasticité incrémentale lorsque
$$\begin{cases} \eta \rightarrow 0 \\ C \rightarrow 0 \\ \sigma_c \rightarrow \sigma_y \end{cases} .$$

Ce type de traitement a déjà été effectué par LORENTZ [bib15].

Si on pose
$$\tilde{f} = f - \eta \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1/n}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} \\ \boldsymbol{\sigma} = A(T) \boldsymbol{\varepsilon}^e \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(Z, T) = Z_\gamma \left[\alpha_\gamma \cdot (T - T^\gamma) - (1 - Z_\gamma^R) \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \right] + \left(\sum_{i=1}^4 Z_i \right) \left[\alpha_f (T - T^\gamma) + Z_\gamma^R \Delta \varepsilon_{f\gamma}^y \right] \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} = \frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \sum_{i=1}^4 K_i F'_i (1 - Z_\gamma) \langle \Delta Z_i \rangle \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \Delta p \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \\ \text{régime élastique : } \tilde{f} < 0 \text{ et } \Delta p = 0 \\ \text{régime (visco)plastique : } \tilde{f} = 0 \text{ et } \Delta p > 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta r_y = \Delta p + \frac{\sum_{k=1}^4 \langle -\Delta Z_k \rangle \theta_{ky} r_k^- - \sum_{k=1}^4 \langle -\Delta Z_k \rangle r_y^-}{1 - \sum_{k=1}^4 Z_k} - (Cr_{moy}^-)^m \quad \text{si } Z_y > 0, \Delta r_y = 0 \text{ si } Z_y = 0 \\ \Delta r_k = \Delta p + \frac{\langle \Delta Z_k \rangle \theta_{yk} r_y^- - \langle \Delta Z_k \rangle r_k^-}{Z_k} - (Cr_{moy}^-)^m \quad \text{si } Z_y > 0, \Delta r_k = 0 \text{ si } Z_k = 0 \end{array} \right.$$

avec :

$$X = X(t + \Delta t)$$

$$X^- = X(t)$$

$$\Delta X = X(t + \Delta t) - X(t)$$

7.2 Algorithme de résolution du problème quasi-statique

Le problème incrémental posé sur la structure est un problème non-linéaire. Sa formulation variationnelle, dans le cas des petites déformations, est de la forme :

Trouver $\Delta \mathbf{u}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^- + \Delta \mathbf{u}), t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \mathbf{L}(t) \quad \forall \mathbf{v} \text{ cinématiquement admissible et } \forall t \\ \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{u}^d(t) \end{array} \right.$$

où : \mathbf{u} désigne le champ de déplacement

$\mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{u}^d(t)$ correspond aux conditions aux limites en déplacement (liaisons cinématiques)

et $\mathbf{L}(t)$ est le travail virtuel des chargements mécaniques à l'instant t .

Dans *Code_Aster*, ce problème non-linéaire est résolu par une méthode de NEWTON [bib6], [bib7]. L'algorithme de résolution comporte :

- une phase de prédiction au début de chaque pas de temps,
- des itérations de Newton à l'intérieur d'un pas de temps.

Nous ne détaillons pas ici l'algorithme mis en œuvre (on se reportera pour cela aux documents de référence [R5.03.01] et [R5.03.02]), mais nous nous attachons à mettre en évidence les modifications apportées au schéma d'intégration par la prise en compte de l'évolution métallurgique $\mathbf{Z}(t)$ et de la plasticité de transformation.

7.2.1 Intégration des relations META_***

On donne l'expression de $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de ;

- $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ (ou $\Delta \mathbf{u}$) inconnue du problème,
- des termes connus tels les variables calculées au pas précédent ($\boldsymbol{\sigma}^-$, variables internes ...), les caractéristiques matériaux, $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$...

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}(T) \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^{tot} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pt}$$

On pose : $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{tot} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{\mu}{\mu^-} \boldsymbol{\sigma}^- + 2\mu (\Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt}) \\ \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = 3K \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{3K}{3K^-} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^- + 3K \text{tr } \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \right.$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mu}{\mu^-} \boldsymbol{\sigma}^- + 2\mu \left(\Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} F(Z, DZ) - \frac{3}{2} \Delta p \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \right)$$

d'où

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{1 + 3\mu F(Z, DZ)} \left(\frac{\mu}{\mu^-} \boldsymbol{\sigma}^- + 2\mu D \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - 3\mu \Delta p \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \right)$$

avec :

- **expression de** $\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} + \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$$

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^-}{2\mu^-} \right) + \frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} F(Z, DZ) + \frac{3}{2} \Delta p \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$$

$$2\mu \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\mu}{\mu^-} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \left((1 + 3\mu F(Z, DZ)) \sigma_{eq} + 3\mu \Delta p \right)$$

on pose : $2\mu \Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\mu}{\mu^-} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^- = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e$

on a : $\sigma_{eq}^e = (1 + 3\mu F(Z, DZ)) \sigma_{eq} + 3\mu \Delta p$

et

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e}{\sigma_{eq}^e} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$$

- **expression de** Δp

Soit la fonction de charge : $f = \frac{\sigma_{eq}^e}{1 + 3\mu F(Z, DZ)} - \bar{R}(r^-; T, Z) - \sigma_c(t, Z)$

$\bar{R}(r^-; T, Z)$ est le terme d'écrouissage $R(r; TZ)$ calculé pour $\Delta p = 0$.

- Si $f < 0$ alors on est en régime élastique et $\Delta p = 0$
- Sinon on est en charge et Δp vérifie ;

$$\eta \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^n = \frac{\sigma_{eq}^e - 3\mu \Delta p}{1 + 3\mu F(Z, DZ)} - \bar{R}(r^-; T, Z) - R_0 \Delta p - \sigma_c(T, Z)$$

Soit la fonction $\tilde{f} = \frac{\sigma_{eq}^e - 3\mu \Delta p}{1 + 3\mu F(Z, \Delta Z)} - \bar{R}(r, Z) - R_0 \Delta p - \sigma_c(T, Z) - \eta \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1/n}$, Δp est donc la solution de l'équation scalaire non linéaire $\tilde{f} = 0$.

La résolution est faite dans Code_Aster par une méthode des sécantes avec intervalle de recherche [bib15].

Remarques :

Dans les cas où la plasticité de transformation n'est pas prise en compte, les expressions obtenues sont les mêmes en prenant $F(Z, \Delta Z) = 0$.

Dans les cas où c'est la restauration d'écroissage qui est négligée alors on a également les mêmes expressions mais en prenant tous les θ égaux à 1.

H_0 est la pente d'écroissage de la courbe de traction. Dans le cas de l'écroissage isotrope non linéaire où la courbe de traction est linéaire par morceaux, H_0 est définie pour le segment auquel p appartient.

7.2.2 Matrice tangente

7.2.2.1 Phase de prédiction - Option RIGI_MECA_TANG

On linéarise le problème continu par rapport au temps, et on détermine $\Delta \mathbf{u}^0$ comme solution du problème en vitesse :

$$\int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^0), t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \dot{\mathbf{L}}(t) \quad \forall \mathbf{v} \text{ cinématiquement admissible}$$

où $\dot{\mathbf{L}}(t) = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma} \dot{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma$

Le problème en vitesse est obtenu en dérivant par rapport au temps les équations du problème continu :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt})$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt} = \frac{3}{2} F(Z, DZ) \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

Dans le cas des modèles élasto-viscoplastiques, on utilise, pour la phase de prédiction, la matrice "élastique" dans le sens où on ne va pas tenir compte du terme $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$. Quant au cas plastique on a :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \begin{cases} \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} & \text{si } \sigma_{eq} - R(T, Z, r) - \sigma_y(T, Z) = 0 \\ 0 & \text{si } \sigma_{eq} - R(T, Z, r) - \sigma_y(T, Z) < 0 \end{cases}$$

La dérivation par rapport au temps de l'équation $\sigma_{eq} - R(T, Z, r) - \sigma_y(T, Z) = 0$ donne l'expression de \dot{p} (relation de consistance).

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dt} - \frac{dR}{dt} - \frac{d\sigma_y}{dt} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{A} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt})}{\sigma_{eq}} - \frac{dR}{dt} - \frac{d\sigma_y}{dt}$$

Remarque :

|La dérivation de A a été négligée dans cette phase de prédiction

$$\begin{aligned} \dot{R}(T, Z_i, \varepsilon_i^{eff}) &= \sum_{i=1}^{i=5} \dot{Z}_i R_{0i} r_i + \sum_{i=1}^{i=5} Z_i \dot{R}_{0i} r_i + \sum_{i=1}^{i=5} Z_i R_{0i} \dot{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^{i=5} \dot{Z}_i R_{0i} r_i + \sum_{i=1}^{i=5} Z_i \dot{R}_{0i} r_i + \sum_{i=1}^{i=5} Z_i R_{0i} \dot{p} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k=4} \langle \dot{Z}_k \rangle R_{0k} \theta_{\gamma k} r_{\gamma} + \sum_{k=1}^{k=4} \langle -\dot{Z}_k \rangle R_{0\gamma} \theta_{k\gamma} r_k \\ &\quad - \sum_{i=1}^{i=5} \langle \dot{Z}_i \rangle R_{0i} r_i \\ &= R_0 \dot{p} + B \end{aligned}$$

$$\dot{\sigma}_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Z} \dot{Z} = C$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{eq}}{dt} - \frac{dR}{dt} - \frac{d\sigma_y}{dt} &= 3\mu \frac{\tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\varepsilon}}}{\sigma_{eq}} - 3\mu \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i (1-Z_\gamma) \langle \dot{Z}_i \rangle \sigma_{eq} - (3\mu + R_0) \dot{p} - B - C = 0 \\ \dot{p} &= \frac{\langle 3\mu \frac{\tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\varepsilon}}}{\sigma_{eq}} - 3\mu \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i (1-Z_\gamma) \langle \dot{Z}_i \rangle \sigma_{eq} - B - C \rangle}{3\mu + R_0} \end{aligned}$$

D'où, finalement l'expression de $\dot{\varepsilon}^{vp}$:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{3}{2(3\mu + H_0)} \langle 3\mu \frac{\tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\varepsilon}}}{\sigma_{eq}} - 3\mu \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i (1-Z_\gamma) \langle \dot{Z}_i \rangle \sigma_{eq} - B - C \rangle \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}$$

$$\text{si } \sigma_{eq} - R(T, Z, \varepsilon_i^{eff}) - \sigma_y(T, Z) = 0$$

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = 0 \text{ si } \sigma_{eq} - R(T, Z, \varepsilon_i^{eff}) - \sigma_y(T, Z) < 0$$

Compte tenu des variations des H_{0i} et σ_y en fonction de la température et de la structure métallurgique, on choisit par commodité de négliger le terme $(B+C)$ et on aboutit donc à une expression de $\dot{\tilde{\sigma}}$ de la forme :

$$\dot{\tilde{\sigma}} = 2\mu \left[\dot{\tilde{\varepsilon}} - \frac{3}{2(3\mu + R_0)} \left\langle 3\mu \frac{\tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\varepsilon}}}{\sigma_{eq}} - \mu \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i (1-Z_\gamma) \langle \dot{Z}_i \rangle \sigma_{eq} \right\rangle \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i (1-Z_\gamma) \langle \dot{Z}_i \rangle \tilde{\sigma} \right]$$

L'expression de $\dot{\tilde{\sigma}}$ dépend du signe du terme (critère de charge-décharge)

$$3\mu \frac{\tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\varepsilon}}}{\sigma_{eq}} - 3\mu \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i (Z_i) \langle \dot{Z}_i \rangle \sigma_{eq} .$$

On approxime $\dot{\tilde{\sigma}}$ par :

$$\dot{\tilde{\sigma}} = 2\mu \left[\dot{\tilde{\varepsilon}} - \frac{9\mu}{2} \frac{\langle \tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle}{(3\mu + R_0)} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}^2} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i (1 - Z_\gamma) \langle \dot{\mathbf{Z}}_i \rangle \tilde{\sigma} \left(1 - d \frac{3\mu}{3\mu + R_0} \right) \right] \quad \text{éq 7.2.2.1-1}$$

avec $d = 1$ si on plastifie et si on est en charge à l'instant t et $d = 0$ dans le cas contraire.

On remarque que $\dot{\tilde{\sigma}}$ est une fonction affine de $\dot{\tilde{\varepsilon}}$. La plasticité de transformation, comme la déformation thermique, engendrent dans le problème en vitesse un second membre.

Celui introduit par la plasticité de transformation est de la forme :

$$\Delta \mathbf{L}^{pt} = \int_{\Omega} 2\mu \left[\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i (1 - Z_\gamma) \langle \dot{\mathbf{Z}}_i \rangle \tilde{\sigma} \left(1 - d \frac{3\mu}{3\mu + R_0} \right) \right] \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega$$

Pour déterminer $\Delta \mathbf{u}^0$, il faut résoudre après discrétisation en espace le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{T}_B \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{u}^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{L}^{th} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{L}^{pt} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Sur des cas tests simples pour lesquels il existe une solution analytique, on a constaté que le fait de négliger le second membre $(\Delta \mathbf{L}^{pt})$ pouvait conduire, pour converger, à un nombre important d'itérations. C'est pourquoi ce terme est pris en compte pour la phase de prédiction.

7.2.2.2 Itérations de Newton - Option FULL_MECA

Dans la méthode de NEWTON, connaissant $\Delta \mathbf{u}^n$, on détermine au mieux $\Delta \mathbf{u}^{n+1}$ vérifiant :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^{n+1})) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^{n+1}), t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega - L(t) \approx 0$$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^{n+1})) \approx \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^n)) + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^n), t)} (\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^{n+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^n)) = 0$$

D'où :

$$\mathbf{K}_n \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^n), t)} \delta \boldsymbol{\varepsilon} = -\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^n))$$

A chaque itération on résout le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_n & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}^n \\ \delta \lambda^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}^n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}^n = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta \mathbf{u}^n), t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega$$

Au cours des itérations d'un pas de temps donné, la méthode de NEWTON utilise donc le calcul de l'opérateur tangent \mathbf{K}_n , qui est donné par la dérivation du problème implicite en fonction de l'incrément de déformation $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$. L'opérateur tangent \mathbf{K}_n peut être recalculé ou non à chaque itération.

On donne l'expression de $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ pour la constitution de la matrice tangente consistante de la méthode itérative de Newton.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{3} \frac{\partial (tr \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Id} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \left(2\mu (\Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pt} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vp}) \right)$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} (\Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{Id} \quad \text{avec} \quad Id_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} (\Delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pt}) = \frac{3}{2} F(Z, DZ) \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \left(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} \right) = \frac{3}{2} \frac{\partial (\Delta p)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} + \Delta p \frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \right)$$

avec

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = 2\mu \mathbf{Id}$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}^e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = 3\mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \right) = \frac{1}{\sigma_{eq}^e} \left(2\mu \mathbf{Id} - 3\mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \right)$$

L'expression de $\frac{\partial (\Delta p)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ est obtenue en dérivant $\tilde{f} = 0$ par rapport à $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, ce qui donne :

$$\frac{\partial (\Delta p)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{3\mu}{3\mu + \left[R_0 + \frac{\eta}{n \Delta t} \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{\frac{1-n}{n}} \right] (1 + 3\mu F(Z, \Delta Z))} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}$$

d'où :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{1 + 3\mu F(Z, \Delta Z)} \left[2\mu \mathbf{Id} \left(1 - \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) - 3\mu^2 \frac{1}{3\mu + \left[R_0 + \frac{\eta}{n \Delta t} \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{\frac{1-n}{n}} \right] (1 + 3\mu F(Z, \Delta Z))} - \frac{\Delta p}{\sigma_{eq}^e} \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}} \right) \right]$$

éq 7.2.2.2-1

7.2.2.3 Opérateur tangent

Soit $\Delta \boldsymbol{\sigma}^* = (\Delta \sigma_{11}^*, \Delta \sigma_{22}^*, \Delta \sigma_{33}^*, \sqrt{2} \Delta \sigma_{12}^*, \sqrt{2} \Delta \sigma_{23}^*, \sqrt{2} \Delta \sigma_{13}^*)$ l'accroissement virtuel de contrainte et soit $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^* = (\Delta \varepsilon_{11}^*, \Delta \varepsilon_{22}^*, \Delta \varepsilon_{33}^*, \sqrt{2} \Delta \varepsilon_{12}^*, \sqrt{2} \Delta \varepsilon_{23}^*, \sqrt{2} \Delta \varepsilon_{13}^*)$ l'accroissement virtuel de déformation, l'opérateur qui lie $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^*$ à $\Delta \boldsymbol{\sigma}^*$ est donné par l'expression suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{\sigma}_{ij}^* = \left[\frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{c_p}{a} \tilde{\sigma}_{ij}^e \tilde{\sigma}_{kl}^e \right] \Delta \tilde{\varepsilon}_{kl}^* \\ tr(\Delta \boldsymbol{\sigma}^*) = 3K tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^*) \end{array} \right.$$

avec

$$a = \begin{cases} 1 & \text{au début de chaque pas de temps (cf. [éq 7.2.2.1-1]) (option 'RIGI_MECA_TANG')} \\ 1 + 3\mu F(Z, \Delta Z) & \text{lors des itérations courantes (cf. [éq 7.2.2.2-1]) (option 'FULL_MECA')} \end{cases}$$

$$c_3 = \begin{cases} 0 & \text{au début de chaque pas de temps} \\ 1 & \text{lors des itérations courantes} \end{cases}$$

$$\text{et } c_p = \begin{cases} c_1 \frac{(3\mu)^2}{(\sigma_{eq}^e)^2} \frac{1}{3\mu + R_0} & \text{au début de chaque pas de temps} \\ c_2 \frac{(3\mu)^2}{(\sigma_{eq}^e)^2} \left[\frac{1}{3\mu + \left(R_0 + \frac{\eta}{n \Delta t} \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1-n/n} \right) (1 + 3\mu F(Z, \Delta Z))} - \frac{\Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right] & \text{lors des itérations} \end{cases}$$

où :

$$c_1 = \begin{cases} 1 & \text{si élasto-plastique et } 3\mu \frac{\tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\sigma}}}{\sigma_{eq}} - 3\mu \sum_{i=1}^{i=4} K_i F'_i (1 - Z_\gamma) \langle \dot{Z}_i \rangle \sigma_{eq} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$c_2 = \begin{cases} 1 & \text{si on est en charge } (\tilde{\sigma} : \delta \tilde{\epsilon} \geq 0) \text{ et si on plastifie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons alors \mathbf{K} l'opérateur tel que $\Delta \sigma^* = \mathbf{K} \Delta \epsilon^*$

et soit \mathbf{s} le vecteur du déviateur des contraintes : $\mathbf{s} = (\sigma_{11}^{\sim}, \sigma_{22}^{\sim}, \sigma_{33}^{\sim}, \sqrt{2} \sigma_{12}^{\sim}, \sqrt{2} \sigma_{23}^{\sim}, \sqrt{2} \sigma_{13}^{\sim})$

$$\frac{d \Delta \sigma^*}{d \Delta \epsilon^*} = \frac{d \Delta \tilde{\sigma}^*}{d \Delta \epsilon^*} + \mathbf{K} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$$

$$\frac{d \Delta \tilde{\sigma}^*}{d \Delta \epsilon^*} = \frac{d \Delta \tilde{\sigma}^*}{d \Delta \epsilon^*} \left(\mathbf{Id} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right)$$

$$\frac{d \Delta \tilde{\sigma}^*}{d \Delta \epsilon^*} = \frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) \mathbf{Id} - \frac{c_p}{a} \sigma \otimes \sigma$$

d'où :

$$\frac{d \Delta \sigma^*}{d \Delta \epsilon^*} = \frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) \left(\mathbf{Id} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - \frac{c_p}{a} \sigma \otimes \sigma + \mathbf{K} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$$

L'opérateur \mathbf{K} s'écrit :

$$K_{11} = \left(K + \frac{2}{3} \left[\frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) \right] - \frac{c_p}{a} s_1 s_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 K_{22} &= \begin{pmatrix} K - \frac{1}{3} \left[\frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) \right] - \frac{c_p}{a} s_1 s_2 \\ K + \frac{2}{3} \left[\frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) \right] - \frac{c_p}{a} s_2 s_2 \end{pmatrix} \\
 K_{33} &= \begin{pmatrix} K - \frac{1}{3} \left[\frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) \right] - \frac{c_p}{a} s_1 s_3 \\ K - \frac{1}{3} \left[\frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) \right] - \frac{c_p}{a} s_2 s_3 \\ K + \frac{2}{3} \left[\frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) \right] - \frac{c_p}{a} s_3 s_3 \end{pmatrix} \\
 K_{44} &= \begin{pmatrix} -\frac{c_p}{a} s_1 s_4 \\ -\frac{c_p}{a} s_2 s_4 \\ -\frac{c_p}{a} s_3 s_4 \\ \frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) - \frac{c_p}{a} s_4 s_4 \end{pmatrix} \\
 K_{55} &= \begin{pmatrix} -\frac{c_p}{a} s_1 s_5 \\ -\frac{c_p}{a} s_2 s_5 \\ -\frac{c_p}{a} s_3 s_5 \\ -\frac{c_p}{a} s_4 s_5 \\ \frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) - \frac{c_p}{a} s_5 s_5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$K_{66} = \begin{pmatrix} -\frac{c_p}{a} s_1 s_6 \\ -\frac{c_p}{a} s_2 s_6 \\ -\frac{c_p}{a} s_3 s_6 \\ -\frac{c_p}{a} s_4 s_6 \\ -\frac{c_p}{a} s_5 s_6 \\ \frac{2\mu}{a} \left(1 - c_3 \frac{3\mu \Delta p}{\sigma_{eq}^e} \right) - \frac{c_p s_6 s_6}{a} \end{pmatrix}$$

où les " i " composants du vecteur K_{ii} correspondent aux " i " termes de la partie supérieure de la i ème colonne de la matrice symétrique \mathbf{K}

On remarque que l'opérateur \mathbf{K}_0 et l'opérateur \mathbf{K}_n sont différents. La plasticité de transformation n'intervient pas de la même façon dans le calcul des deux opérateurs.

Remarques :

Ces différents termes ont été obtenus en développant le cas avec écrouissage isotrope mais on obtient la même chose pour le cas de l'écrouissage cinématique, R_0 est alors remplacé par le coefficient d'écrouissage cinématique H_0 .

8 Bibliographie

- 1 F. WAECKEL : Eléments de métallurgie pour l'étude des transformations structurales dans les aciers - Note EDF-DER HI-71/8075.
- 2 S. ANDRIEUX, F. WAECKEL : Modélisation thermique Métallurgique et Mécanique d'une opération de soudage - Etude Bibliographique. Note interne EDF-DER HI-71/7595.
- 3 S. ANDRIEUX, F. WAECKEL : Une loi de comportement thermo-métallurgique au refroidissement pour les aciers faiblement alliés. Note interne EDF-DER HI-71/7459.
- 4 P. MIALON : Eléments d'analyse et de résolution numérique des relations de l'élasto-plasticité, E.D.F. Bulletin de la D.E.R., série C, n°3 (ISSN 013-4511).
- 5 A.M. DONORE, F. WAECKEL : Influence des transformations structurales dans les lois de comportement élasto-plastique, Note E.D.F-D.E.R HI 74/93/024.
- 6 P. MIALON, J.P. LEFEBVRE : Algorithme non linéaire quasi-statique, Note E.D.F-D.E.R. HI-75/7832 [R5.03.01].
- 7 P. MIALON : Intégration des relations de comportement élasto-plastique dans le Code Aster, Note interne E.D.F-D.E.R. HI-75/7833 [R5.03.02].
- 8 J.B. LEBLOND, G. MOTTET, J.C. DEVAUX (1986) : A theoretical (and numerical) approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations. Derivation of general equations. Journal of the Mechanics and Physics Solids, Vol. 34, n°4 pp. 395-406.

- 9 J.B. LEBLOND, G. MOTTET, J.C. DEVAUX (1986) : A theoretical (and numerical) approach to the plastic behaviour of steels during phase transformations. Study of classical plasticity for ideal plastic phases. Journal of the Mechanics and Physics Solids, Vol. 34, n°4 pp. 411-432.
- 10 J.B. LEBLOND, J. DEVAUX , J.C. DEVAUX (1989) : Mathematical modelling of transformation plasticity in steels. Case of ideal plastic phases. International Journal of Plasticity, Vol. 5, pp. 551-572.
- 11 J.B. LEBLOND (1989) : Mathematical modelling of transformation plasticity in steels. Coupling with strain hardening phenomena. International Journal of Plasticity, Vol. 5, pp. 573-591.
- 12 Y. DESALOS (1981) : Rapport IRSID n° 9534901 MET44.
- 13 S. SJÖSTRÖM (1987) : The problem of calculating quench stresses. Swedish symposium on residual stresses, Sunne 1987, pp. 131-159.
- 14 A. RAZAKANAIVO (1997) : Introduction dans le *Code_Aster* d'un modèle de comportement élasto-viscoplastique prenant en compte la métallurgie. Note HI-74/97/020/0.
- 15 E. LORENTZ (1997) : Formulation numérique de la loi de comportement viscoplastique de Taheri. Note EDF-DER HI-74/97/019/A [R5.03.05].
- 16 A. RAZAKANAIVO (2000) : Opérateur `CALC_META`, Document d'utilisation *Code_Aster* [U4.85.01].
- 17 A. RAZAKANAIVO (2000) : Introduction du modèle EDGAR dans le *Code_Aster*. Note HI-74/00/013/A.

9 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	F.WAECKEL	Version initiale
...
6 3	A. RAZAKANAIVO , A.M. DONORE, F. WAECKEL EDF-R&D/AMA	Cinquième version du document