

Éléments vibro-acoustiques

Résumé :

Les éléments décrits ici permettent de réaliser des calculs des fréquences et de modes propres d'une structure couplée à un fluide. Ils permettent également le calcul de réponse acoustique.

Après la formulation du problème de couplage fluide-structure, ce document décrit la démarche suivie pour implémenter dans *Code_Aster* les nouveaux éléments finis.

Table des matières

1 Introduction.....	3
2 Le couplage vibro-acoustique.....	4
2.1 Présentation.....	4
2.2 Formulation du problème vibro-acoustique.....	4
2.2.1 Description de la structure.....	4
2.2.1.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement.....	5
2.2.1.2 Relation de compatibilité.....	5
2.2.1.3 Loi de comportement en élasticité linéaire isotrope.....	5
2.2.2 Description du fluide.....	5
2.2.2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement.....	5
2.2.2.2 Équation de conservation de la masse.....	5
2.2.2.3 Loi de comportement.....	6
2.2.2.4 Équation de propagation des ondes ou équation de Helmholtz.....	6
2.2.3 Description de l'interaction fluide-structure.....	6
2.2.4 Formulation du problème couplé.....	6
2.3 Équations variationnelles associées au problème.....	7
2.3.1 Équations variationnelles associées à la structure.....	7
2.3.2 Équation variationnelle associée à l'équation du fluide.....	7
2.4 Discrétisation par éléments finis.....	8
2.5 Choix d'une variable supplémentaire pour la description du fluide.....	8
2.5.1 Formulation du nouveau problème.....	8
2.5.2 Formulation variationnelle associée au problème (P').....	8
2.6 Discrétisation par éléments finis.....	9
2.7 Calculs de réponse acoustique.....	9
2.7.1 Vitesse imposée au fluide.....	10
2.7.2 Impédance imposée sur une paroi du fluide.....	10
2.7.3 Discrétisation par éléments finis.....	11
3 Intégration dans Aster.....	11
4 Bibliographie.....	12
5 Description des versions du document.....	12

1 Introduction

Le comportement vibratoire d'une structure est souvent modifié si celle-ci est en présence d'un fluide : c'est ce qu'on appelle le couplage vibro-acoustique. On distingue les cas de couplage en deux catégories : soit le fluide est infini (c'est le cas des structures immergées), soit le fluide est contenu dans un milieu borné (c'est le cas des réservoirs plus ou moins remplis de fluide).

Les éléments finis décrits ici permettent de résoudre les problèmes de couplage avec un fluide de dimension finie.

Notations générales :

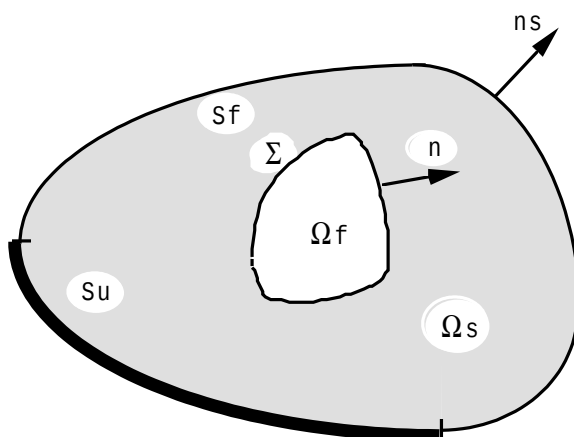
P :	pression totale instantanée en un point du fluide,
p_0 :	pression au repos,
p :	pression acoustique,
ρ_t :	masse volumique totale instantanée en un point du fluide,
ρ_0 :	masse volumique du fluide au repos,
ρ :	masse volumique acoustique,
ρ_S :	masse volumique de la structure,
$\mathbf{u}_f$:	déplacement acoustique,
$\mathbf{u}$:	déplacement de la structure,
Φ :	gradient des déplacements acoustiques,
ω, f :	pulsation, fréquence,
c :	célérité du son dans le fluide,
λ, k :	longueur d'onde, nombre d'onde,
σ :	tenseur des contraintes de la structure,
ε :	tenseur des déformations de la structure,
C :	tenseur d'élasticité de la structure,
T :	tenseur des contraintes du fluide.

2 Le couplage vibro-acoustique

2.1 Présentation

Soit une structure élastique définie dans un domaine Ω_s qui vibre en présence d'un fluide parfait, non pesant, compressible, en évolution isentropique défini dans un domaine Ω_f . On désigne par $\Sigma = \Sigma_f \cap \Sigma_s$, leur surface commune.

On note n , la normale extérieure au domaine fluide Ω_f .



A un instant donné, l'état du fluide est défini par son champ de pression P et celui de la structure par son champ de déplacement $\mathbf{U}$.

On considère que le système couplé est soumis à de petites perturbations autour de son état d'équilibre où le fluide et la structure sont au repos.

Ainsi :

$$P = p_0 + p$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} \quad (\mathbf{u}_0 = \mathbf{0})$$

Le problème d'interaction fluide-structure consiste alors à résoudre simultanément deux problèmes :

- l'un dans la structure soumise, sur Σ , à un champ de pression p imposé par le fluide
- l'autre dans le fluide soumis à un champ de déplacement $\mathbf{u}$ de la paroi Σ .

2.2 Formulation du problème vibro-acoustique

2.2.1 Description de la structure

Hypothèse :

La structure est homogène et obéit aux lois de l'élasticité linéaire.

Compte tenu de cette hypothèse, on peut écrire les différentes équations suivantes gouvernant l'état de la structure [bib2].

2.2.1.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit, en l'absence de forces volumiques autres que les forces d'inertie :

$$\sigma_{ij,j} - \rho_s \frac{d^2 u_i}{dt^2} = 0 \quad [\text{éq 2.2.1.1-1}]$$

où : ρ_s est la masse volumique de la structure,
 $\mathbf{u}$ est le déplacement,
 σ_{ij} est le tenseur des contraintes.

2.2.1.2 Relation de compatibilité

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad [\text{éq 2.2.1.2-1}]$$

où ε_{kl} est le tenseur des déformations.

2.2.1.3 Loi de comportement en élasticité linéaire isotrope

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad [\text{éq 2.2.1.3-1}]$$

avec les modules d'élasticité C_{ijkl} vérifiant les identités : $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{jilk}$
 C étant le tenseur d'élasticité.

2.2.2 Description du fluide

Hypothèse : le fluide obéit aux lois de l'acoustique linéaire.

Compte tenu de cette hypothèse, les équations gouvernant l'état du fluide sont :

2.2.2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit, en l'absence de sources :

$$T_{ij,j} - \rho_0 \frac{d^2 u_{fi}}{dt^2} = 0 \quad [\text{éq 2.2.2.1-1}]$$

où : T_{kl} est le tenseur des contraintes dans le fluide,
 ρ_0 est la masse volumique du fluide à l'état naturel,
 x est le champ de déplacement d'une particule de fluide.

2.2.2.2 Équation de conservation de la masse

Au premier ordre et en l'absence de sources acoustiques, elle s'exprime par la relation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \right) = 0 \quad [\text{éq 2.2.2.2-1}]$$

2.2.2.3 Loi de comportement

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} \quad [\text{éq 2.2.2.3-1}]$$

Le fluide est supposé en évolution barotrope (la pression p est, pour le fluide donné, une fonction connue de la seule masse volumique) $p = p(c_0^2)$;
où c_0 est la célérité du son dans le fluide au repos.

2.2.2.4 Équation de propagation des ondes ou équation de Helmholtz

On la déduit par combinaison des équations de conservation de la masse [éq 2.2.2.2-1] et de la quantité de mouvement [éq 2.2.2.1-1] écrites en régime harmonique, à la pulsation ω :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad [\text{éq 2.2.2.4-1}]$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde.

2.2.3 Description de l'interaction fluide-structure

À l'interface fluide-structure (Σ), le fluide étant non visqueux, il n'adhère pas à la paroi. On écrit donc :

- la continuité des contraintes normales :

$$\sigma_{ij} \cdot n_i = T_{ij} \cdot n_i = -p \delta_{ij} \cdot n_i \quad [\text{éq 2.2.3-1}]$$

- la continuité des vitesses normales :

$$\frac{du_i}{dt} \cdot n_i = \frac{dx_i}{dt} \cdot n_i \quad [\text{éq 2.2.3-2}]$$

2.2.4 Formulation du problème couplé

En définitive, la formulation du problème de vibro-acoustique en termes de déplacements pour la structure et de pression dans le fluide conduit aux équations du problème harmonique (P) :

$$C_{ijkl} \cdot u_{k,lj} + \omega^2 \rho_S u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_S \quad [\text{éq 2.2.4-1}]$$

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{dans } \Omega_f$$

$$C_{ijkl} \cdot u_{k,l} \cdot n_i = -p \delta_{ij} \cdot n_i \quad \text{sur } \Sigma$$

$$u_i \cdot n_i = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{sur } \Sigma$$

2.3 Équations variationnelles associées au problème

On résout le problème couplé en utilisant la méthode des éléments finis à partir de la formulation faible du problème.

2.3.1 Équations variationnelles associées à la structure

Soit δu , cinématiquement admissible dans Ω_S , l'équation [eq 2.2.4-1] peut s'écrire sous la forme intégrale :

$$\int_{\Omega_S} [C_{ijkl} \cdot u_{k,l} \delta u_i + \omega^2 \rho_S u_i \delta u_i] dV = 0$$

Après intégration par partie, on obtient la formulation faible :

$$\int_{\Omega_S} [C_{ijkl} \cdot u_{k,l} \delta u_{i,j} - \omega^2 \rho_S u_i \delta u_i] dV - \int_{\Sigma} C_{ijkl} \delta u_i \delta u_{k,l} \cdot n_i^S dS = 0$$

Soit, si l'on prend en compte la condition aux limites [eq 2.2.3 - 1] :

$$\int_{\Omega_S} [C_{ijkl} \cdot u_{k,l} \delta u_{i,j} - \omega^2 \rho_S u_i \delta u_i] dV - \int_{\Sigma} p \delta u_i \cdot n_i dS = 0 \quad [\text{eq 2.3.1-1}]$$

2.3.2 Equation variationnelle associée à l'équation du fluide

Soit δp , cinématiquement admissible dans Ω_f . On écrit sous forme variationnelle l'équation [eq 2.2.2.4-1] :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} [\Delta p \delta p + k^2 p \delta p] dV &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega_f} \text{div}(\delta p \cdot \nabla p) dV - \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla \delta p dV + k^2 \int_{\Omega_f} p \delta p dV &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Sigma_f} \delta p \cdot \frac{dp}{\partial n} dS - \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla \delta p dV + k^2 \int_{\Omega_f} p \delta p dV &= 0 \end{aligned}$$

Soit, si l'on prend en compte la condition aux limites [eq 2.2.3-1]

$$\frac{1}{\rho_0 \omega^2} \int_{\Omega_f} [\nabla p \cdot \nabla \delta p - k^2 p \delta p] dV - \int_{\Sigma} u_n \cdot \delta p dS = 0 \quad [\text{eq 2.3.2-1}]$$

2.4 Discrétisation par éléments finis

L'approximation par éléments finis du problème complet conduit alors au système :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C}^T & \frac{\mathbf{H}}{\rho_0 \omega^2} - \frac{\mathbf{Q}}{\rho_0 c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ p \end{bmatrix} = 0$$

soit

$$\begin{bmatrix} K & -C \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho_0 C^T & \frac{Q}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = 0$$

où : $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ sont les matrices de raideur et de masse de la structure,
 $\mathbf{H}$ et $\mathbf{Q}$ sont les matrices fluides obtenues respectivement à partir des formes bilinéaires :

$$\int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \nabla \delta p dV \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_f} p \cdot \delta p dV$$

$\mathbf{C}$ est la matrice de couplage obtenue à partir de la forme bilinéaire $\int_{\Sigma_f} p \cdot u_n dS$.

Le choix de la formulation conduit à un système matriciel non symétrique ce qui ne permet pas d'utiliser les algorithmes de résolution classiques.

2.5 Choix d'une variable supplémentaire pour la description du fluide

2.5.1 Formulation du nouveau problème

Pour obtenir un problème symétrique, on associe à la variable de pression, une variable supplémentaire. Cette nouvelle variable est, soit le potentiel de déplacement du fluide Φ tel que $\mathbf{u}_f = \text{grad } \Phi$ [bib1], [bib4], [bib5], soit la variable π [bib3] telle que $\pi = -\rho \cdot \Phi$. La variable π permet de prendre en compte directement les fluides à masse volumique variable. Cependant, elle ne représente rien physiquement. C'est pourquoi, on lui préfère le potentiel des déplacements.

On remplace donc le déplacement $\mathbf{u}_f$ du fluide par $\text{grad } \Phi$ dans les équations du problème (P) [§ 2.2.4]. On obtient ainsi le nouveau problème à résoudre (P') :

$C_{ijkl} \cdot u_{k,lj} + \omega^2 \rho_s u_i = 0$ dans Ω_s	
$\rho_0 \omega^2 \Delta \Phi + k^2 p = 0$ dans Ω_f	[éq 2.5.1-1]
$p = \rho_0 \omega^2 \Phi$ dans Ω_f	[éq 2.5.1-2]
$C_{ijkl} \cdot u_{k,l} \cdot n_i = -\rho_0 \omega^2 \Phi \delta_{ij} \cdot n_j$ sur Σ	[éq 2.5.1-3]
$u_i \cdot n_i = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ sur Σ	[éq 2.5.1-4]

2.5.2 Formulation variationnelle associée au problème (P')

On applique à l'équation [éq 2.5.1-1] la formule de GREEN :

$$\int_{\Omega_f} [\rho_0 \omega^2 \Delta \Phi + k^2 p] \Psi dV = 0 \quad \forall \Psi \text{ c.a.}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega_f} [k^2 p \Psi - \rho_0 \omega^2 \text{grad } \Psi \text{ grad } \Phi] dV + \int_{\Sigma_f} \Psi \rho_0 \omega^2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0 \quad \forall \Psi \text{ c.a.}$$

Soit, si l'on prend en compte la condition aux limites [éq 2.5.1-3]

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega_f} \frac{p \Psi}{\rho_0 c^2} dV - \int_{\Omega_f} \text{grad } \Phi \text{ grad } \Psi dV + \int_{\Sigma} \Psi u_n dS = 0 \quad \forall \Psi \text{ c.a.} \quad [\text{éq 2.5.2 - 1}]$$

De plus, on écrit sous forme faible l'équation [éq 2.5.1 - 2] pour $\forall q \text{ c.a.}$,

$$\int_{\Omega_f} (p - \rho_0 \omega^2 \Phi) q dV = 0 \Leftrightarrow \forall q \text{ c.a.} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{\rho_0 c^2} dV - \omega^2 \int_{\Omega_f} \frac{\Phi q}{c^2} dV = 0 \quad [\text{éq 2.5.2 - 2}]$$

En sommant les équations [éq 2.5.2 - 1] et [éq 2.5.2 - 2], on obtient l'équation variationnelle associée au fluide :

$$\int_{\Omega_f} \frac{pq}{\rho_0 c^2} dV - \rho_0 \omega^2 \left[\int_{\Omega_f} \frac{\Phi q + p \Psi}{\rho_0 c^2} dV - \int_{\Omega_f} \frac{\text{grad } \Phi \text{ grad } \Psi}{\rho_0 c^2} dV + \int \Psi u_n dS \right] = 0$$

$\forall (q, \Psi) \text{ c.a.} \quad [\text{éq 2.5.2 - 3}]$

2.6 Discrétisation par éléments finis

En procédant avec la même démarche que celle utilisée dans [§ 2.3], on est conduit au système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{M}_f}{\rho_0 c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ p \\ \Phi \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \rho_0 \mathbf{M}_\Sigma \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{M}_f}{c^2} \\ \rho_0 \mathbf{M}_\Sigma^T & \frac{\mathbf{M}_f^T}{c^2} & \rho_0 \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ p \\ \Phi \end{bmatrix} = 0$$

$\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ étant respectivement les matrices de raideur et de masse de la structure,
 $\mathbf{M}_\Sigma$ étant la matrice de couplage fluide-structure obtenue à partir de la forme bilinéaire :

$$\int_{\Sigma} \Phi u dS$$

et

$\mathbf{M}_f$, $\mathbf{M}_f$, $\mathbf{H}$ étant les matrices fluides, respectivement obtenues à partir des formes bilinéaires :

$$\int_{\Omega_f} p^2 dV, \int_{\Omega_f} p \Phi dV \text{ et } \int_{\Omega_f} (\text{grad } \Phi)^2 dV$$

2.7 Calculs de réponse acoustique

2.7.1 Vitesse imposée au fluide

Sur une partie Σ_v de la frontière fluide Σ_f , on peut imposer une condition limite de type vitesse normale v_0 .

Le terme de bord du fluide s'écrit alors :

$$-\rho_0 \omega^2 \int_{\Sigma_f} \Psi \cdot u_n ds = -\rho_0 \omega^2 \int_{\Sigma_f - \Sigma_z} \Psi \cdot u_n ds + i \omega \rho_0 \int_{\Sigma_v} \Psi v_0 ds$$

2.7.2 Impédance imposée sur une paroi du fluide

Sur une partie Σ_z de la frontière fluide Σ_f , on peut imposer une condition limite de type impédance Z :

$$p = Z v_n$$

où v_n est la vitesse normale sortante du fluide.

En reportant cette condition dans l'équation traduisant la conservation de la quantité de mouvement [eq 2.2.2.1 - 1] et en tenant compte de la loi de comportement du fluide [eq 2.2.2.3 - 1], on a :

$$\text{grad } p + \frac{\rho_0}{z} \dot{p} = 0 \quad [\text{eq 2.7.2 - 1}]$$

Pour conserver la symétrie du système, on exprime l'équation [eq 2.7.2 - 1] en fonction du potentiel de déplacement du fluide Φ , on a :

$$\text{grad } \ddot{\Phi} + \frac{\rho_0}{z} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = 0$$

Soit, en harmonique :

Le terme de bord du fluide s'écrit alors :

$$\rho_0 \omega^2 \int_{\Sigma_f} \Psi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \rho_0 \omega^2 \int_{\Sigma_f - \Sigma_z} \Psi \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds + i \omega^3 \int_{\Sigma_v} \frac{\rho_0^2}{z} \Phi \Psi ds$$

En définitive, imposer une impédance sur une paroi du fluide revient à introduire dans le système un terme d'amortissement.

2.7.3 Discrétisation par éléments finis

Si l'on impose des conditions limites de type vitesse imposée ou impédance de paroi imposée au fluide, on est conduit à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{M}_f}{\rho_0 c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \rho_0 \mathbf{M}_\Sigma \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{M}_{fl}}{c^2} \\ \rho_0 \mathbf{M}_\Sigma^T & \frac{\mathbf{M}_{fl}^T}{c^2} & \rho_0 \mathbf{H} \end{bmatrix} + i\omega^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_0^2}{Z} \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i\omega \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}$ étant la matrice obtenue à partir de la forme bilinéaire : $\int_{\Sigma_z} \Phi^2 dS$ et $\mathbf{V}$, le vecteur obtenu à partir de $\int_{\Sigma_v} \rho_0 v_0 \Phi dS$.

3 Intégration dans Aster

Les éléments décrits précédemment appartiennent, pour la partie fluide, à la modélisation '3D_FLUIDE' du phénomène MECANIQUE et, pour l'interface fluide-structure, à la modélisation 'FLUI_STRU' du même phénomène.

Ils conduisent à des éléments volumiques ou surfaciques, pour la partie fluide, en pression-potentiel de déplacement et à des éléments surfaciques pour l'interface fluide-structure en potentiel de déplacement du fluide-déplacement de la structure.

4 Bibliographie

- 1) T. BALANNEC, S. COURTIER-ARNOUX, E. LUZZATO, P. THOMAS : Confrontation d'outils numériques du département AMV sur un test de couplage fluide-structure. Rapport interne E.D.F. D.E.R. HP-61/91.012.
- 2) P. GERMAIN : Introduction à la mécanique des milieux continus. Masson.
- 3) R.J. GIBERT : Vibrations des structures. Interactions avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires. Collection de la Direction des Etudes et Recherche d'E.D.F. n°69.
- 4) R. OHAYON, R. VALID : True symmetric formulations of free vibrations of fluid-structure interaction. Applications and extensions. International conference on numerical method for coupled systems.
- 5) P. THOMAS : Formulation de couplage fluide-structure pour l'analyse modale dans SIVA. Application aux éléments tridimensionnels. Rapport interne E.D.F. D.E.R. HP-35.82/259.

5 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
2.3	Fe.Waeckel EDF/DER/EP/AMV	Texte initial