

Élément de poutre multifibre (droite)

Résumé :

Ce document présente les éléments de poutre multifibre de *Code_Aster* basés sur une résolution d'un problème de poutre pour lequel chaque section d'une poutre est divisée en plusieurs fibres. Chaque fibre se comporte alors comme une poutre d'Euler. Plusieurs matériaux peuvent être affectés sur un seul support élément fini (SEG2) ce qui évite d'avoir à dupliquer les mailles (acier + béton, par exemple).

Les poutres sont droites (élément `POU_D_EM`). La section peut être de forme quelconque, décrite par un « maillage de fibres », voir [U4.26.01].

Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- hypothèse d'Euler : le cisaillement transverse est négligé (cette hypothèse est vérifiée pour de forts élancements),
- les éléments de poutre multifibre prennent en compte les effets de la dilatation thermique, du séchage et de l'hydratation (termes du second membre) et de manière simplifiée la torsion. Le couplage effort-normal flexion est traité naturellement, par intégration dans la section des réponses uniaxiales des modèles de comportement associés à chaque groupe de fibres. Un enrichissement de la déformation axiale, résolu par condensation locale dans le cas de comportements non linéaires, permet de bons résultats numériques, quelle que soit l'évolution dans l'épaisseur du centroïde de la section.

Table des matières

1 Introduction.....	4
2 Élément de théorie des poutres (rappels).....	5
3 Les équations du mouvement des poutres.....	6
4 Élément de poutre droite multifibre.....	6
4.1 Élément poutre de référence.....	6
4.2 Détermination de la matrice de rigidité de l'élément multifibre.....	8
4.2.1 Cas général (poutre d'Euler).....	8
4.2.2 Cas de la poutre multifibre.....	9
4.2.3 Discrétisation de la section en fibres – Calcul de	12
4.2.4 Intégration dans le cas élastique linéaire (RIGI_MECA).....	12
4.2.5 Intégration dans le cas non-linéaire (RIGI_MECA_TANG).....	14
4.3 Détermination de la matrice de masse de l'élément multifibre.....	15
4.3.1 Détermination de	15
4.3.2 Discrétisation de la section en fibres - Calcul de	17
4.4 Calcul des forces internes.....	17
4.5 Formulation enrichie en déformation.....	19
4.5.1 Méthode des modes incompatibles.....	19
4.5.2 Implantation numérique.....	20
4.5.3 Mise en garde.....	22
4.6 Modèles de comportement non linéaires utilisables.....	23
5 Cas d'application.....	23
6 Bibliographie.....	23
7 Description des versions du document.....	24

Notations

On donne la correspondance entre les notations de ce document et celles de la documentation d'utilisation.

DX, DY, DZ et DRX, DRY, DRZ sont en fait les noms des degrés de liberté associés aux composantes du déplacement $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$.

E	module de Young	E
ν	coefficient de Poisson	NU
G	module de Coulomb = $\frac{E}{2(1+\nu)}$	G
I_y, I_z	moments géométriques de flexion par rapport aux axes y, z	IY, IZ
J_x	constante de torsion	JX
\mathbf{K}	matrice de rigidité	
M	matrice de masse	
M_x, M_y, M_z	moments autour des axes x, y, z	MT, MFY, MFZ
N	effort normal à la section	N
S	aire de la section	A
u, v, w	translations sur les axes x, y, z	DX, DY, DZ
V_y, V_z	efforts tranchants suivant les axes y, z	VY, VZ
ρ	masse volumique	RHO
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	rotations autour des axes x, y, z	DRX, DRY, DRZ
q_x, q_y, q_z	efforts linéiques extérieurs	

1 Introduction

L'analyse des structures soumises à un chargement dynamique nécessite des modèles de comportement capables de représenter les non-linéarités du matériau.

De nombreux modèles analytiques ont été proposés. Ils peuvent être classés selon deux groupes :

- des modèles détaillés fondés sur la mécanique du solide et leur description du comportement local du matériau (approche microscopique) et
- des modèles fondés sur une modélisation globale du comportement (approche macroscopique).

Dans le premier type de modèles, nous pouvons trouver les modèles classiques aux éléments finis ainsi que les modèles de type "fibre" (ayant un élément de type poutre comment support).

Tandis que les modèles « classiques » aux éléments finis sont des outils puissants pour la simulation du comportement non linéaire des parties complexes des structures (joints, assemblages, ...), leur application à la totalité d'une structure peut s'avérer peu pratique à cause d'un temps de calcul prohibitif ou de la taille mémoire nécessaire à la réalisation de ce calcul. Par contre, une modélisation de type poutre multifibre (voir [Figure 1-a]), possède les avantages des hypothèses simplificatrices d'une cinématique de type poutre d'Euler - Bernoulli tout en offrant une solution pratique et efficace pour une analyse non linéaire complexe d'éléments de structures composites tels que ceux que l'on peut rencontrer par exemple en béton armé.

De plus, cette modélisation "intermédiaire" est relativement robuste et peu coûteuse en temps calcul du fait de l'utilisation de modèles de comportement non linéaires 1D.

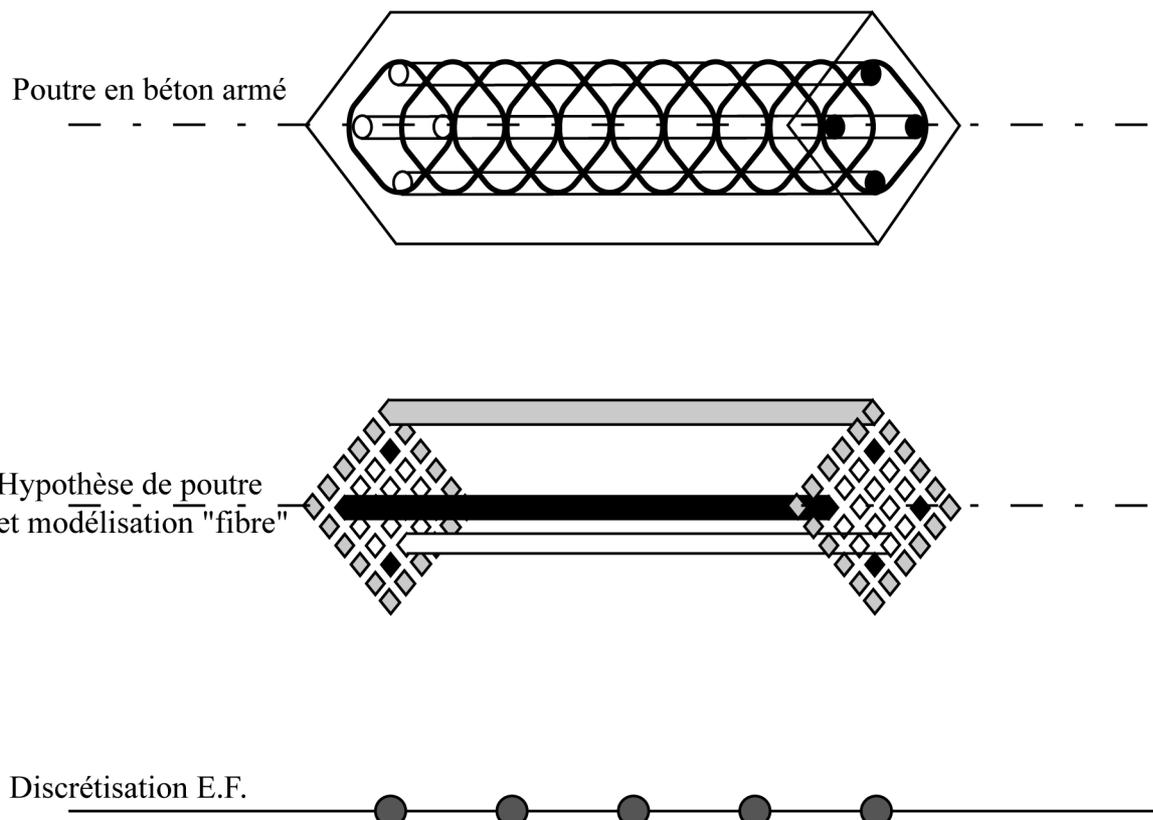


Figure 1-1 : Description d'une modélisation de type poutre multifibre

2 Élément de théorie des poutres (rappels)

On reprend ici les éléments développés dans le cadre des éléments de poutre d'Euler, [bib4].

Une poutre est un solide engendré par une surface d'aire S dont le centre d'inertie géométrique G décrit une courbe C appelée la fibre moyenne ou fibre neutre. L'aire S est la section droite (section transversale) ou profil, et l'on suppose que si elle est évolutive, ses évolutions (taille, forme) sont continues et progressives lorsque G décrit la ligne moyenne.

Pour l'étude des poutres en général, on fait les hypothèses suivantes :

- la section droite de la poutre est indéformable,
- le déplacement transversal est uniforme sur la section droite.

Ces hypothèses permettent d'exprimer les déplacements d'un point quelconque de la section, en fonction des déplacements du point correspondant situé sur la ligne moyenne, et en fonction d'un accroissement de déplacement dû à la rotation de la section autour des axes transversaux.

La discrétisation en éléments "exacts" de poutre s'effectue sur un élément linéique à deux nœuds et six degrés de liberté par nœuds. Ces degrés de liberté sont les trois translations u, v, w et les trois rotations $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ [Figure 2-a)].

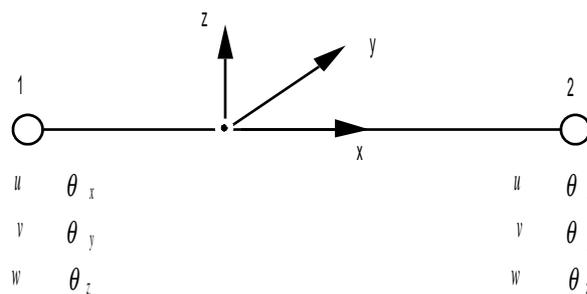


Figure 2-1 : Élément poutre

Attendu que les déformations sont locales, il est construit en chaque sommet du maillage une base locale dépendant de l'élément sur lequel on travaille. La continuité des champs de déplacements est assurée par un changement de base, ramenant les données dans la base globale.

Dans le cas des poutres droites, on place traditionnellement la ligne moyenne sur l'axe x de la base locale, les déplacements transversaux s'effectuant ainsi dans le plan (y, z) .

Enfin lorsque nous rangeons des grandeurs liées aux degrés de liberté d'un élément dans un vecteur ou une matrice élémentaire (donc de dimension 12 ou 12^2), on range d'abord les variables pour le sommet 1 puis celles du sommet 2. Pour chaque nœud, on stocke d'abord les grandeurs liées aux trois translations, puis celles liées aux trois rotations. Par exemple, un vecteur déplacement sera structuré de la manière suivante :

$$\underbrace{u_1, v_1, w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \theta_{z_1}}_{\text{sommet 1}}, \underbrace{u_2, v_2, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, \theta_{z_2}}_{\text{sommet 2}}$$

3 Les équations du mouvement des poutres

Nous ne reprendrons pas dans ce document toutes les équations du mouvement des poutres. Pour plus de compléments concernant cette partie on peut se référer à la documentation concernant les éléments `POU_D_E` et `POU_D_T` ([bib4]).

4 Élément de poutre droite multifibre

On décrit dans ce chapitre l'obtention des matrices élémentaires de rigidité et de masse pour l'élément de poutre droite multifibre, selon le modèle d'Euler. Les matrices de rigidité sont calculées avec les options '`RIGI_MECA`' ou '`RIGI_MECA_TANG`', et les matrices de masse avec l'option '`MASS_MECA`' pour la matrice cohérente, et l'option '`MASS_MECA_DIAG`' pour la matrice de masse diagonalisée.

Nous présentons ici une généralisation [bib3] où l'axe de référence choisi pour la poutre est indépendant de toute considération géométrique, inertielle ou mécanique. L'élément fonctionne pour une section quelconque (hétérogène est sans symétrie) et est donc adapté à une évolution non linéaire du comportement des fibres.

On décrit également le calcul des forces nodales pour les algorithmes non linéaires : '`FORC_NODA`' et '`RAPH_MECA`'.

4.1 Élément poutre de référence

La [Figure 4.1-a] nous montre le changement de variable réalisé pour passer de l'élément fini réel [Figure 2-a] à l'élément fini de référence.

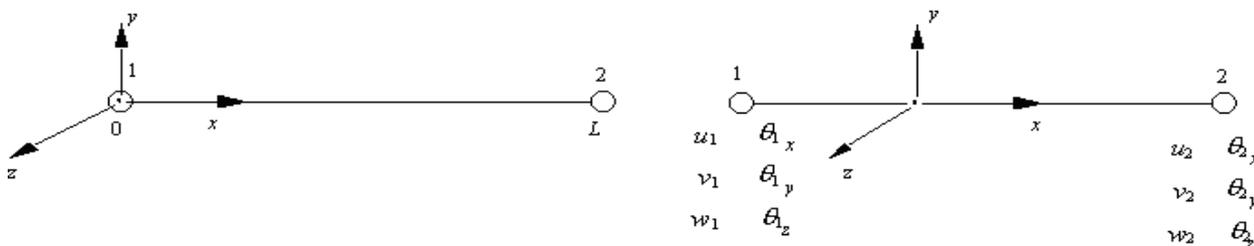


Figure 4.1-1 : Élément de référence vs Élément réel

On considérera alors le champ de déplacements continu en tout point de la ligne moyenne par rapport au champ de déplacements discrétisé de la façon suivante :

$$U_s = [N] \{U\} \quad \text{éq 4.1-1}$$

L'indice s désigne les quantités attachées à la fibre moyenne.

En utilisant les fonctions de forme de l'élément de référence, la discrétisation des variables $u_s(x), v_s(x), w_s(x), \theta_{sx}(x), \theta_{sy}(x), \theta_{sz}(x)$ devient :

$$\begin{pmatrix} u_s(x) \\ v_s(x) \\ w_s(x) \\ \theta_{sx}(x) \\ \theta_{sy}(x) \\ \theta_{sz}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 & 0 & 0 & -N_{5,x} & 0 & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{3,x} & 0 & 0 & 0 & N_{4,x} & 0 & N_{5,x} & 0 & 0 & 0 & N_{6,x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{pmatrix} \quad \text{éq 4.1-2}$$

Avec les fonctions d'interpolation suivantes, et leurs dérivées utiles :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} & ; & & N_{1,x} &= -\frac{1}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} & ; & & N_{2,x} &= \frac{1}{L} \\ N_3 &= 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & ; & & N_{3,xx} &= -\frac{6}{L^2} + 12\frac{x}{L^3} \\ N_4 &= x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & ; & & N_{4,xx} &= -\frac{4}{L} + 6\frac{x}{L^2} \\ N_5 &= 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} & ; & & N_{5,xx} &= \frac{6}{L^2} - 12\frac{x}{L^3} \\ N_6 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & ; & & N_{6,xx} &= -\frac{2}{L} + 6\frac{x}{L^2} \end{aligned} \quad \text{éq 4.1-3}$$

4.2 Détermination de la matrice de rigidité de l'élément multifibre

4.2.1 Cas général (poutre d'Euler)

Considérons une poutre d'Euler, droite, orientée dans la direction x , soumise à des efforts distribués q_x, q_y, q_z [Figure 4.2.1-a].

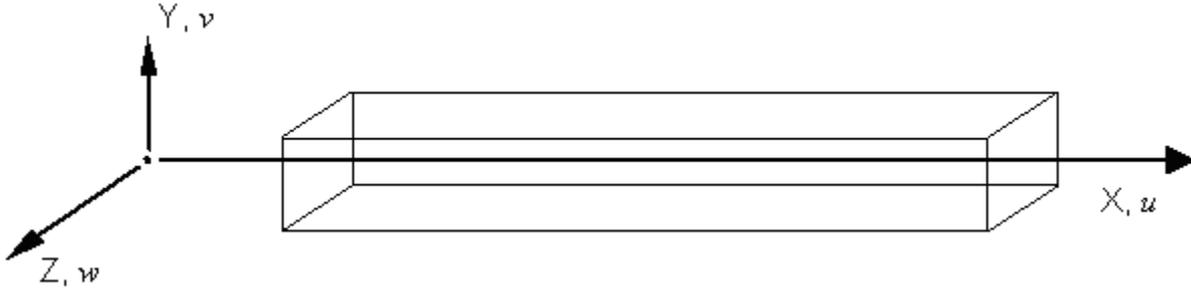


Figure 4.2.1-1 : Poutre d'Euler 3D.

Les champs de déplacements et de déformations prennent alors la forme suivante lorsque l'on écrit le déplacement d'un point quelconque de la section en fonction du déplacement (\mathbf{u}_s) et de la rotation (θ_s) de la ligne de moyenne :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \quad \text{éq 4.2.1-1}$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) \quad \text{éq 4.2.1-2}$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) \quad \text{éq 4.2.1-3}$$

$$\epsilon_{xx} = u'_x(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \quad \text{éq 4.2.1-4}$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = 0 \quad \text{éq 4.2.1-5}$$

Remarques :

- La torsion est traitée globalement en admettant une hypothèse élastique, à part, on ne calcule pas ϵ_{yz} ici.
- $f'(x)$ désigne la dérivée de $f(x)$ par rapport à x .

En introduisant les équations [éq 4.2.1-4] et [éq 4.2.1-5] dans le principe des travaux virtuels on obtient :

$$\int_{V_0} \sigma_{xx} \cdot \delta \epsilon_{xx} dV_0 = \int_0^L (\delta u_s(x) q_x + \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx \quad \text{éq 4.2.1-6}$$

q_x, q_y, q_z désignant les efforts linéiques appliqués.

Ce qui donne en utilisant l'équation [éq 4.2.1-1] :

$$\int_0^L \left(N \delta u'_s(x) + M_x \delta \theta'_{sx}(x) + M_y \delta \theta'_{sy}(x) + M_z \delta \theta'_{sz}(x) \right) dx = \int_0^L \left(q_x \delta u_s(x) + q_y \delta v_s(x) + q_z \delta w_s(x) \right) dx \quad \text{éq 4.2.1-7}$$

avec :

$$N = \int_S \sigma_{xx} dS ; M_y = \int_S z \sigma_{xx} dS ; M_z = \int_S -y \sigma_{xx} dS \quad \text{éq 4.2.1-8}$$

Remarques :

- Le moment de torsion M_x n'est pas calculé par intégration mais calculé directement à partir de la raideur en torsion (voir [éq 4.2.2-4]).
- La théorie des poutres associée à un matériau élastique donne : $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$

4.2.2 Cas de la poutre multifibre

Nous supposons maintenant que la section S n'est pas homogène [Figure 4.2.2-a].

Sans adopter d'hypothèse particulière sur l'intersection de l'axe X avec la section S ou sur l'orientation des axes Y, Z , la relation entre les contraintes "généralisées" et les déformations "généralisées" \mathbf{D}_s devient [bib2] :

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{D}_s \quad \text{éq 4.2.2-1}$$

avec :

$$\mathbf{F}_s = (N, M_y, M_z, M_x)^T$$

$$\mathbf{D}_s = (u'_s(x), \theta'_{sy}(x), \theta'_{sz}(x), \theta'_{sx}(x))^T \quad \text{éq 4.2.2-2}$$

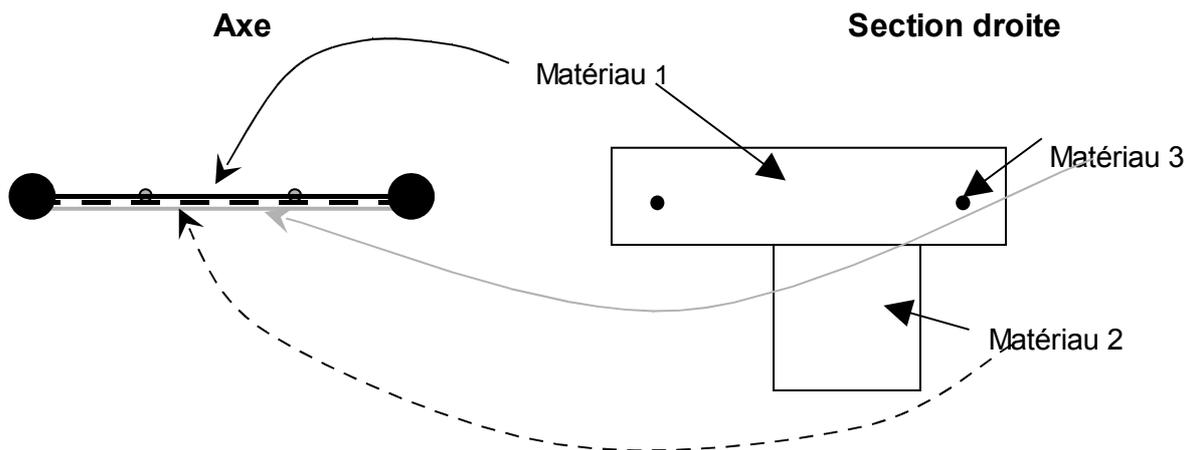


Figure 4.2.2-1 : Section S quelconque - poutre multifibre

La matrice \mathbf{K}_s peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{K}_s = \begin{pmatrix} K_{s11} & K_{s12} & K_{s13} & 0 \\ & K_{s22} & K_{s23} & 0 \\ & & K_{s33} & 0 \\ sym & & & K_{s44} \end{pmatrix} \quad \text{éq 4.2.2-3}$$

avec :

$$\begin{aligned} K_{s11} &= \int_S E dS ; & K_{s12} &= \int_S E z ds ; & K_{s13} &= - \int_S E y ds \\ K_{s22} &= \int_S E z^2 dS ; & K_{s23} &= - \int_S E y z ds ; & K_{s33} &= \int_S E y^2 ds \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.2-4}$$

où E peut varier en fonction de y et z . En effet, il se peut que dans la modélisation plane de la section [Figure 4.2.2-a)], plusieurs matériaux cohabitent. Par exemple, dans une section de béton armée, il y a à la fois du béton et des armatures.

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les intégrales des équations [éq 4.2.2-4]. Le calcul des coefficients de la matrice \mathbf{K}_s est détaillé dans le paragraphe [§4.2.3] suivant.

Remarque :

Le terme de torsion $K_{s44} = GJ_x$ est donné par l'utilisateur à l'aide de la donnée de J_x , à l'aide de la commande `AFPE_CARA_ELEM`.

L'introduction des équations [éq 4.2.2-1] à [éq 4.2.2-4] dans le principe des travaux virtuels conduit à :

$$\int_0^L \delta D_s^T \cdot K_s \cdot D_s dx - \int_0^L (\delta u_s(x) q_x + \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z) dx = 0 \quad \text{éq 4.2.2-5}$$

Les déformations généralisées sont calculée par (D_s est donnée à l'équation [éq 4.2.2-2]) :

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{B} \mathbf{U} \quad \text{éq 4.2.2-6}$$

Avec la matrice \mathbf{B} suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{3,xx} & 0 & N_{4,xx} & 0 & 0 & 0 & -N_{5,xx} & 0 & N_{6,xx} & 0 \\ 0 & N_{3,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{4,xx} & 0 & N_{5,xx} & 0 & 0 & 0 & N_{6,xx} \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{éq 4.2.2-7}$$

La discrétisation de l'espace $[0, L]$ avec des éléments et l'utilisation des équations [éq 4.2.2-5] rend l'équation [éq 4.2.1-6] équivalente à la résolution d'un système linéaire classique :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad \text{éq 4.2.2-8}$$

La matrice de rigidité de l'élément [Figure 4.2.2-b] et le vecteur des efforts résultats sont finalement donnés par :

$$\mathbf{K}_{elem} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{B} \, dx$$

$$\mathbf{F} = \int_0^L \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{Q} \, dx$$

éq 4.2.2-9

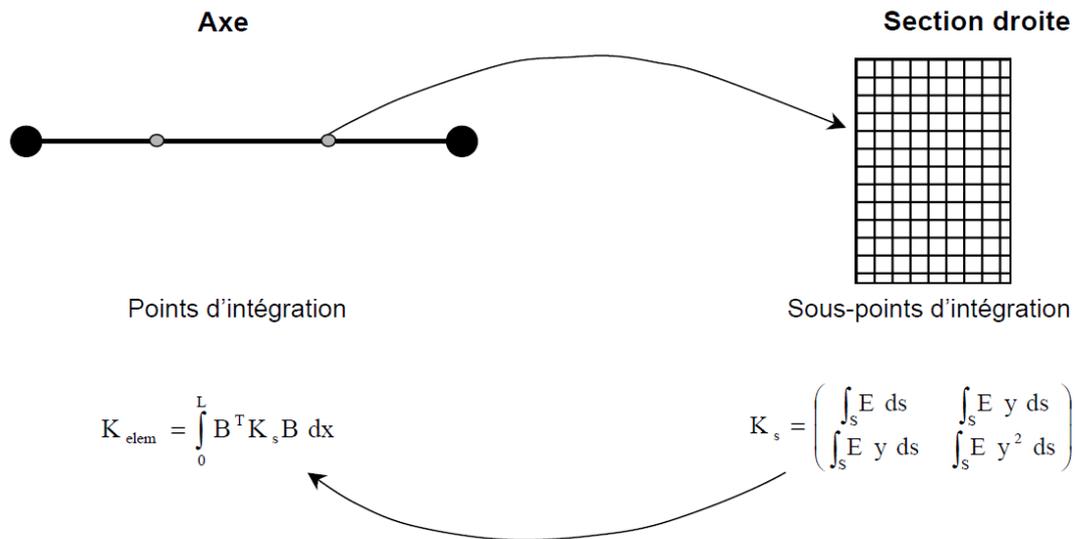


Figure 4.2.2-b : Poutre multifibre – Calcul de \mathbf{K}_{elem}

Avec le vecteur \mathbf{Q} qui dépend du chargement extérieur : $\mathbf{Q} = (q_x \ q_y \ q_z \ 0 \ 0 \ 0)^T$.

Si nous considérons que les efforts distribués q_x, q_y, q_z sont constants, nous obtenons le vecteur forces nodales suivant :

$$\mathbf{F} = \left(\frac{Lq_x}{2} \ \frac{Lq_y}{2} \ \frac{Lq_z}{2} \ 0 \ -\frac{L^2q_z}{12} \ \frac{L^2q_y}{12} \ \frac{Lq_x}{2} \ \frac{Lq_y}{2} \ \frac{Lq_z}{2} \ 0 \ \frac{L^2q_z}{12} \ \frac{L^2q_y}{12} \right)^T$$

éq 4.2.2-10

4.2.3 Discrétisation de la section en fibres – Calcul de K_s

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les différentes intégrales qui interviennent dans la matrice de rigidité, et les autres termes nécessaires.

La géométrie des fibres regroupées en groupes de fibres, via l'opérateur `DEFI_GEOM_FIBRE` [U4.26.01] contient notamment les caractéristiques (Y , Z , $AIRE$) pour chaque fibre. On peut prévoir au plus 10 groupes de fibres maxi par élément poutre.

Ainsi, si nous avons une section qui comporte n fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$\begin{aligned} K_{s11} &= \sum_{i=1}^n E_i S_i & ; & & K_{s12} &= \sum_{i=1}^n E_i z_i S_i & ; & & K_{s13} &= \sum_{i=1}^n E_i y_i S_i \\ K_{s22} &= \sum_{i=1}^n E_i z_i^2 S_i & ; & & K_{s23} &= -\sum_{i=1}^n E_i y_i z_i S_i & ; & & K_{s33} &= \sum_{i=1}^n E_i y_i^2 S_i \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.3-1}$$

avec E_i le module initial ou tangent et S_i la section de chaque fibre. L'état de contrainte est constant par fibre.

Chaque fibre est également repérée à l'aide de y_i et z_i les coordonnées du centre de gravité de la fibre par rapport à l'axe de la section défini par le mot-clé 'COOR_AXE_POUTRE' (voir la commande `DEFI_GEOM_FIBRE` [U4.26.01]).

La numérotation des fibres dépend du choix du mot-clé 'FIBRE' ou 'SECTION' (voir la commande `DEFI_GEOM_FIBRE` [U4.26.01]).

4.2.4 Intégration dans le cas élastique linéaire (`RIGI_MECA`)

Lorsque le comportement du matériau est linéaire, si l'élément poutre est homogène dans sa longueur, l'intégration de l'équation [éq 4.2.2-9] peut être faite analytiquement. On obtient alors la matrice de rigidité suivante :

$$\mathbf{K}_{elem} = \begin{matrix}
 \frac{K_{s11}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{s12}}{L} & \frac{K_{s13}}{L} & -\frac{K_{s11}}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{s12}}{L} & -\frac{K_{s13}}{L} \\
 & \frac{12K_{s33}}{L^3} & \frac{-12K_{s23}}{L^3} & 0 & \frac{6K_{s23}}{L^2} & \frac{6K_{s33}}{L^2} & 0 & \frac{-12K_{s33}}{L^3} & \frac{12K_{s23}}{L^3} & 0 & \frac{6K_{s23}}{L^2} & \frac{6K_{s33}}{L^2} \\
 & & \frac{12K_{s22}}{L^3} & 0 & \frac{-6K_{s22}}{L^2} & \frac{-6K_{s23}}{L^2} & 0 & \frac{12K_{s23}}{L^3} & \frac{-12K_{s22}}{L^3} & 0 & \frac{-6K_{s22}}{L^2} & \frac{-6K_{s23}}{L^2} \\
 & & & \frac{K_{s44}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{s44}}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4K_{s22}}{L} & \frac{4K_{s23}}{L} & \frac{-K_{s12}}{L} & \frac{-6K_{s23}}{L^2} & \frac{6K_{s22}}{L^2} & 0 & \frac{2K_{s22}}{L} & \frac{2K_{s23}}{L} \\
 & & & & & \frac{4K_{s33}}{L} & \frac{-K_{s13}}{L} & \frac{-6K_{s33}}{L^2} & \frac{6K_{s23}}{L^2} & 0 & \frac{2K_{s23}}{L} & \frac{2K_{s33}}{L} \\
 & & & & & & \frac{K_{s11}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{s12}}{L} & \frac{K_{s13}}{L} \\
 & & & & & & & \frac{12K_{s33}}{L^3} & \frac{-12K_{s23}}{L^3} & 0 & \frac{-6K_{s23}}{L^2} & \frac{-6K_{s33}}{L^2} \\
 & & & & & & & & \frac{12K_{s22}}{L^3} & 0 & \frac{6K_{s22}}{L^2} & \frac{6K_{s23}}{L^2} \\
 & & & & & & & & & & \frac{K_{s44}}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4K_{s22}}{L} & \frac{4K_{s23}}{L} \\
 & & & & & & & & & & & & \frac{4K_{s33}}{L}
 \end{matrix}$$

SYM

éq 4.2.4-1

avec les termes suivants $K_{s11}, K_{s12}, K_{s13}, K_{s22}, K_{s33}, K_{s23}, K_{s44}$ donnés à l'équation [éq 4.2.2-4].

4.2.5 Intégration dans le cas non-linéaire (RIGI_MECA_TANG)

Lorsque le comportement du matériau est non linéaire, pour permettre une intégration correcte des efforts internes (voir paragraphe [§4.4]), il est nécessaire d'avoir au moins deux points d'intégration le long de la poutre. Nous avons choisi d'utiliser deux points de Gauss.

L'intégrale de \mathbf{K}_{elem} [éq 4.2.2-9] se calcule sous forme numérique :

$$\mathbf{K}_{elem} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{B} \, dx = j \sum_{i=1}^2 w_i \mathbf{B}(x_i)^T \cdot \mathbf{K}_s(x_i) \cdot \mathbf{B}(x_i) \quad \text{éq 4.2.5-1}$$

- où x_i est la position du point de Gauss i dans un élément de référence de longueur 1, c'est-à-dire : $(1 \pm 0,57735026918963)/2$;
- w_i est le poids du point de Gauss i . On prend ici $w_i=0,5$ pour chacun des 2 points ; j est le Jacobien. On prend ici $j=L$, l'élément réel ayant une longueur L et la fonction de forme pour passer à l'élément de référence étant $\frac{x}{L}$.

\mathbf{K}_s est calculé à l'aide des équations [éq 4.2.2-3], [éq 4.2.2-4] (voir paragraphe [§4.2.3] pour l'intégration numérique de ces équations).

Le calcul analytique de $\mathbf{B}(x_i)^T \cdot \mathbf{K}_s(x_i) \cdot \mathbf{B}(x_i)$ donne :

$$\begin{pmatrix} B_1^2 K_{s11} & -B_1 B_2 K_{s13} & B_1 B_2 K_{s12} & 0 & -B_1 B_3 K_{s12} & -B_1 B_3 K_{s13} & -B_1^2 K_{s11} & B_1 B_2 K_{s13} & -B_1 B_2 K_{s12} & 0 & -B_1 B_4 K_{s12} & -B_1 B_4 K_{s13} \\ & B_2^2 K_{s33} & B_2^2 K_{s23} & 0 & B_2 B_3 K_{s23} & B_2 B_3 K_{s33} & B_1 B_2 K_{s13} & -B_2^2 K_{s33} & B_2^2 K_{s23} & 0 & B_2 B_4 K_{s23} & B_2 B_4 K_{s33} \\ & & B_2^2 K_{s22} & 0 & -B_2 B_3 K_{s22} & -B_2 B_3 K_{s23} & -B_1 B_2 K_{s12} & B_2^2 K_{s23} & -B_2^2 K_{s22} & 0 & -B_2 B_4 K_{s22} & -B_2 B_4 K_{s23} \\ & & & B_1^2 K_{s44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B_1^2 K_{s44} & 0 & 0 \\ & & & & B_3^2 K_{s22} & B_3^2 K_{s23} & B_1 B_3 K_{s12} & -B_2 B_3 K_{s23} & B_2 B_3 K_{s22} & 0 & B_3 B_4 K_{s22} & B_3 B_4 K_{s23} \\ & & & & & B_3^2 K_{s33} & B_1 B_3 K_{s13} & -B_2 B_3 K_{s33} & B_2 B_3 K_{s23} & 0 & B_3 B_4 K_{s23} & B_3 B_4 K_{s33} \\ & & & & & & B_1^2 K_{s11} & -B_1 B_2 K_{s13} & B_1 B_2 K_{s12} & 0 & B_1 B_4 K_{s12} & B_1 B_4 K_{s13} \\ & & & & & & & B_2^2 K_{s33} & -B_2^2 K_{s23} & 0 & -B_2 B_4 K_{s23} & -B_2 B_4 K_{s33} \\ & & & & & & & & B_2^2 K_{s22} & 0 & B_2 B_4 K_{s22} & B_2 B_4 K_{s23} \\ & & & & & & & & & B_1^2 K_{s44} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & B_4^2 K_{s22} & B_4^2 K_{s23} \\ & & & & & & & & & & & B_4^2 K_{s33} \end{pmatrix} \quad \text{éq 4.2.5-2}$$

où les B_i sont calculés à l'abscisse x_i de l'élément de référence avec :

$$\begin{aligned} B_1 &= -N_{1,x} = N_{2,x} = \frac{1}{L} \\ B_2 &= -N_{3,xx} = N_{5,xx} = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x_i}{L^2} \\ B_3 &= N_{4,xx} = -\frac{4}{L} + \frac{6x_i}{L} \\ B_4 &= N_{6,xx} = -\frac{2}{L} + \frac{6x_i}{L} \end{aligned} \quad \text{éq 4.2.5-3}$$

4.3 Détermination de la matrice de masse de l'élément multifibre

4.3.1 Détermination de \mathbf{M}_{elem}

De même, le travail virtuel des efforts d'inertie devient [bib2] :

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= \int_0^L \int_S \rho \left(\delta u(x, y) \frac{d^2 u(x, y)}{dt^2} + \delta v(x, y) \frac{d^2 v(x, y)}{dt^2} + \delta w(x, y) \frac{d^2 w(x, y)}{dt^2} \right) dS dx \\ &= \int_0^L \delta \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{M}_s \cdot \frac{d^2 \mathbf{U}_s}{dt^2} dx \end{aligned}$$

éq 4.3.1-1

avec \mathbf{U}_s le vecteur des déplacements "généralisés".

Ce qui donne pour la matrice de masse :

$$\mathbf{M}_s = \begin{pmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & M_{s12} & M_{s13} & 0 \\ & M_{s11} & 0 & 0 & 0 & -M_{s12} \\ & & M_{s11} & 0 & 0 & -M_{s13} \\ & & & M_{s22} & M_{s23} & 0 \\ & & & & M_{s33} & 0 \\ \text{sym} & & & & & M_{s22} + M_{s33} \end{pmatrix}$$

éq 4.3.1-2

avec :

$$\begin{aligned} M_{s11} &= \int_S \rho ds ; & M_{s12} &= \int_S \rho z ds ; & M_{s13} &= -\int_S \rho y ds \\ M_{s22} &= \int_S \rho z^2 ds ; & M_{s23} &= -\int_S \rho y z ds ; & M_{s33} &= \int_S \rho y^2 ds \end{aligned}$$

éq 4.3.1-3

avec ρ qui peut varier en fonction de y et z .

Comme pour la matrice de rigidité, nous prenons en compte les déformations généralisées et la discrétisation de l'espace $[0, L]$. Ce qui donne finalement pour la matrice de masse élémentaire :

$$\mathbf{M}_{elem} = \begin{matrix} M_{elem}^1 \\ M_{elem}^2 \\ M_{elem}^3 \\ M_{elem}^4 \\ M_{elem}^5 \\ M_{elem}^6 \\ M_{elem}^7 \\ M_{elem}^8 \\ M_{elem}^9 \\ M_{elem}^{10} \\ M_{elem}^{11} \\ M_{elem}^{12} \end{matrix}$$

avec :

$$M_{elem}^1 = \begin{bmatrix} \frac{LM_{s11} - M_{s13}}{3} & \frac{M_{s12}}{2} & 0 & \frac{LM_{s12}}{2} & \frac{LM_{s13}}{12} & \frac{LM_{s11}}{6} & \frac{M_{s13}}{2} & -\frac{M_{s12}}{2} & 0 & -\frac{LM_{s12}}{12} & -\frac{LM_{s13}}{12} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^2 = \begin{bmatrix} sym & \frac{13LM_{s11}}{35} + \frac{6M_{s33}}{5L} - \frac{6M_{s23}}{5L} - \frac{7LM_{s12}}{20} & \frac{M_{s23}}{10} & \frac{11L^2M_{s11}}{210} + \frac{M_{s33}}{10} - \frac{M_{s13}}{2} & \frac{9LM_{s11}}{70} - \frac{6M_{s33}}{5L} & \frac{6M_{s23}}{5L} & -\frac{3LM_{s12}}{20} & \frac{M_{s23}}{10} & -\frac{13L^2M_{s11}}{420} + \frac{M_{s33}}{10} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^3 = \begin{bmatrix} sym & sym & \frac{13LM_{s11}}{35} + \frac{6M_{s22}}{5L} - \frac{7LM_{s13}}{20} - \frac{11L^2M_{s11}}{210} - \frac{M_{s22}}{10} - \frac{M_{s23}}{10} & \frac{M_{s12}}{2} & \frac{6M_{s23}}{5L} & \frac{9LM_{s11}}{70} - \frac{6M_{s22}}{5L} & -\frac{3LM_{s13}}{20} & \frac{13L^2M_{s11}}{420} - \frac{M_{s22}}{10} - \frac{M_{s23}}{10} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^4 = \begin{bmatrix} sym & sym & sym & \frac{LM_{s22} + LM_{s33}}{3} & \frac{L^2M_{s13}}{20} - \frac{L^2M_{s12}}{20} & 0 & -\frac{3LM_{s12}}{20} - \frac{3LM_{s13}}{20} & \frac{LM_{s22} + LM_{s33}}{6} - \frac{L^2M_{s13}}{30} & \frac{L^2M_{s12}}{30} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^5 = \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & \frac{L^3M_{s11}}{105} + \frac{2LM_{s22}}{15} - \frac{2LM_{s23}}{15} - \frac{LM_{s12}}{12} - \frac{M_{s23}}{10} - \frac{13L^2M_{s11}}{420} + \frac{M_{s22}}{10} & \frac{L^2M_{s13}}{30} - \frac{L^3M_{s11}}{140} - \frac{LM_{s22}}{30} - \frac{LM_{s23}}{30} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^6 = \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & sym & \frac{L^3M_{s11}}{105} + \frac{2LM_{s33}}{15} - \frac{LM_{s13}}{12} - \frac{13L^2M_{s11}}{420} - \frac{M_{s33}}{10} & \frac{M_{s23}}{10} - \frac{L^2M_{s12}}{30} - \frac{LM_{s23}}{30} - \frac{L^3M_{s11}}{140} - \frac{LM_{s33}}{30} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^7 = \begin{bmatrix} sym & sym & sym & sym & sym & sym & \frac{LM_{s11}}{3} & \frac{M_{s13}}{2} - \frac{M_{s12}}{2} & 0 & \frac{LM_{s12}}{12} & \frac{LM_{s13}}{12} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^8 = \begin{bmatrix} sym & \frac{13LM_{s11}}{35} + \frac{6M_{s33}}{5L} - \frac{6M_{s23}}{5L} - \frac{7LM_{s12}}{20} - \frac{M_{s23}}{10} - \frac{11L^2M_{s11}}{210} - \frac{M_{s33}}{10} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^9 = \begin{bmatrix} sym & \frac{13LM_{s11}}{35} + \frac{6M_{s22}}{5L} - \frac{7LM_{s13}}{20} - \frac{11L^2M_{s11}}{210} + \frac{M_{s22}}{10} & \frac{M_{s23}}{10} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^{10} = \begin{bmatrix} sym & \frac{LM_{s22} + LM_{s33}}{3} - \frac{L^2M_{s13}}{20} & \frac{L^2M_{s12}}{20} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^{11} = \begin{bmatrix} sym & \frac{L^3M_{s11}}{105} + \frac{2LM_{s22}}{15} - \frac{2LM_{s23}}{15} \end{bmatrix}$$

$$M_{elem}^{12} = \begin{bmatrix} sym & \frac{L^3M_{s11}}{105} + \frac{2LM_{s33}}{15} \end{bmatrix}$$

éq 4.3.1-4

avec les termes suivants : $M_{s11}, M_{s12}, M_{s13}, M_{s22}, M_{s33}, M_{s23}$ qui sont donnés à l'équation [éq 4.3.1-3].

Remarque :

La matrice de masse est réduite par la technique des masses concentrées ([bib4]). Cette matrice de masse diagonale s'obtient par l'option 'MASS_MECA_DIAG' de l'opérateur CALC_MATR_ELEM [U4.61.01].

4.3.2 Discrétisation de la section en fibres - Calcul de M_s

La discrétisation de la section en fibres permet de calculer les différentes intégrales qui interviennent dans la matrice de masse. Ainsi, si nous avons une section qui comporte n fibres nous aurons les approximations suivantes des intégrales :

$$M_{s11} = \sum_{i=1}^n \rho_i S_i ; M_{s12} = \sum_{i=1}^n \rho_i z_i S_i ; M_{s13} = - \sum_{i=1}^n \rho_i y_i S_i$$

$$M_{s22} = \sum_{i=1}^n \rho_i z_i^2 S_i ; M_{s23} = - \sum_{i=1}^n \rho_i y_i z_i S_i ; M_{s33} = \sum_{i=1}^n \rho_i y_i^2 S_i$$

éq 4.3.2-1

avec ρ_i et S_i la masse volumique et la section de chaque fibre. y_i et z_i sont les coordonnées du centre de gravité de la fibre définis comme précédemment.

4.4 Calcul des forces internes

Le calcul des forces nodales F_{int} dues à un état de contraintes internes données se fait par l'intégrale :

$$F_{int} = \int_0^L B^T \cdot F_s dx$$

éq 4.4-1

où B est la matrice donnant les déformations généralisées en fonction des déplacements nodaux [éq 4.2.2-6] et où F_s est le vecteur des contraintes généralisées donné à l'équation [éq 4.2.2-2],

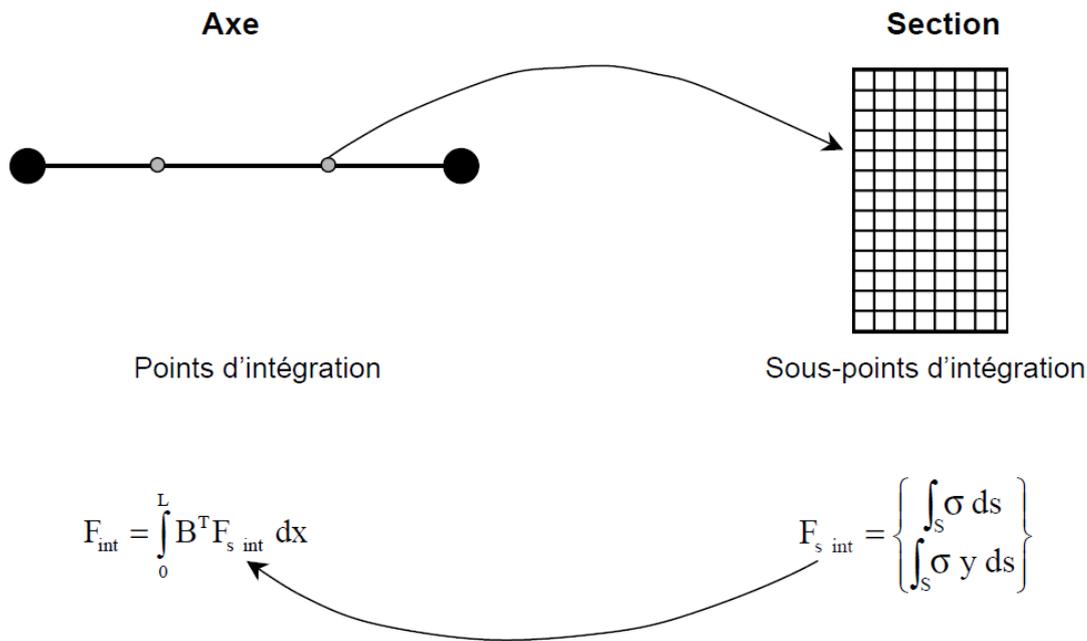


Figure 4.4-a : Poutre multifibre – Calcul de F_{int}

$$F_s^T = (N \quad M_y \quad M_z \quad M_x) \quad \text{éq 4.4-2}$$

L'effort normal N et les moments fléchissant M_y et M_z sont calculés par intégration des contraintes sur la section [éq 4.2.1-8].

Le comportement en torsion étant supposé rester linéaire, le moment de torsion est calculé avec les rotations axiales nodales :

$$M_x = GJ_x \frac{\theta_{x2} - \theta_{x1}}{L} \quad \text{éq 4.4-3}$$

L'équation [éq 4.4-1] est intégrée numériquement :

$$F_i = \int_0^L B^T \cdot F_s dx = j \sum_{i=1}^2 w_i B(x_i)^T \cdot F_s(x_i) \quad \text{éq 4.4-4}$$

Les positions et poids des points de Gauss ainsi que le Jacobien sont donnés dans le paragraphe [§4.2.5].

Le calcul analytique de $B(x_i)^T \cdot F_s(x_i)$ donne :

$$\left[B(x_i)^T \cdot F_s(x_i) \right]^T = \left[-B_1 N \quad B_2 M_z \quad -B_2 M_y \quad 0 \quad B_3 M_y \quad B_3 M_z \quad B_1 N \quad -B_2 M_z \quad B_2 M_y \quad 0 \quad B_4 M_y \quad B_4 M_z \right] \quad \text{éq 4.4-5}$$

où les B_i sont donnés à l'équation [éq 4.2.4-1].

4.5 Formulation enrichie en déformation

Avec les interpolations de déplacements de l'équation [éq 4.1-1], la déformation généralisée axiale est constante et les courbures sont linéaires (voir équations [éq 4.2.2-6], [éq 4.2.2-7] et [éq 4.2.5-3]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_s(x) = \frac{u_2 - u_1}{L} \\ \chi_{ys}(x) = -\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)w_1 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right)\theta_{y1} - \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}\right)w_2 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right)\theta_{y2} \\ \chi_{zs}(x) = -\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right)v_1 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right)\theta_{z1} + \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}\right)v_2 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right)\theta_{z2} \end{array} \right. \quad \text{éq 4.5-1}$$

S'il n'y a pas de couplage entre ces deux déformations (cas élastique, avec la ligne moyenne de référence qui passe par le barycentre de la section), cela ne pose pas de problèmes. Mais dans le cas général non linéaire, il y a un décalage de l'axe neutre, et les termes K_{s12} et K_{s13} de \mathbf{K}_s (équations [éq 4.2.2-3] et [éq 4.2.2-4]) ne sont pas nuls, il y a couplage entre les moments et l'effort normal. On a alors une incompatibilité dans l'approximation des déformations axiales d'une fibre :

$$\varepsilon = \varepsilon_s(x) - y\chi_{zs}(x) + z\chi_{ys}(x) \quad \text{éq 4.5-2}$$

Un moyen d'éliminer cette incompatibilité est d'enrichir le champ de déformation axiale :

$$\varepsilon_s(x) = \varepsilon_s(x) + \tilde{\varepsilon}_s(x) ; \quad \tilde{\varepsilon}_s(x) = \alpha \cdot G(x) ; \quad G(x) = \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \quad \text{pour } x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \quad \text{éq 4.5-3}$$

où $G(x)$ est une déformation enrichie qui dérive d'une fonction « bulle » en déplacement et α le degré de liberté d'enrichissement. La base variationnelle d'un tel enrichissement est fournie par le principe de Hu-Washizu [bib5] qui peut être présenté de la même manière que la méthode des modes incompatibles [bib6].

4.5.1 Méthode des modes incompatibles

Le champ de déplacements généralisés régulier \mathbf{U}_s est défini par l'équation [éq 4.1-0]. Les déformations généralisées \mathbf{D}_s et les contraintes généralisées \mathbf{F}_s par l'équation [éq 4.2.2-2].

Le principe de Hu-Washizu consiste à écrire la forme faible des équations d'équilibre, mais aussi du calcul des déformations et de la loi de comportement, en projection sur les trois champs virtuels (déplacements généralisés \mathbf{U}_s^* , déformations généralisées \mathbf{D}_s^* et contraintes généralisées \mathbf{F}_s^*) :

$$\int_0^L \frac{dU_s^*}{dx} \cdot F_s \, dx - W_{ext} = 0 ; \quad \int_0^L \mathbf{F}_s^* \cdot \left(\frac{d\mathbf{U}_s}{dx} - \mathbf{D}_s \right) dx = 0 ; \quad \int_0^L \mathbf{D}_s^* \cdot (\mathbf{F}_s - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{D}_s) dx = 0 \quad \text{éq 4.5.1-1}$$

On introduit l'enrichissement des déformations réelles, et on choisit de décomposer le champ virtuel de déformations en une partie « régulière » issue du champ virtuel de déplacements et une partie enrichie :

$$\mathbf{D}_s = \frac{dU_s}{dx} + \bar{\mathbf{D}}_s ; \quad \mathbf{D}_s^* = \frac{dU_s^*}{dx} + \bar{\mathbf{D}}_s^* \quad \text{éq 4.5.1-2}$$

On reporte [éq 4.5.1-2a] dans [éq 4.5.1-1b], ce qui justifie l'« enrichissement » par l'orthogonalité :

$$\int_0^L \mathbf{F}_s^* \cdot \mathbf{D}_s \, dx = 0 \quad \text{éq 4.5.1-3}$$

L'équation [éq 4.5.1-1c] se décompose en deux puisqu'on a deux champs virtuels indépendants dans [éq 4.5.1-2b] :

$$\int_0^L \frac{dU_s^*}{dx} \cdot (F_s - K_s \cdot D_s) \, dx = 0 \quad ; \quad \int_0^L \bar{\mathbf{D}}_s^* \cdot (\mathbf{F}_s - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{D}_s) \, dx = 0 \quad \text{éq 4.5.1-4}$$

Enfin, la méthode des modes incompatibles consiste à choisir l'espace des contraintes orthogonal à l'espace des déformations enrichies, de telle sorte que [éq 4.5.1-3] est automatiquement vérifiée et [éq 4.5.1-4b] donne donc simplement :

$$\int_0^L \bar{\mathbf{D}}_s^* \cdot \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{D}_s \, dx = 0 \quad \text{éq 4.5.1-5}$$

Si on revient à la formulation forte de la loi de comportement dans [éq 4.5.1-4a] et [éq 4.5.1-5], le système [éq 4.5.1-1] devient :

$$\int_0^L \frac{dU_s^*}{dx} \cdot F_s \, dx - W_{ext} = 0 \quad ; \quad \int_0^L \bar{\mathbf{D}}_s^* \cdot \mathbf{F}_s \, dx = 0 \quad ; \quad \mathbf{F}_s = \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{D}_s \quad \text{éq 4.5.1-6}$$

Remarque :

• Ici on n'enrichit que la déformation axiale d'un élément de poutre d'Euler-Bernoulli, avec une fonction continue [éq 4.5-3], donc $\bar{\mathbf{D}} = (\bar{\varepsilon}_s \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$.

4.5.2 Implantation numérique

Du point de vue éléments finis, on peut écrire les déplacements et les déformations sous forme matricielle, avec la partie enrichie :

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{U}) + \mathbf{Q} \cdot (\alpha) \quad ; \quad \mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{U}) + \mathbf{G} \cdot (\alpha) \quad \text{éq 4.5.2-1}$$

où \mathbf{N} et \mathbf{B} sont les matrices classiques des fonctions d'interpolation et de leurs dérivées (voir [éq 4.1-1] et [éq 4.2.2-7]) et :

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \left(\frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T \quad \text{éq 4.5.2-2}$$

Remarque :

• \mathbf{G} a été choisie de telle sorte que l'élément passe toujours le « patch test » (énergie de déformation nulle pour un mouvement de solide) :

$$\int_0^L \mathbf{G}(x) \, dx = \mathbf{0} \quad \text{éq 4.5.2-3}$$

Après des manipulations classiques de passage du continu au discret, le système d'équations [éq 4.5.1-6], écrit pour l'ensemble de la structure, s'approxime par :

$$\begin{cases} A_{e=1}^{N_{elem}} (F_{int} - F_{ext}) = 0 \\ h_e = 0 \quad \forall e \in [1, N_{elem}] \end{cases} \quad \text{éq 4.5.2-4}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_{\text{int}} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F}_s \, dx = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{K}_s \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_s + \mathbf{G} \cdot \alpha) \, dx \\ \mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_0^L \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f} \, dx \\ h_e = \int_0^L \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{F}_s \, dx \end{array} \right. \quad \text{éq 4.5.2-5}$$

$A_{e=1}^{N_{elem}}$ dénote l'assemblage sur tous les éléments du maillage ; \mathbf{f} est la charge axiale répartie sur l'élément poutre. Le système d'équations [éq 4.5.2-4] est non linéaire, il est résolu de manière itérative (voir STAT_NON_LINE).

A l'itération $(i+1)$, avec $\Delta \mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i+1)} - \mathbf{U}^{(i)}$ et $\Delta \alpha^{(i)} = \alpha^{(i+1)} - \alpha^{(i)}$, la linéarisation du système donne (itérations de correction de Newton) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{e=1}^{N_{elem}} \left(\left(\mathbf{F}_{\text{int}}^{(i+1)} - \mathbf{F}_{\text{ext}}^{(i+1)} \right) + \mathbf{K}_e^{(i)} \cdot \Delta \mathbf{U}^{(i)} + \mathbf{X}_e^{(i)} \Delta \alpha^{(i)} \right) = 0 \\ h_e^{(i+1)} + \mathbf{X}_e^{(i)T} \cdot \Delta \mathbf{U}^{(i)} + H_e^{(i)} \Delta \alpha^{(i)} = 0 \quad \forall e \in [1, \dots, N_{elem}] \end{array} \right. \quad \text{éq 4.5.2-6}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_e^{(i)} = \int_L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{K}_s^{(i)} \cdot \mathbf{B} \, dx \\ \mathbf{X}_e^{(i)} = \int_L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{K}_s^{(i)} \cdot \mathbf{G} \, dx \\ H_e^{(i)} = \int_L \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{K}_s^{(i)} \cdot \mathbf{G} \, dx \end{array} \right. \quad \text{éq 4.5.2-7}$$

La deuxième équation du système [éq 4.5.2-6] est locale. Elle permet de calculer le degré de liberté d'enrichissement α indépendamment sur chaque élément. On le calcule par une méthode itérative locale (itérations (j) pour un déplacement $d^{(i)} = \Delta \mathbf{U}^{(i)}$ fixé) :

$$\alpha_{(j+1)}^{(i)} = \alpha_{(j)}^{(i)} - \left(H_{e(j)}^{(i)} \right)^{-1} h_{e(j)}^{(i)} \quad \text{éq 4.5.2-8}$$

Ainsi, lorsqu'on a convergé au niveau local, on a :

$$h_e(d^{(i)}, \alpha^{(i)}) = 0 \quad \text{éq 4.5.2-9}$$

Et on peut opérer une condensation statique pour éliminer α au niveau global.

$$\mathbf{K}_e^{(i)} = \mathbf{K}_e^{(i)} - \mathbf{X}_e^{(i)} \left(H_e^{(i)} \right)^{-1} \mathbf{X}_e^{(i)T} \quad \text{éq 4.5.2-10}$$

D'un point de vue pratique, cette technique permet de traiter l'enrichissement au niveau élémentaire sans perturber le nombre de degrés de liberté globaux. Elle est implantée au niveau de la routine élémentaire chargée de calculer les options FULL_MECA, RAPH_MECA et RIGI_MECA_TANG.

Remarques :

- dans le cas particulier exposé ici, $H_e^{(i)}$ est un réel, donc très facile à inverser !
- de même, h_e et α sont aussi des réels.
- Le calcul de $K_e^{(i)}$ est expliqué dans le paragraphe § 4.2.5, les autres grandeurs de l'équation [éq 4.5.2-8] se calculent selon la même technique.
- De même le calcul de \mathbf{F}_{int} est expliqué dans le paragraphe § 4.4, h_e dans l'équation [éq 4.5.2-5] se calcule selon la même technique.

4.5.3 Mise en garde

Pour un comportement élastique, l'enrichissement des déformations axiales permet de tenir compte correctement du couplage entre l'effort normal et les moments fléchissants, et de rendre la réponse de la poutre indépendante de la position choisie pour l'axe de référence (voir mot clé `COORD_AXE_POUTRE` dans l'opérateur `DEFI_GEOM_FIBRE`, [U4.26.01]). Il permet ainsi de traiter le cas des poutres excentrées.

Mais dans la version actuelle de *Code_Aster*, l'enrichissement des déformations axiales n'a été implanté que pour des calculs non linéaires avec `STAT_NON_LINE` ou `DYNA_NON_LINE`, pour les options `FULL_MECA`, `RAPH_MECA` et `RIGI_MECA_TANG`.

En revanche, il n'est pas encore implanté pour l'option `RIGI_MECA` (matrice élastique, relation de comportement 'ELAS'), car dans ce cas il faut écrire la matrice condensée de façon explicite (pas d'itérations possibles).

Ainsi, si l'on veut faire un calcul correct pour une poutre excentrée avec l'élément `POU_D_EM`, il faut utiliser `STAT_NON_LINE` avec l'option `MATRICE='TANGENTE'`. Tous les calculs utilisant `RIGI_MECA` ne sont pas corrects (`STAT_NON_LINE` avec l'option `MATRICE='ELASTIQUE'`, `MECA_STATIQUE`, mais aussi les opérateurs de calculs de modes propres...).

De même, la matrice de masse (voir § 4.4) n'a pas été modifiée et ne tient pas compte de l'enrichissement du déplacement axial.

4.6 Modèles de comportement non linéaires utilisables

Les modèles supportés sont d'une part les relations de comportement 1D de type `VMIS_ISOT_LINE`, `VMIS_CINE_LINE`, `VMIS_ISOT_TRAC`, `CORR_ACIER` et `PINTO_MENEGOTTO` [R5.03.09] pour les aciers, d'autre part le modèle `LABORD_1D` [R7.01.07] dédié au comportement uniaxial du béton en cyclique. On peut ainsi avoir plusieurs matériaux par élément de poutre multi-fibre.

Par ailleurs, si le comportement utilisé n'est pas disponible en 1D, on peut utiliser les autres lois 3D à l'aide de la méthode de R. De Borst [R5.03.09]). Par exemple, on peut traiter : `GRAN_IRRA_LOG`, `VISC_IRRA_LOG`. Cependant dans ce cas, on ne peut traiter qu'un seul matériau par élément de poutre multi-fibre.

Remarque :

Les variables internes, constantes par fibre, sont stockées dans les sous-points attachés au point d'intégration considéré.

L'accès au post-traitement des grandeurs définies aux sous-points se fait via le format MED3.0, de Salomé.

5 Cas d'application

On pourra utilement consulter les cas test-suivants :

- `ssl111a` : Réponse statique d'une poutre en béton armé (section en T) à comportement linéaire thermoélastique, [V3.01.111] ;
- `sdll130b` : Réponse sismique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement linéaire, [V2.02.130] ;
- `sdll132a` : Modes propres d'une charpente en poutres multi-fibres ; [V2.02.132] ;
- `ssnl119a,ssnl119b` : Réponse statique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire, [V6.02.119] ;
- `sdnl130a` : Réponse sismique d'une poutre en béton armé (section rectangulaire) à comportement non linéaire, [V5.02.130] ;
- `ssl102j` : Poutre encastree soumise à des efforts unitaires, [V3.01.102] ;

- ssnl106g, ssnl106h : Poutre élastoplastique en traction et flexion pure, [V6.02.106] ;
- ssnl122a : Poutre cantilever Multi-Fibres soumise à un effort [V6.02.122] ;
- ssnl123a : Flambement d'une poutre Multi-Fibres [V6.02.123] .

6 Bibliographie

- [1] J.L. BATOZ, G. DHATT : Modélisation des structures par éléments finis - HERMES.
- [2] J. GUEDES, P. PEGON & A. PINTO : A fibre Timoshenko beam element in CASTEM 2000 – Ispra, 1994.
- [3] P. KOTRONIS : Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D – Thèse de Doctorat de l'ENS Cachan – 2000.
- [4] J.M. PROIX, P. MIALON, M.T. BOURDEIX : Éléments "exacts" de poutres (droites et courbes), Documentation de Référence du Code_Aster [R3.08.01] .
- [5] O.C ZIENKIEWICZ et R.L TAYLOR. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 5th ed. Zienkiewicz et Taylor – 2000.
- [6] A. IBRAHIMBEGOVIC and E. L. WILSON. A modified method of incompatible modes. Commum. Numer. Methods Eng., 7:187–194 – 1991.
- [7] [U4.26.01] Opérateur `DEFI_GEOM_FIBRE`.
- [8] [R7.01.12] Modélisation de la thermo-hydratation, du séchage et du retrait du béton. G.Debruyne, mai 2005.

7 Description des versions du document

Indice document	Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
A	6.4	S.Moulin (EDF-R&D/AMA), L.Davenne (ENSC/LMT),	Version initiale
B	9.5	L.Davenne (ENSC/LMT), F.Voldoire (EDF-R&D/AMA)	Enrichissement de la déformation axiale par fonction bulle et condensation statique en non linéaire, prise en compte de la torsion en linéaire, adaptation à la nouvelle structure de données <code>GROUP_FIBRE</code> , cf. fiche REX 9141. Liste des cas d'applications.
C	10	F.Voldoire (EDF-R&D/AMA)	Corrections de mise en forme Openoffice.